E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

781

86

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XIII iulie 1962

7

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 7 — iulie 1962

SUMARUL

		Pag.
1.	Fracţii continue de I. Maurer, Cluj	385
2.	Stroboscopia de D. Stadnicov	294
3.	Despre reprezentarea grafică a funcţiilor compuse de N. O. Zaharia	400
4.	Un aparat simplu pentru determinarea forţelor electromagnetice şi electrodinamice, de Vonhaz-Iozsef, Carei	404
5.	Asupra teoremei lui Morley de R. Bodnărescu şi E. Wasserstrom	407
6.	Evidenţiaţii la Olimpiada de matematică şi fizică, etapa finală din 10—13 iunie 1962	409
7.	Probleme rezolvate (4650, 4651, 4652, 4654, 4655, 4659, 4661, 4662, 4663, 4664, 4665, 4666, 4670; M.F.L.; 815—817)	411
8.	Probleme propuse (5353—5383)	421
9.	Subiectele lucrărilor scrise date la Olimpiada de matematică, etapa finală, Bucureşti, 11 iunie 1962 (5384—5396)	425
10.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VII (E;1857—1870)	428
11.	Cărţi noi	430
12.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	431

ANUL XIII 7 IULIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Cristea I.*, asistent; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Kiss E.*, conf. univ.; *Koch Fr.*, lector; *Kovacs K.*, conf. univ.; *Lévai Şt.*, asistent; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D.*, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

1883

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 7 iulie 1962

FRACȚII CONTINUE

I. MAURER lector la Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj

Se găsesc în diferitele ramuri ale matematicii probleme, care ne conduc la fracții continue și rezolvarea lor necesită anumite cunoștințe asupra lor. În articolul de față vom preciza noțiunea de fracție continuă și vom face cunoștință cu unele proprietăți de bază.

1. *Fracții continue finite.* Fie $x = \frac{a}{b}$ o fracție pozitivă oarecare. Presupunem, că $\frac{a}{b}$ este scris în formă ireductibilă, deci că numerele naturale a și b sînt prime între ele. E evident, că această condiție nu restrînge generalitatea considerațiilor noastre. Aplicăm pentru a și b algoritmul lui Euclid. Deoarece resturile care intervin formează un șir descrescător, acest procedeu se termină după un număr finit, de ex. după $n+1$ ori: $a = bq + r$ unde $r < b$; $b = rq_1 + r_1$, unde $r_1 < r$; $r = r_1q_2 + r_2$ unde $r_2 < r_1$; ...; $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ unde $r_{n-1} < r_{n-2}$; $r_{n-2} = r_{n-1}q_n$. De aici se obține:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}}; \quad \frac{b}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r} = q_1 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}};$$

$$\frac{r}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \cdot \cdot \cdot;$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}; \quad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n.$$

Se obține prin înlocuiri succesive:

$$x = \frac{a}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}}} = \ldots = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{q_n}}} \tag{1}$$

Zicem că am dezvoltat fracția $x = \frac{a}{b}$ în fracție continuă, fracția din membrul drept al egalității se numește *fracție continuă finită* și se notează astfel :

$$x = [q, q_1, q_2, \ldots, q_n]. \qquad (1')$$

Aici q este un număr natural (dacă $a > b$) sau 0 (dacă $a < b$). celelalte „elemente" $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ale fracției continue sînt *numere naturale*)*.

De exemplu dezvoltarea în fracție continuă a lui $x = \frac{5}{3}$ se face în felul următor :

$$x = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [1, 1, 2].$$

Să considerăm acum fracția continuă (1). Aceasta se poate scrie după efectuarea operațiilor indicate în formă de fracție ordinară. De exemplu :

$$[1, 1, 2] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Dacă $x = [q]$ se consideră ca „dezvoltare" în fracție continuă a numărului întreg $q \geqslant 0$ și dacă se ia în considerare, cazul cînd x e negativ, atunci $x = -(-x)$, unde $-x$ e pozitiv, atunci pe baza celor de mai sus se poate formula următoarea propoziție : *orice număr rațional se poate reprezenta în forma unei fracții continue finite și invers orice fracție continuă finită reprezintă un număr rațional.*

Aici avem ocazia de a face o comparație între dezvoltarea în fracție continuă și între dezvoltarea în fracție zecimală a numerelor raționale. Se știe că în cazul fracțiilor zecimale nu avem o propoziție similară celei de mai sus : există numere raționale care nu se pot reprezenta prin fracții zecimale finite. Pe de altă parte, fracțiile zecimale sînt în relație cu numerele raționale $x = \frac{a}{b}$ prin intermediul numărului 10 (baza sistemului actual de numerotație), ales arbitrar. Amîndouă observațiile se pronunță în favoarea dezvoltării în fracție continuă a numerelor. În schimb operațiile se fac foarte ușor cu fracții zecimale, ceea ce reprezintă un avantaj practic al dezvoltății numerelor în fracție zecimală.

---

*) Fracțiile continue se pot defini și într-o formă mai generală și în acest caz fracțiile continue definite de noi se zic regulate. Probleme, care în felul de scriere actual, ne conduc la fracții continue se găsesc și în scrierile din antichitate (de. ex. la Euclid). Începutul propriu-zis al teoriei fracțiilor continue se pune la secolul XVI, la data de apariție a unei opere a matematicianului italain Bombelli. Cititorul, care dorește să aprofundeze teoria fracțiilor continue, poate să consulte cărțile : A. I. Hincin — Fracții continue, Edit. Tehnică, București. 1960 și G. Sudan — Geometrizarea fracțiilor continue, Edit. Tehnică, București, 1960.

2. *Reduse. Redusele* fracției continue $x = [q, q_1, q_2, \ldots, q_n]$ sînt definite ca și fracțiile continue

$$R_0 = [q],\ R_1 = [q, q_1],\ R_2 = [q, q_1, q_2],\ \ldots,\ R_n = [q, q_1, \ldots, q_n] = x. \quad (2)$$

De ex. redusele fracției continue [1, 1, 2] sînt următoarele:

$$R_0 = [1] = 1,\ R_1 = [1, 1] = \frac{2}{1} = 2,\ R_2 = [1, 1, 2] = \frac{5}{3}.$$

Pentru a studia redusele, e util să se atașeze fracției continue $x = [q, q_1, q_2, \ldots, q_n]$ șirurile

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \quad \text{și} \quad b_0, b_1, b_2, \ldots b_n \quad (3)$$

definite în felul următor:

$$\begin{aligned} &a_0 = q, && b_0 = 1, \\ &a_1 = a_0 q + 1, && b_1 = q_1, \\ &\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots \\ &a_{i+1} = a_i q_{i+1} + a_{i-1}, && b_{i+1} = b_i q_{i+1} + b_{i-1}, \\ &(i=1, 2, \ldots, n-1), && (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned} \quad (4)$$

De ex. în cazul lui [1, 1, 2] avem: $a_0 = 1$, $a_1 = 1.1 + 1 = 2$, $a_2 = 2.2 + 1 = 5$ și $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1.2 + 1 = 3$.

Termenii șirurilor (3) verifică următoarele relații importante:

$$a_{i+1} b_i - a_i b_{i+1} = (-1)^i,\ (i = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (5)$$

Demonstrăm propoziția prin inducție completă. Relația (5) e valabilă în cazul $i = 0$:

$$a_1 b_0 - a_0 b_1 = (a_0 q_1 + 1) \cdot 1 - a_0 q_1 = 1 - (-1)^0.$$

Să presupunem valabilitatea relației (5) pentru $i = k$:

$$a_{k+1} b_k - a_k b_{k+1} = (-1)^k$$

și fie $i = k + 1$. Avînd în vedere relațiile (4) și egalitatea, care reprezintă ipoteza inducției, avem

$$\begin{aligned} a_{k+2} b_{k+1} - a_{k+1} b_{k+2} &= (a_{k+1} q_{k+2} + a_k) b_{k+1} - a_{k+1} (b_{k+1} q_{k+2} + b_k) = \\ &= a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k = -(a_{k+1} b_k - a_k b_{k+1}) = (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Relația este deci valabilă și în cazulu $i = k + 1$ și astfel teorema e demonstrată.

Demonstrăm acum, că *termenii* a_i *și* b_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *ai* șirurilor (3) sînt tocmai numărătorii și numitorii reduselor R_i:

$$R_i = \frac{a_i}{b_i}\ (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Demostrația se face prin inducție completă. Avînd în vedere egalitățile (2) și (4), rezultă imediat valabilitatea propoziției pentru $i = 0$ și $i = 1$:

$$R_0 = q = \frac{q}{1} = \frac{a_0}{b_0} \quad \text{și} \quad R_1 = q + \frac{1}{q_1} = \frac{q q_1 + 1}{q_1} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Să presupunem acum că $R_k = \frac{a_k}{b_k}$, deci că teorema e adevărată pentru $i = k$ și fie $i = k + 1$. Rezultă din (2), că dacă se înlocuiește în R_k elementul q_k cu $q_k = \frac{1}{q_{k+1}}$, atunci se obține chiar R_{k+1}. Deoarece conform ipotezei inducției și a relațiilor (4) avem

$$R_k = \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_{k-1}q_k + a_{k-2}}{b_{k-1}q_k + b_{k-2}},$$

rezultă

$$R_{k+1} = \frac{a_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) + a_{k-2}}{b_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) + b_{k-2}} = \frac{(a_{k-1}q_k + a_{k-2})q_{k+1} + a_{k-1}}{(b_{k-1}q_k + b_{k-2})q_{k+1} + b_{k-1}} = \tag{6}$$

$$= \frac{a_k q_{k+1} + a_{k-1}}{b_k q_{k+1} + b_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}.$$

Am dedus deci că propoziția e adevărată și în cazul $i = k + 1$ și astfel teorema e demonstrată.

Rezultă din relațiile (5) și (6), că *redusele* R_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *sînt fracții ireductibile.* Pentre a arăta acest fapt, trebuie să demonstrăm, că

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{7}$$

unde s-a notat cu (a_i, b_i) c.m.m.d.c. al numerelor a_i și b_i. Într-adevăr fie d_i un divizor comun oarecare al numerelor a_i și b_i. Acesta e un divizor al numărului din membrul stîng al egalității (5), deci el divide și pe $(-1)^i$. Rezultă că $d_i = \pm 1$, deci și egalitatea (7).

Ținînd seamă de relațiile (4), numărătorii a_i și numitorii b_i ai reduselor R_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ se pot calcula rapid după următoarea *schemă:*

			q	q_1	q_2	$\cdots$
a	0	1	$q \cdot 1 + 0 = q = a_0$	$q_1 \cdot a_0 + 1 = a_1$	$q_2 \cdot a_1 + a_0 = a_2$	$\cdots$
b	1	0	$q \cdot 0 + 1 = 1 = b_0$	$q_1 \cdot b_0 + 0 = b_1$	$q_2 \cdot b_1 + b_0 = b_2$	$\cdots$

În coloanele indicate de q_i $(i = 0, 1, \ldots)$ se află numărătorii a_i și numitorii b_i ai reduselor și fiecare a_i și b_i se află în felul următor: se înmulțesc cu q_i numerele aflate în coloana precedentă, indicată de q_{i-1} și se adună la acest produs numerele din coloana indicată de q_{i-2}. Deoarece $R_n = x$, se folosește această schemă și pentru scrierea

unei fracții continue în formă de fracție ordinară. Să aplicăm acest procedeu în cazul fracției continue $x = [0, 2, 1, 3, 1, 2]$:

			0	2	1	3	1	2
a	0	1	0	1	1	4	5	14
b	1	0	1	2	3	11	14	39

Deci

$$R_0 = \frac{0}{1} = 0,\ R_1 = \frac{1}{2},\ R_2 = \frac{1}{3},\ R_3 = \frac{4}{11},\ R_4 = \frac{5}{14},\ R_5 = \frac{14}{39} = x.$$

Observație. La schema de mai sus s-au introdus în primele coloane numerele 0 și 1 respectiv 1 și 0. Acest fapt e echivalent cu introducerea a două reduse fictive $R_{-1} = \frac{1}{0}$ și $R_{-2} = \frac{0}{1}$ și are scopul de a asigura valabilitatea formulelor recursive (4) și în cazul lui a_1 și a_0 respectiv și în cazul lui b_1 și b_0.

3. *Cîteva proprietăți ale reduselor.* Vom putea trage cîteva concluzii interesante asupra reduselor, calculînd diferența a doi termeni, care au indici de aceeași paritate consecutivi. Vrem să calculăm deci diferențele $R_{i+1} - R_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Vom deduce prealabil o relație simplă. Se scrie conform relațiilor (5) :

$$a_{i+1} = a_i q_{i+1} + a_{i-1};\ b_{i+1} = b_i q_{i+1} + b_{i-1},\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dacă înmulțim prima egalitate cu b_{i-1}, iar a doua cu a_{i-1} și după aceea formăm diferența celor două egalități, atunci — avînd în vedere și relația (5) — obținem :

$$a_{i+1}b_{i-1} - a_{i-1}b_{i-1} = (a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_i)q_{i+1} = (-1)^{i-1}q_{i+1},\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

De aici se obține prin împărțire cu $b_{i-1}b_{i+1}$:

$$R_{i+1} - R_{i-1} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} - \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{a_{i+1}b_{i-1} - a_{i-1}b_{i+1}}{b_{i-1}b_{i+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{i-1}q_{i+1}}{b_{i-1}b_{i+1}},\ (i = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (8)$$

Deoarece $q_{i+1} > 0$, $b_{i-1} > 0$, $b_{i+1} > 0$, rezultă că $R_{i+1} - R_{i-1}$ e pozitiv dacă i e impar (în acest caz $(-1)^{i-1} = 1$) și e negativ dacă i e par (în acest caz $(-1)^{i-1} = -1$). Dar dacă i e impar, atunci $R_{i+1} - R_{i-1}$ reprezintă diferența a doi termeni cu indici pari consecutivi, iar dacă i e par, atunci $R_{i+1} - R_{i-1}$ reprezintă diferența a doi termeni cu indici impari consecutivi. Deci :

Redusele cu indici pari consecutivi formează un șir crescător, iar redusele cu indici impari consecutivi formează un șir descrescător.

Completăm acest rezultat, calculuînd diferența unei reduse oarecare — diferită de $R_n = x$ — și a lui x. În acest scop scriem pe $x = [q, q_1, \ldots, q_n]$ într-o altă formă. Avînd în vedere relațiile (6) și (4), obținem:

$$R_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i q_{i+1} + a_{i-1}}{b_i q_{i+1} + b_{i-1}}.$$

Dacă în această egalitate se înlocuiește q_{i+1} cu $x_{i+1} = [q_{i+1}, \ldots, q_n]$, atunci se obține evident chiar x:

$$x = \frac{a_i x_{i+1} + a_{i-1}}{b_i x_{i+1} + b_{i-1}}. \tag{9}$$

Folosindu-ne de această egalitate și de egalitatea (5), avem:

$$R_i - x = \frac{a_i}{b_i} - \frac{a_i x_{i+1} + a_{i-1}}{b_i x_{i+1} + b_{i-1}} = \frac{a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i}{b_i (b_i x_{i+1} + b_{i-1})} = \frac{(-1)^{i-1}}{b_i (b_i x_{i+1} + b_{i-1})}. \tag{10}$$

Deoarece $b_i (b_i x_{i+1} + b_{i-1}) > 0$, rezultă din egalitatea obținută, că diferența $R_i - x$ e negativă dacă i e par și e pozitivă dacă i e impar. Deci, dacă denumirea de redusă se întrebuințează numai pentru reduse diferite de $R_n = x$, atunci se poate enunța următoarea propoziție:

Reduse cu indici pari sînt mai mici, iar reduse cu indici impari sînt mai mari decît numărul x, dat de fracția continuă respectivă.

Din cele două propoziții precedente rezultă imediat următoarea:

Fiecare redusă cu indice impar e mai mare decît reduse următoare cu indici pari, iar numerele $R_1 - R_0$, $R_3 - R_2$, $R_5 - R_4, \ldots$ *formează un șir descrescător.*

Ilustrăm rezultatele obținute în cazul fracției continue $x = [0, 2, 1, 3, 1, 2]$, a cărei reduse au fost deja calculate în §2:

$$R_0 = 0,\ R_2 = \frac{1}{3},\ R_4 = \frac{5}{14} \text{ și } R_1 = \frac{1}{2},\ R_3 = \frac{4}{11},\ R_5 = \frac{14}{39} = x.$$

Se poate constata, că avem:

$$R_0 < R_2 < R_4 < x = R_5 < R_3 < R_1.$$

Vom obține o imagine și mai clară despre situația reduselor diferite de $R_n = x$ față de x, dacă comparăm distanțele punctelor corespunzătoare reduselor de punctul corespunzător lui x. Vom compara deci valorile $|R_{i-1} - x|$ și $|R_i - x|$. Prealabil demonstrăm următoarea proprietate, care prezintă un interes și în ea însăși: *numitorii reduselor* $R_0, R_1, \ldots, R_n$ *formează un șir nedescrescător, începînd de la termenul doi șirul e crescător:*

$$b_0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_n. \tag{11}$$

Într-adevăr, conform relațiilor (4) avem $b_0 = 1, b_1 = q_1$ unde q_1 e nu număr natural. Deci $b_0 \leqslant b_1$. Avînd în vedere relațiile (4) și faptul, că b_{i-2} și q_i sînt numere naturale, rezultă pentru orice număr i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ următoarea inegalitate:

$$b_i = b_{i-1} q_i + b_{i-2} > b_{i-1} q_i \geqslant b_{i-1}.$$

Deci într-adevăr subzistă inegalități (11).

Trecem la rezolvarea problemei propuse. Conform lui (10) avem:

$$|R_i - x| = \frac{1}{b_i(b_i x_{i+1} + b_{i-1})}.$$

Pentru a compara valorile $|R_i - x|$ și $|R_{i-1} - x|$ vom exprima pe $|R_{i-1} - x|$ în funcție de $x_{i+1} = [q_{i+1}, \ldots, q_n]$. Se obține pe baza relațiilor (6), (9) și (5), următoarea egalitate:

$$x - R_i = \frac{a_i x_{i+1} + a_{i-1}}{b_i x_{i+1} + b_{i-1}} - \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{(a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i) x_{i+1}}{b_{i-1}(b_i x_{i+1} + b_{i-1})} =$$
$$= \frac{(-1)^{i-1} x_{i+1}}{b_{i-1}(b_i x_{i+1} + b_{i-1})}.$$

Deci

$$|x - R_{i-1}| = \frac{x_{i+1}}{b_{i-1}(b_i x_{i+1} + b_{i-1})}.$$

Deoarece $x_{i+1} \geqslant q_{i+1} \geqslant 1$ și conform lui (11) avem $b_{i-2} < b_i$, rezultă, că

$$|x - R_{i-1}| = \frac{x_{i+1}}{b_{i-1}(b_i x_{i+1} + b_{i-1})} > \frac{1}{b_i(b_i x_{i+1} + b_{i-1})} = |x - R_i|.$$

Deci:

Redusele consecutive aproximează din ce în ce mai bine numărul x determinat de fracția continuă respectivă.

Recomandăm cititorului să veriifce această proprietate în cazul exemplului dat mai înainte.

Se poate aprecia ușor în ce măsură aproximează redusele numărul considerat x. Într-adevăr, deoarece punctul corespunzător lui x e situat între punctele corespunzătoare lui R_i și R_{i+1} avem evident inegalitatea $|R_i - x| < |R_i - R_{i+1}|$. Dar folosind egalitățile (6) și (5), deducem:

$$R_i - R_{i+1} = \frac{a_i}{b_i} - \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = -\frac{a_{i+1} b_i - a_i b_{i+1}}{b_i b_{i+1}} = -\frac{(-1)^i}{b_i b_{i+1}} = \frac{(-1)^{i+1}}{b_i b_{i+1}}. \quad (13)$$

Deci:

$$|R_i - x| < |R_i - R_{i+1}| = \frac{1}{b_i b_{i+1}}. \quad (14)$$

Dacă înlocuim în membrul drept al acestei inegalități pe b_{i+1} cu b_i, atunci ținînd seamă de faptul, că $b_i \leqslant b_{i-1}$ (vezi (11)), atunci valoarea fracției nu se micșorează, deci rezultă din inegalitatea (14) și următoarea

$$|R_i - x| < \frac{1}{b_i^2}. \quad (15)$$

Inegalitatea (15) și cu atît mai mult inegalitatea (14) ne arată că redusele aproximează foarte bine numărul x, caracterizat de fracția continuă respectivă.

Însfîrșit enunțăm următoarea teoremă:

Redusele R_i ale fracției continue determinată de numărul x constitue „cele mai bune aproximări" ale numărului x, în sensul următor. nu există fracție $\frac{\alpha}{\beta}$ cu numitor mai mic, decît numitorul redusei $R_i = \frac{a_i}{b_i}$ care să aproximeze mai bine pe x decît redusa R_i.

Demonstrația acestei teoreme se folosește de proprietățile reduselor. deduse mai sus. Noi o omitem pentru economie de spațiu*).

4. *Fracții continue infinite.* Fie x un număr irațional (pozitiv). Notăm cu q numărul întreg pozitiv sau pe 0, determinat de inegalitățile $q < x < q + 1$ (q este deci cel mai mare întreg conținut în x). Formăm diferența $x - q = r$ și după aceea considerăm valoarea $\frac{1}{r} = x_1$ a lui r. Avem:

$$x = q + r = q + \frac{1}{\frac{1}{r}} = q + \frac{1}{x_1}.$$

Deoarece r e irațional și $r < 1$, rezultă că și x_1 e un număr irațional și $x_1 > 1$. Se poate deci proceda în cazul lui x_1 la fel ca și în cazul lui x. Determinăm deci un număr întreg pozitiv q_1 astfel ca să avem $q_1 < x_1 < q_1 + 1$ ($q_1 \geqslant 1$, deoarece $x_1 > 1$), formăm diferența $x_1 - q_1 = r_1$ și după aceea considerăm valoarea $\frac{1}{r_1} = x_2$ a lui r_1. Avem:

$$x_1 = q_1 + r_1 = q_1 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = q_1 + \frac{1}{x_2},$$

deci avînd în vedere și egalitatea de mai sus:

$$x = q + \frac{1}{x_1} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{x_2}}.$$

Deoarece r_1 e irațional și $r_1 < 1$, rezultă că x_2 e tot un număr irațional și $x_2 > 1$. Deci procedeul de mai sus se aplică și pentru x_2 și așa mai departe. Sîntem conduși astfel la o expresie de forma

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \ddots}}}} = [q, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots], \qquad (16)$$

unde q este un număr natural sau 0, iar numerele $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *sînt numere naturale.* O astfel de expresie se numește fracție continuă infinită.

---

* M. Nicolescu. Analiză matematică pag. 301—317.

Putem observa, că procedeul de mai sus nu e altceva, decît algoritmul lui Euclid, aplicat numărului irațional x. Deci:

Algoritmul lui Euclid, aplicat unui număr irațional, ne conduce la o fracție continuă infinită.

Observăm că în membrul stîng al egalității (16) am scris x, acest lucru însă cere o explicație. Într-adevăr: în membrul drept al egalității intervin operații în număr infinit, deci nu e un lucru evident, că fracția continuă infinită $[q, q_1, \ldots, q_n, \ldots]$ determină un număr și chiar numărul considerat. Acest lucru trebuie demonstrat. Pentru a ne exprima precis, dăm următoarea definiție:

Fracția continuă infinită $[q, q_1, \ldots, q_n, \ldots]$ se zice că e *convergentă*, dacă șirul reduselor $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ e convergent. În caz de convergență, limita șirului reduselor se numește *valoarea* fracției continue infinite.

Observație. Noțiunea de redusă se definește ca și în cazul fracțiilor continue finite. Se poate vedea ușor, că *toate propozițiile demonstrate în §-le 2 și 3, în care nu figurează numărul, determinat de fracția continuă considerată, sînt valabile pentru orice fracție continuă infinită, iar exclusiv toate sînt valabile pentru fracții continue infinite convergente.*

De fapt am avut o precauție prea mare în formularea propoziției de mai sus, deoarece avem următoarea teoremă importantă:

Fracția continuă infinită $[q, q_1, \ldots, q_n, \ldots]$ este convergentă, avînd valoarea x, unde x e numărul irațional din care provine, prin aplicarea algoritmului lui Euclid, fracția continuă considerată.

Pentru a demonstra teorema, vom forma din elementele șirului reduselor

$$R_0, R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{2k}, R_{2k+1}, \ldots \tag{17}$$

două șiruri; șirul termenilor cu indici pari și șirul termenilor cu indici impari

$$R_0, R_2, \ldots, R_{2k}, \ldots \quad \text{și} \quad R_1, R_3, \ldots, R_{2k+1}, \ldots \tag{18'—18''}$$

Pe baza primei propoziții demonstrată în §3, se poate constata că șirul (18') este (monoton) crescător, iar șirul (18'') este (monoton) descrescător. Deoarece fiecare redusă cu indice impar este mai mare decît redusele următoare cu indici pari, rezultă că șirul (18') este și mărginit superior (de ex. R_1 este o margine superioară) iar șirul (18'') este și mărginit inferior (de ex. R_0 e o margine inferioară). Rezultă că șirurile (18') și (18'') sînt convergente. Pentru a arăta deci că șirul (17) este convergent este suficient să se demonstreze că șirurile (18') și (18'') au o limită comună, deci că avem:

$$\lim_{l \to \infty} | R_{l+1} - R_l | = 0. \tag{19}$$

Împărțind (5) cu $b_l b_{l+1}$ și ținînd seamă de (6), se obține:

$$| R_{l+1} - R_l | = \frac{1}{b_l b_{l+1}}.$$

Deci pentru a arăta valabilitatea afirmației (19) este suficient să se arate că

$$\lim_{i \to \infty} b_i b_{i+1} = \infty. \qquad (20)$$

Însă conform lui (11), avem $b_i < b_{i+1}$, deci $b_i^2 < b_i b_{i+1}$. Rezultă că, dacă

$$\lim_{i \to \infty} b_i^2 = \infty, \qquad (21)$$

atunci subzistă și (20). Aceasta din urmă însă este valabilă, deoarece numerele b_i sînt întregi și formează un șir strict crescător începînd cu al doilea termen (vezi propoziția a patra din §3).

Avînd în vedere că s-a dovedit convergența fracției continue considerate, se poate folosi pe baza observației făcute mai sus inegalitatea (15), de unde rezultă pe baza lui (21), că $\lim_{i \to \infty} R_i = x$ deci și a doua parte a afirmației noastre.

Considerațiile de mai sus asigură *o corespondență biunivocă între numerele iraționale și fracțiile continue infinite.*

În sfîrșit, dăm un exemplu pentru dezvoltarea în fracție continuă a unui număr irațional. Fie $x = \sqrt{2}$. Avem: $\sqrt{2} = 1 + r$ (deci $q = 1$), unde $r = \sqrt{2} - 1$. Rezultă: $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + r_1$ (deci $q_1 = 2$), unde $r_1 = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$. Deoarece $r_1 = r$, vom avea $q_2 = 2$, $q_3 = 2, \ldots$ și deci $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots, 2, \ldots]$.

STROBOSCOPIA

de prof. *D. STADNICOV*, Buzău

Stroboscopia este o metodă de cercetare a mișcării periodice, permițînd în același timp observarea corpurilor chiar în timpul mișcării lor, tot așa de bine ca și cînd ar fi în repaus. Datorită eficacității sale, principiul metodei stroboscopice s-a putut extinde și la studiul variației periodice a altor mărimi, ca de exemplu a variației tensiunii, generate de un dinam sau alternator.

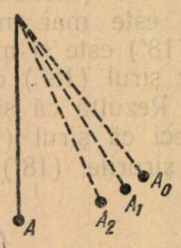


Fig. 1.

Principiu. Să ne închipuim un pendul (OA, fig. 1), ce oscilează într-o cameră unde e făcut întuneric, însă unde avem și un dispozitiv cu care să putem lumina pendulul, scurt și la intervale voite.

Să luminăm pendulul, o clipă, — îl vom vedea într-o poziție oarecare OA_0. Dacă-l vom lumina scurt după un interval de timp T, care e perioada de oscilație, îl vom surprinde exact în aceeași poziție OA_0, în aceeași fază de mișcare, iar repetînd mereu iluminarea pendulului din T în T secunde, îl vom vedea „înghețat" în această poziție. Oricît de mare ar fi frecvența oscilațiilor unui corp, lucrurile se petrec la fel: putem să observăm imobilizată o ramură a unui diapazon care sună, o

coardă, baza unui clopot etc., într-o fază de mișcare care ne interesează; trebuie doar păstrată riguros frecvența iluminărilor egală cu aceea a oscilațiilor de studiat, iar durata unei iluminări să fie suficient de mică.

Același procedeu îl vom folosi și în cazul unui corp în mișcare de rotație, deoarece și aici pozițiile succesive ale corpului se repetă întocmai, la intervale de timp T. În cazul oscilațiilor, respectiv a rotației cu frecvență mai mare de 10 Hz, noi nici nu vom observa întreruperile luminii; iluzia opririi mișcării va fi deplină, deoarece senzația vizuală, după cum știm, persistă cel puțin o zecime de secundă, și fiecare imagine nou formată pe retină continuă astfel pe cea precedentă.

Evident, un efect stroboscopic identic îl vom obține și dacă luminăm la intervale kT, k fiind un număr întreg. Un aspect interesant și folositor în aplicații capătă efectul stroboscopic cînd frecvența iluminărilor o facem de un număr întreg de ori mai mic (perioada devine $\frac{T}{k}$). Examinînd, de exemplu, oscilațiile unei coarde sonore cu iluminarea la intervale $\frac{T}{2}$, vom vedea simultan stabilizate două faze opuse (v. experiența).

Ce se petrece însă cînd iluminarea se face cu intervale care diferă puțin de perioada T a mișcării, de exemplu, cînd intervalul este:

$$T' = T + \frac{T}{n}. \qquad (1)$$

Să ne întoarcem la figura 1. Dacă OA_0 este poziția văzută de mine inițial, iluminarea următoare întîrziind cu $\frac{T}{n}$ s, ochiul va surprinde pendulul după ce acesta va fi făcut o oscilație completă, plus o deplasare corepunzătoare celor $\frac{T}{n}$ s, adică în poziția OA_1; la iluminarea următoare, — în poziția OA_2, ș.a.m.d. Întreaga oscilație va fi deci prezentată ochiului ca o succesiune de n faze consecutive, luate fiecare din cîte o oscilație reală. Voi avea și aici impresia de continuitate, ca la vizionarea unui film, dacă intervalele de iluminare nu depășesc 0,1 secunde. Nu e greu să stabilim că perioada cu care se desfășoară în fața ochiului oscilația vizionată este:

$$T_1 = n\left(T + \frac{T}{n}\right) = (n + 1)\,T. \qquad (2)$$

Expresia arată că, odată cu creșterea lui n (adică odată cu micșorarea diferenței $\frac{T}{n}$ dintre perioada oscilației studiate și intervalele de iluminare), crește și perioada de desfășurare stroboscopică a fenomenului periodic: vizionez oscilația *încetinit*.

Avînd la îndemînă un dispozitiv de iluminare care să permită variația duratei pauzelor între impulsuri luminoase, avem posibilitatea să observăm mișcarea periodică încetinită oricît de mult.

Dacă intervalul dintre impulsuri este mai mic decît perioada mișcării reale, fenomenul se va desfășura în sens invers, și cu perioada :

$$T_1 = n\left(T - \frac{T}{n}\right) = (n - 1)\,T.$$

Observarea stroboscopică a roților dințate, și în general, a corpurilor cu simetrie multiplă în raport cu axa de rotație prezintă particularitatea că, efectul de oprire aparentă, ori de mișcare încentinită (într-un sens sau altul), se obține și la iluminări cu intervale mai mici, și anume :

$$T' = \frac{k\,T}{p}, \quad \text{respectiv,} \quad T' = \frac{k\,T}{p} \pm \frac{T}{p\,n},$$

unde p este ordinul de simetrie. Într-adevăr, dacă în momentele iluminării dinții unei roți se află deplasați exact cu un pas (doi, trei) de angrenare, ochiul nu sesizează nici o schimbare ; roata pare imobilă. Cine nu a remarcat, vizionînd o proiecție cinematografică, efectul stroboscopic, cînd se pare că roțile unei trăsuri în mers stau pe loc, se învîrtesc prea încet sau în sens invers ? Cauza (bănuiți, desigur) stă în faptul că instantaneele fotografice din film, care aici echivalează cu aspectele corpului în momentele iluminării, sînt luate (din întîmplare) la intervale care îndeplinesc condițiile de mai sus.

Metoda stroboscopică este utilizată în cele mai variate domenii, atît în laborator, cît și în uzină ; de varietatea utilizării ei ne putem face o ideie din exemplele de mai jos.

Stroboscopia permite atît controlul cît și măsurarea foarte precisă și comodă a turațiilor la mașini industriale. Potrivind frecvența impulsurilor luminoase pînă la imobilizarea imaginii stroboscopice, din frecvența impulsurilor deducem turația.

La o turație mare corpurile suferă, sub acțiunea diferitelor forțe, deformări importante, și stroboscopia vine în ajutorul tehnicienilor pentru studiul experimental al acestora ; așa, de exemplu, paletele elicei de avion se îndoaie în timpul funcționării, și mai execută și diferite tipuri de vibrații. Sincronizînd dispozitivul de iluminare cu turația elicei, mișcarea de rotație „dispare" pentru observator, și în felul acesta devin observabile și chiar măsurabile (tot stroboscopic) celelalte mișcări ale ei.

Avînd nevoie de a observa aspectul coardelor vocale chiar în timpul producerii sunetului, medicul poate recurge cu succes la dispozitivul stroboscopic care înlătură pentru observator oscilația fundamentală și face observabile coardele vocale în condiții mai potrivite.

În sfîrșit, folosind dispozitivul stroboscopic ca încetinitor al mișcării oscilatorii, putem să ne dăm seama mai ușor și mai clar, de multe din fenomenele pe care le studiem la școală, ca de exemplu, mișcarea ondulatorie. Experiențele pe care le descriem mai jos, ușor de efectuat, au acest scop. Realizați-le într-o ședință de cerc de fizică, explicînd, discutînd și mai ales imaginînd variante noi la ele.

Din cele mai sus ne dăm seama, desigur, că inima dispozitivelor în toate experiențele de stroboscopie este sursa de lumină, care trebuie să dea impulsuri scurte și la intervale egale. La dispoziția noastră în această privință sînt două soluții. Cea mai simplă este folosirea unui bec cu

neon. Tuburile cu neon au mai multe întrebuințări; se folosesc, de exemplu, ca indicatoare de tensiune de înaltă frecvență în radiotehnică; ca indicatoare de polaritate și chiar ca becuri-veilleuse. Funcționarea lor se bazează pe conductibilitatea gazelor rărite. Cei doi electrozi pot avea forma de discuri, de tije, de două spirale întrepătrunse etc. Cînd tensiunea dintre electrozi atinge o anumită valoare, numită tensiunea de aprindere, tubul începe să conducă curentul, iar trecerea curentului e însoțită de o luminiscență de culoare roșiatică-portocalie, care crește în itnensitate odată cu tensiunea aplicată. Dacă tensiunea se micșorează pînă la o anumită valoare (numită tensiunea de stingere), care e ceva mai mică decît tensiunea de aprindere, tubul se stinge. Întrebuințînd o tensiune alternativă, vom avea tubul aprins numai cît timp tensiunea se află în limitele pomenite, adică timpul corespunzător vîrfurilor de sus și de jos ale sinusoidei tensiunilor. Frecvența curentului de la rețeaua de iluminat poate fi socotită constantă, așa că și frecvența impulsurilor luminoase pe care le va da tubul (100 pe secundă) este constantă și convine pentru unele din experiențele noastre. Pentru a amenaja tubul e nevoie să-l legăm totdeauna în serie cu o rezistență care să limiteze curentul la cîțiva miliamperi. În lipsa becului cu neon putem întrebuința tuburi de reclamă luminoasă, însă vom avea inconvenientul de a trebui să manevrăm tensiuni ridicate. Deci, atenție!

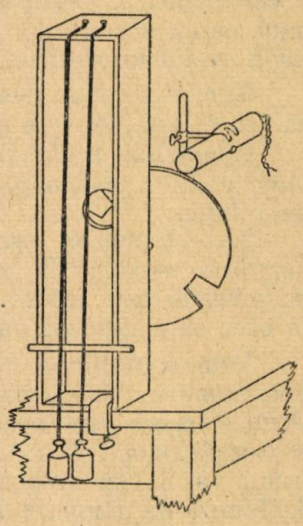


Fig. 2.

O altă soluție constă în întrebuințarea luminii dirijate, de la un bec obișnuit, pe care o oprim periodic cu ajutorul unui paravan obturator. Un mic motor electric, de preferință *sincron* (de la un gramofon electric convine perfect!) învîrtește un disc de carton, la marginea căruia s-au făcut o deschidere — două (eventual mai multe, — după frecvența iluminărilor de care avem nevoie, ținînd seamă și de turația motorului), iar în fața ei se așază sursa (v. fig. 2). Montarea discului pe axa motorului se poate face prin intermediul unei piese de lemn care se îmbracă pe ax și se fixează mai strîns cu un șurub lateral. Partea mai migăloasă în această soluție o constituie găsirea numărului potrivit de deschideri pe disc. După un calcul prealabil de frecvență necesară a iluminărilor, vom fi nevoiți să confecționăm o colecție de discuri care să dea frecvențele în jurul celei calculate.

Experiențe. 1. — Să verificăm turația discului de gramofon prin metoda stroboscopică. Calitatea sunetelor redate de discuri depinde într-o măsură mare de constanța turației. Fabricile de discuri chiar indică pe eticheta lor turația necesară pentru o redare corectă. Ne propunem să controlăm turația pentru discurile standard, de 78 rot/min. Vom așeza să se învîrtească pe platanul port-disc al gramofonului un desen de roată dințată și-l vom lumina în acest timp cu un bec cu neon. Știm că becul se aprinde de 100 de ori pe secundă, așa că, pentru a obține efectul stroboscopic de imobilitate, vom potrivi numărul de dinți așa ca în intervalul

de timp de la o aprindere la alta, adică într-o sutime de secundă roata dințată să facă exact un pas: turația fiind 78 rot/min. = 1,3 rot/s, roata va trebui să facă 1,3 : 100 = 1 : 77 rotații ceea ce înseamnă că trebuie să aibe 77 dinți. Desenul de roată dințată îl vom face, bineînțeles, schematic; desenăm îngrijit, pe hîrtie bună o coroană circulară de diametru exterior 10—15 cm și pe ea trasăm radial 77 linii groase (1,5 — 2 mm) *echidistante*. În centrul figurii mai trasăm un cerc de 8 cm diametru. Decupăm discul, iar în centrul lui practicăm cu ajutorul unui perforator de dopuri un orificiu de 75 mm diametru, orientîndu-le după cerculețul desenat.

Cum e turația, față de cea necesară dacă, la verificare, discul pare că se rotește în sensul invers mișcării platanului?

Cunoscînd frecvența iluminărilor și perioada de rotație a imaginii stroboscopice, calculați cu ajutorul relațiilor (1) și (2) perioada reală de rotație.

2. — Urmărim oscilațiile coardelor sonore încetinind stroboscopic mișcarea, — și verificăm una din legile vibrației lor, de exemplu, perioada de vibrație este invers proporțională cu rădăcina pătrată din tensiunea la care supunem coarda.

Vom confecționa un sonometru — o ladă fără capac (dimensiunile aproximative: 100 × 15 × 15 cm), pe lungimea căreia se întind coarde. Pentru experiențele noastre va trebui să tăiem în mijlocul fundului lăzii și o ferăstruică rotundă, de diametru 6—7 cm. Poziția normală a sonometrului va fi cea verticală. Coardele (două bucăți de sîrmă de oțel sau de bronz, de diametru $D = 0{,}3 — 0{,}4$ mm) se întind cu ajutorul greutăților suspendate la capăt; va trebui să facem posibilă schimbarea expeditivă a acestor greutăți.

Dacă folosim ca sursă de lumină becul cu neon, unde nu putem schimba frecvența aprinderilor, va trebui să calculăm aproximativ (cu formula coardelor sonore) tensiunea necesară pentru a avea frecvența oscilațiilor 100 Hz. Variația fină a frecvenței o vom putea obține mutînd călușul; acesta din urmă se face dintr-o vergea mai groasă de sticlă care se sprijină pe laturile cutiei.

Întrebuințarea celuilalt procedeu de iluminare permite demonstrarea tablourilor stroboscopice, proiectînd umbrele coardelor pe un ecran, și deci vizibil unui auditoriu mai mare.

Dispunerea pieselor se vede din figura 2. Sursa luminează coardele prin ferăstruica tăiată în fundul sonometrului.

Verificăm legea tensiunilor în felul următor: sincronizînd oscilațiile celor două coarde cu iluminările sursei, vom vedea ambele umbre imobile; micșorînd acum forța ce întinde una din coarde de patru ori, imaginea stroboscopică a acesteia se dedublează în două poziții aflate în faze opuse, ceea ce dovedește că perioada oscilațiilor ei a devenit de două ori mai mare.

3. — Putem observa foarte clar mișcarea ondulatorie într-o spirală de oțel (la regimul de unde staționare), dacă privim spirala prin orificiile discului obturator.

4. — Experiențe foarte frumoase vom realiza imobilizînd stroboscopic undele de la suprafața apei. Fenomenul de interferență în cazul a două

centre de oscilații, apropiate; difracția la o deschidere îngustă etc., apar deosebit de clar.

Pentru aceste experiențe va trebui să confecționăm în primul rînd o cuvă plată cu fundul transparent, care în genere este de o utilitate mare în laboratorul școlar; o vom lucra cu grijă, ca să servească un timp mai îndelungat. Luminînd-o de jos cînd e cu apă, lumina va face vizibile pe tavan (sau pe un ecran mai apropiat) cele mai slabe încre-

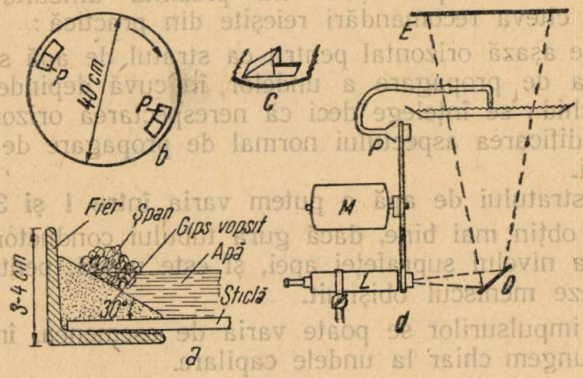


Fig. 3.

țituri ale suprafeței apei. Vom instala cuva între două mese, între două taburete puse pe masă, sau chiar pe unul singur, răsturnat cu picioarele în sus. Între cuvă și suportul ei vom pune patru bucăți de gumă de ras, moale. Acest izolament elastic se face pentru ca trepidațiile motorului să nu se transmită apei din cuvă. Motorul însuși trebuie așezat pe o bucată de postav gros, pîslă etc. Lumina cea mai potrivită este de la un bec cu filament punctiform, cum sînt de exemplu, acelea din aparatele de proiecții cinematografice; arcul electric dă, de asemenea, rezultate frumoase. Pentru confecționarea cuvei, lucrăm o ramă din fier profilat în unghiu drept; dimensiunile ei sînt: 40×50 cm. Rama va încadra un geam mai gros. În lipsa fierului profilat, ea poate fi făcută și din lemn uscat și vopsit de două ori cu o vopsea de ulei. Marginile cuvei se chituiesc cu mastic folosit de obicei la confecționarea acvariilor, sau simplu, cu gips; după ce gipsul se usucă bine, se dă cu vopsea. În figura 3, se vede înclinarea dată marginilor interioare ale cuvei; aceasta, în scopul de a amortiza mișcarea ondulatorie ajunsă aici, și de a împiedeca în felul acesta reflectarea undelor de pereții cuvei. Suprimarea reflexiilor supărătoare se perfectează încă prin așezarea de jur-împrejur, pe panta marginii, a unui sul din „șpan" subțire de fer (în genul celor întrebuințate la răzuit parchetul); acest „tufiș" de la margini sparge complet unda incidentă.

O altă piesă de confecționat este discul obturator, care va avea o construcție deosebită (fig. 3 b și 3 c), întrucît cu ajutorul lui se dau și impulsuri generatoare de unde; frecvența lor e automat aceeași cu frecvența iluminărilor. Aproape de marginile discului se taie două orificii diametral opuse, de 5×10 cm; jumătate din orificiu se acoperă cu cîte un căpăcel cu fundul oblic, la 45° față de planul discului (fig. 3 c).

Datorită acestor suprafețe oblice, în timpul rotației discului aerul este aruncat în gura unei pîlnii fixată în dreptul orificiilor (fig. 3 d), iar micile compresiuni formate sînt conduse printr-un tub de cauciuc terminat cu un tub de sticlă efilat la capăt și îndoit, la suprafața apei ; aici, sub influența acestor compresiuni, se produc unde. Capătul efilat al tubului va avea diametrul de 4—5 mm.

Dispoziția generală a pieselor se vede din schema de principiu (fig. 3). Efectuarea experiențelor nu prezintă dificultăți ; vom ține însă seamă de cîteva recomandări reieșite din practică :

— Cuva se așază orizontal pentru ca stratul de apă să aibă aceeași grosime. Viteza de propagare a undelor în cuvă depinde de grosimea stratului de lichid ; se înțelege deci că nerespectarea orizontalității cuvei va duce la modificarea aspectului normal de propagare de la o margine la alta a cuvei.

Grosimea stratului de apă o putem varia între 1 și 3 cm.

Undele se obțin mai bine, dacă gura tubului conductor de impulsuri se ține exact la nivelul suprafeței apei, și este udată, pentru ca în jurul ei să se formeze meniscul obișnuit.

Frecvența impulsurilor se poate varia de asemenea, în limite foarte largi, și să ajungem chiar la undele capilare.

Pentru a obține două centre de unde care să interfereze, vom confecționa un tub bifurcat, distanța între vîrfuri fiind de 6—8 cm.

Este mai frumos (și mai bine din punct de vedere metodic) ca fenomenul pe care ne-am propus să-l demonstrăm, de exemplu, interferența, să fie prezentat mai întîi în aspectul său dinamic, adică fără imobilizare stroboscopică a undelor, pentru ca apoi să se treacă la stroboscopie. În acest scop lanterna o vom deplasa în afara discului obturator, ca să lumineze fără întreruperi.

NOTE MATEMATICE

DESPRE REPREZENTAREA GRAFICA A FUNCȚIILOR COMPUSE

de *N. O. ZAHARIA*

În studiul funcțiilor, mai ales al celor elementare, joacă adeseori un rol important problema reprezentării grafice, a construirii prin puncte al graficului lor. Pentru aceasta, după cum se știe, se determină : domeniul de existență a funcției date ; punctele în care curba reprezentativă taie axele Ox și Oy ; punctele de maxim și minim, cu ajutorul derivatei întîi ; punctele de inflexiune, cu ajutorul derivatei a doua ; asimptotele.

În această notă vom expune o metodă simplă care ne permite să trasăm prin puncte, graficul unei funcții compuse.

$$y = F(x) = f_2[f_1(n)] \qquad (1)$$

cînd sînt construite (date) graficele funcțiilor : $y = f_1(x)$ și $y = f_2(x)$.

1. Fie (f_1) și (f_2) graficele funcțiilor $f_1(x)$ și $f_2(x)$, (fig. 1). Pentru o valoare $x=x_0$ cuprinsă în intervalul de existență al funcției $f_1(x)$, avem pe axa Ox punctul $M_0(x_0, O)$ și pe curba (f_1) punctul $M[x_0, f_1(x_0)]$.

Pentru a obține pe aceeași ordonată, adică pentru $x=x_0$, punctul corespunzător de pe (F) procedăm astfel: ducem MN paralelă cu Ox punctul N fiind pe prima bisectoare a axelor de coordonate OB, apoi NP și Oy paralele, pînă în punctul P de pe curba (f_2). Fie N_0 intersecția dreptei NP cu Ox. Întrucît avem $ON_0 = N_0N = M_0M = f_1(x)$, rezultă că punctul P de pe curba (f_2) are coordonatele $P[f_1(x_0), f_2(x_0)]$. Ducînd PM paralelă cu Ox, punctul M_1 fiind intersecția dreptelor PM_1 și MM_0, se obține punctul căutat de pe curba (F), graficul funcției compuse (1).

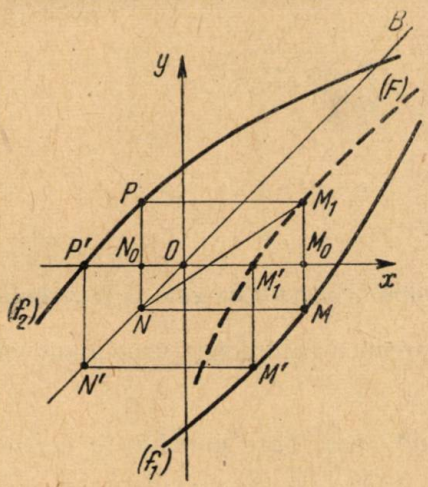


Fig. 1.

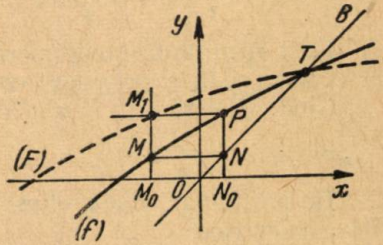


Fig. 2.

Într-adevăr coordonatele lui sînt M_1 $[x_0, f_2(f_1(x_0))]$ și deci el aparține curbei de ecuație $y = f_2[f_1(x)]$.

Prin urmare: *un punct M_1 de pe curba reprezentativă (F) a funcției compuse $F(x)$ se obține dintr-un punct M de pe curba (f_1) prin reflexia dreptunghică $MNPM_1$ în raport cu prima bisectoare a axelor și cu curba (f_2).*

Putem determina un punct M_1 de pe (F) și astfel: Se ia un punct N de pe prima bisectoare a axelor și se construiește dreptunghiul care are ca dimensiuni distanțele MN și NP ale lui N, pe direcțiile Ox și respectiv Oy, la curbele (f_1) și (f_2). Vîrful opus lui N este punctul căutat M_1.

2. In particular, cînd avem

$$f_1(x) = f_2(x) \equiv f(x)$$

funcția compusă este

$$F(x) = f[f(x)]$$

și se numește *iterata* întîia a funcției $f(x)$. Unui punct M de pe curba reprezentativă a funcției inițiale $f(x)$ îi corespunde punctul M_1 de pe graficul iteratei $f[f(x)]$, obținut prin „reflexia" dreptunghică $MNPM_1$, fig. 2, în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate OB.

3. În limbajul geometriei analitice vom spune că, fiind date curbele inițiala de ecuații: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, curba de ecuație $y = F(x) = f_2[f_1(x)]$ este curba „compusă", rezultată din compunerea curbelor inițiale (f_1) și (f_2).

Fie, de exemplu, elipsele concentrice:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ sau } y=f_1(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{2}$$

și

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ sau } y=f_2(x)=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}. \tag{3}$$

Curba comună va fi

$$y=F(x)=\frac{\pm\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2},$$

care conduce la ecuația

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}(b^2-\alpha^2)}-\frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}(b^2-\alpha^2)}=1.$$

Deci rezultanta compunerii a două elipse concentrice este o hiperbolă cu același centru, originea axelor.

Cînd $b^2-\alpha^2=0$, curba compusă se reduce la dreptele concurente în origine $y=\pm\frac{\beta}{a}x$.

În particular, dacă elipsele componente (2), (3) se reduc la cercurile concentrice

$$x^2+y^2=a^2 \text{ și } x^2+y^2=b^2$$

rezultanta compunerii lor este hiperbola echilateră

$$x^2-y^2=a^2-b^2$$

4. În cazul a trei funcții inițiale, componentele $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, — funcția compusă este

$$F_3(x)=f_3\{f_2[f_1(x)]\}.$$

Construcția prin puncte a graficului funcției compuse $F_3(x)$ se poate face în două etape, construindu-se întîi graficul funcției compuse intermediare $F_2(x)=f_2[f_1(x)]$, așa cum s-a arătat mai sus și apoi, prin același procedeu, se construiește graficul funcției compuse $F_3(x)=f_3[F_2(x)]$

Punctul M_1, de pe graficul funcției $F_2(x)$ se obține ca în fig. 3. Apoi se trece de la M_1 de pe (F_2) la M_2 de pe (F_3), M_2 aflîndu-se pe aceeași ordonată ca M de pe graficul funcției $f_1(x)$.

Se vede ușor că se poate evita trecerea prin punctul intermediar M_1. de pe graficul funcției $F_2(x)$.

Această observație ne arată că procedeul de construcție, axată pe prima bisectoare a axelor de coordonate, a punctelor graficului unei funcții compuse este același oricîte funcții inițiale am avea, adică în general pentru funcția compusă.

$$F_n(x)=f_n\{f_{n-1}[\ldots f_2(f_1(x))\ldots]\},$$

cînd se pot, separat, consrui graficele funcțiilor componente $f_1(x)$, $f_2(x)$..... $f_n(x)$.

Se pornește de la un punct M de pe f_1 pe o paralelă la Ox, pînă la bisectoarea (B) ; de la aceasta, pe o paralelă la Oy, pînă la curba (f_2) și apoi se procedează cu punctul obținut pe (f_2) la fel ca pentru punctul M de pe (f_1) etc.

5. În particular, dacă funcțiile componente sînt identice

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) \equiv f(x)$$

funcțile compuse corespunzătoare vor fi *iteratele* succesive ale funcției $f(x)$:

$$F_2(x) = f[f(x)],\ F_3(x) = f\{f[f(x)]\}, \ldots$$

și construcția graficului oricăreia din ele se face, prin puncte, conform celor arătate la punctul 4, prin construcția simplă arătată în fig. 4, unde s-a obținut direct punctul M_3, de pe graficul funcției $F_3(x)$, corespunzător punctului M de pe graficul funcției inițiale $f(x)$.

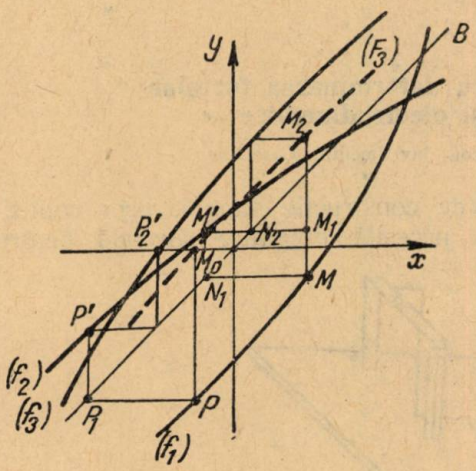


Fig. 3

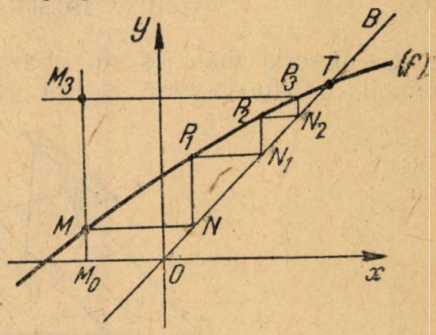


Fig. 4

6. Dintre considerațiile ce se pot face în legătură cu problema pusă în această notă, reținem acum numai pe aceea a aflării, prin calcul, a absciselor punctelor unde graficul unei funcții compuse taie axa Ox. Acestea sînt date de ecuația $F_2(x) = 0$, adică $f_2[f_1(x)] = 0$.

Fie M_1' un punct în care (F_2) taie axa Ox fig. 1. Pentru ca M_1' să fie pe Ox, punctul corespunzător, din reflexia dreptunghiulară P' de pe curba (f_2) trebuie să fie de asemenea pe axa Ox, adică abscisa lui P' trebuie să fie o rădăcină reală a ecuației $f_2(x) = 0$.

În acest caz avem : $M_1'M' = P'N' = OP'$ și întrucît $M_1'M'$ este valoarea funcției $f_1(x)$ pentru rădăcina corespunzătoare a ecuației $F_2(x) = 0$. urmează că :

Dacă $x_i^{(1)}$ sînt rădăcinile reale ale ecuației $f_2(x) = 0$, atunci rădăcinile reale al ecuației $F_2(x) = f_2[f_1(x)] = 0$ sînt date de ecuațiile rezolvate $f_1(x) = x_i^{(1)}$.

În figura 3 se arată cum se obține, prin reflexia dreptunghică repetată, punctul M_0 a cărui abscisă este o rădăcină a ecuației

$$F_3(x) = f_3\{f_2[f_1(x)]\} = 0.$$

În general: Dacă $x_i^{(n-1)}$ sînt rădăcinile reale ale ecuației $f_n(x) = 0$, $x_i^{(n-2)}$ sînt rădăcinile reale ale ecuațiilor $f_{n-1}(x) = x_i^{(n-1)}$ și în general, dacă $x_i^{(k-1)}$, $(k < n)$, sînt rădăcinile reale ale ecuațiilor $f_k(x) = x_i^{(k)}$, iar $x_i^{(1)}$ sînt rădăcinile reale ecuațiilor $f_2(x) = x_i^{(2)}$, atunci rădăcinile reale ale ecuației

$$F_n(x) = f_n\{f_{n-1}[\ldots f_1(x)\ldots]\} = 0$$

sînt date de ecuațiile rezolvante $f_1(x) = x_i^{(1)}$.

SĂ CONSTRUIM PRIN MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

Un aparat simplu pentru determinarea forțelor electromagnetice și electrodinamice.

VONHÁZ JÓZSEF prof. înv. mediu, Carei

Se descrie mai jos un aparat de construcție simplă, ușor confecționabil, cu funcționare sigură (nu necesită pregătire specială pentru

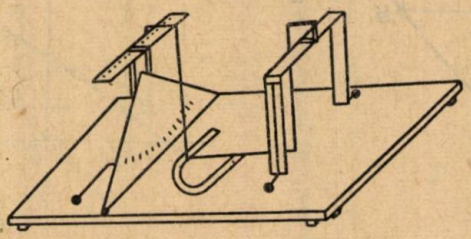


Fig. 1.

experiențe), ușor de manevrat, iar materialul pentru confecționarea lui este ușor procurabil (fig. 1).

Cu acest aparat se determină următoarele:

1. Dependența forței electromagnetice de lungimea conductorului, de intensitatea curentului și de intensitatea cîmpului magnetic

2. Dependența forței electrodinamice, de intensitatea curentului, de lungimea conductorului și de distanța dintre conductori.

Necesarul de materiale:

1. O scîndură de 23 × 25 × 2 cm (se preferă placa aglomerată).
2. 4 buc. plăci de aluminiu sau cupru 8 × 1,5 cm.
3. Cablu de legătură izolat (pe cît posibil din mai multe fire) de 1 m lungime.
4. 4 buc. fișe (eventual cartușe).
5. Un lineal de 86 × 1.5 × 1 cm.
6. O placă de furnir de 12 × 23 cm.
7. Un cablu de aluminiu de 2,5 — 3 mm și 3 m lungime.

8. 2 — 3 buc. asemănătoare de magneți potcoavă.
9. 10 cm bandă izolatoare.
10. 4 buc. de cauciuc 0,5 × 1 × 1 cm pentru picioare.

Confecționarea aparatului. Placa de bază (1) se pregătește conform dimensiunilor din fig. 2. Facem patru găuri pentru fișe și trei de 1,5 × 1 cm pentru coloanele de susținere. Din linealul (5) tăiem 3 buc. a 20 cm fiecare, și cu ajutorul cleiului le fixăm în orificiile săpate. Placa de furnir (6) se va tăia în formă de triunghi isoscel după figura 3, apoi pe direcția înălțimii se va fixa cu cuie pe coloana din orificiul *S*. Linealul rămas din (5) se taie în două bucăți, una se fixează cu cuie la cele două

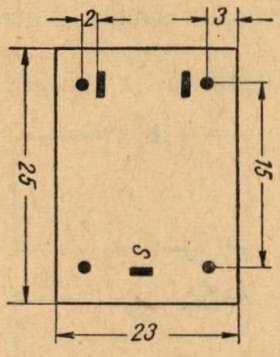


Fig. 2.

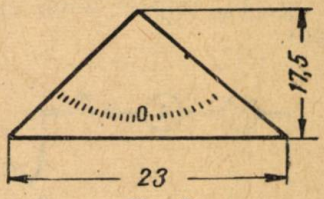


Fig. 3.

capete pe două coloane de susținere, iar a treia se fixează pe coloana *S* cu cuie la mijloc. Pe cele 4 plăci (2) în direcție longitudinală la mijloc, la 2 cm de la capăt se poansonează adînciturі la 2 mm distanță una de

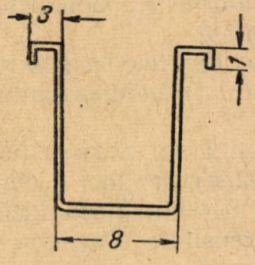


Fig. 4-a.

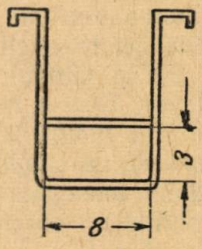


Fig. 4-b.

alta. Cîte două plăci se fixează cu cuie pe linealurile fixate în poziție orizontală pe coloane astfel, încît între ele să rămînă 2 mm distanță. Să notăm cele două perechi de plăci vecine cu *A* respectiv *B*. Cablul de legătură (3) se lipește (eventual se nituiește) de cele patru capete exterioare ale plăcilor, iar capetele libere se fixează în fișe. Placa de furnir se vopsește în negru cu gradații la marginea de jos, cu grade vopsite cu vopsea albă de-a lungul unui arc de cerc. Restul aparatului se va vopsi în alb, se dă cu lac se lustruiește. Pe partea inferioară a plăcii de bază se bat cu cuie bucățile de cauciuc (10) cît mai aproape de margini.

Ca piesă auxiliară pentru bobinare confecționăm o prismă de lemn de 3 × 8 × 15 cm. Din cablul de aluminiu (7) se fac două rame conform figurii 4. a și două bobine asemănătoare. conform figurii 4. b, una cu

cinci, alta cu 10 spire. Ultima spiră a ultimei bobine se va izola. Restul ramelor și bobinelor nu se va izola. Capetele ramelor se vor pili puțin pe periferie. Dacă nu avem fișe, să facem rost de cîteva cartușe. Acestea fiind din cupru corespund scopului, numai trebuie găurite după dimensiunea bananei.

Efectaurea experiențelor. Aparatele necesare:

— 2 buc. redresoare I.M.D., 2 buc. becuri de 6 V (becul de 6 V folosit la experiențele optice I.M.D.), 1 buc. întrerupător simplu, 2 buc. ampermetre cu domeniul de măsurare 1—5 A.

Experiența 1. Luînd cîte o bucată din aparatele de mai sus, compunem circuitul din fig. 5. Pe perechea de plăci *A* așezăm o ramă: 4. a (vezi fig. 1), într-un cîmp magnetic constant.

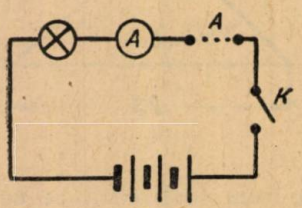


Fig. 5

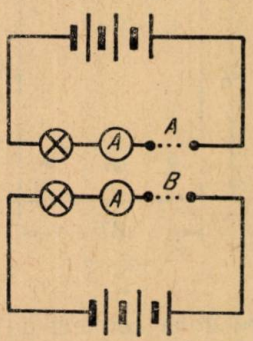


Fig. 6

a) Închidem circuitul prin întrerupătorul *K*. Conductorul va devia. În circuit circulă curent de 3 A intensitate.

b) Doi sau trei magneți se așază cu capetele în sus în așa fel, încît rama 4. a să fie în cîmpul lor magnetic. Închiderea circuitului duce la creșterea deviației. Deci $F \sim H$.

c) Îndepărtăm magneții și numai unul se așază astfel ca liniile de forță să fie paralele cu conductorul. Nu observăm nici o deviere.

d) Schimbăm tensiunea de la 4 la 6 volți. Dacă închidem circuitul prin *K*, vom obține un curent de 4 A intensitate. Devierea este mai mare ca la 3 A. Deci $F \sim I$.

e) Schimbăm polurile, vom avea deviere de sens contrar.

Experiența 2. Cu elementele de mai sus realizăm circuitul din figura 6. Pe perechile de plăci *A* și *B* fixăm cele două bobine ramă 4. b.

a) La închiderea circuitului cele două bobine se vor atrage sau se vor respinge în funcție de sensul curentului. În circuit avem 3 A.

b) Închidem circuitul cu 6 V. Atracția sau respingerea este mai mare. În circuit avem curent de 4 A intensitate. Deci $F \sim I$.

c) Cele două bobine — ramă se așază la distanță mai mare. Atracția sau respingerea scade. Deci $F \sim l$.

d) Dacă una sau ambele bobine — rame se schimbă cu rama 3. a, efectul scade. Deci $F \sim \frac{1}{r}$.

ASUPRA TEOREMEI LUI MORLEY

de *R. BODNĂRESCU* și *E. WASSERSTROM*

Fie triunghiul de referință ABC și trisectoarele AB_0, AC_0; BC_0, BI; CB_0, CI. Conform teoremei lui Morley, triunghiul $B_0\ C_0\ I$ este echilateral.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se pleacă de la construcția trisectoarelor corespunzătoare vîrfurilor B și C. Se construiesc punctele B_0 și C_0 pe trisectoarele CA_1 și BA_1, astfel ca $\sphericalangle B_0\ IA_1 = \sphericalangle C_0\ IA_1 = 30^0$. Se demonstrează *) că AB_0 și AC_0 sînt trisectoarele unghiului A.

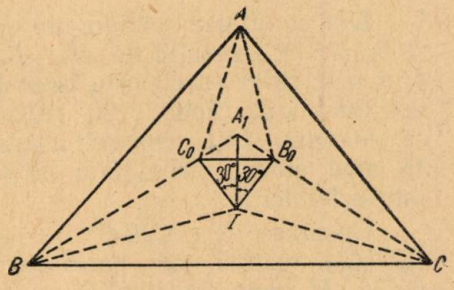


Fig. 1

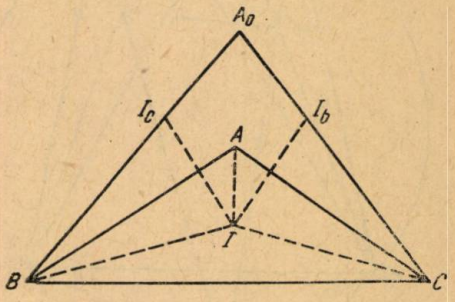


Fig. 2

Cîteva proprietăți interesante ale schemei de mai sus formează obiectul notei de față.

Considerăm ca triunghi de referință, triunghiul ABC din figura 1. Pentru a ajunge la teorema lui Morley, fie deci triunghiul ABC (fig. 2) și I centrul cercului înscris acestui triunghi. Fie încă I_b și I_c simetricele lui I față de laturile CA și BA.

Dreptele CI_b și BI_c se taie în A_0; evident pentru a ajunge la cazul teoremei Morley, A_0 și A să fie de aceeași patre a laturii BC; aceasta înseamnă că:

$$\sphericalangle A_0BC + \sphericalangle A_0CB < 180°.$$

Exprimînd unghiurile de mai sus în funcție de unghiurile triunghiului de referință ABC vom avea:

$$\frac{3B}{2} + \frac{3C}{2} < 180° \text{ sau } B + C < 120° \text{ sau } A > 60°.$$

De aici rezultă:

Cazul 1. $A > 60°$; A_0 și A sînt de aceeași parte a lui BC.

Cazul 2. $A = 60^0$, BI_c și CI_b sînt paralele, adică A_0 este la infinit.

Cazul 3. $A < 60^0$; A_0 și A sînt de o parte și de alta a lui BC.

*) Vezi Hadamard, Lecții de geometrie elementară (geometrie plană), București 1960, p. 236.

Deoarece cazul 1 conduce direct la teorema lui Morley, iar cazul 2 geste un caz limită, rămîne să ne ocupăm în mod special, de cel de-al treilea caz.

Fie deci, triunghiul ABC (fig. 3) $A < 60$; I centrul cercului înscris acestui triunghi și I_b, I_c simetricele centrului I respectiv, față de laturile AC și AB; dreptele BI_c și CI_b se taie în A_0. Se construiesc prin I dreptele $B_0C'_0$ și $C_0B'_0$ care fac unghiuri de 30° cu bisectoarea AI.

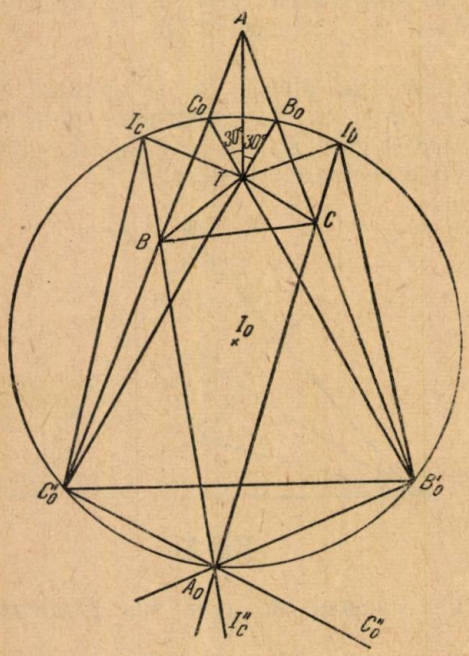


Fig. 3

Ne propunem să demonstrăm teorema: *Dreptele* A_0B_0 și A_0C_0 sînt *trisectoarele interioare ale unghiului* BA_0C, *iar dreptele* $A_0B'_0$ și $A_0C'_0$ *trisectoarele exterioare ale aceluiași unghi.*

Din egalitatea triunghiurilor AIB_0 și AIC_0 rezultă că $IB_0 = IC_0$, deci triunghiul IB_0C_0 este isoscel; unghiul C_0IB_0 fiind de 60° rezultă că triunghiul IB_0C_0 este echilateral. În mod analog, triunghiul IB'_0C_0 este echilateral.

Deoarece $\sphericalangle C_0B_0C'_0 = \sphericalangle C_0B'_0C'_0$ rezultă că patrulaterul $B_0C_0C'_0B'_0$ este inscriptibil.

Să demonstrăm că heptagonul $A_0B'_0I_bB_0C_0I_cC'_0$ este inscriptibil.

Fie (I_0) cercul $B_0C_0C'_0B'_0$. Să arătăm că punctul I_b se află pe acest cerc, adică, $\sphericalangle B_0IB'_0 = 180°$; $\sphericalangle B_0IC_0 = 120_0$.

Triunghiurile $B_0IB'_0$ și $B_0I_bB'_0$ sînt egale avînd laturile egale ($B_0B'_0$ comună; $B_0I = B_0I_b$ și $B'_0I = B'_0I_b$, deoarece $B_0B'_0$ este mediatoarea segmentului II_b).

Deci, $\sphericalangle B_0I_bB'_0 = \sphericalangle B_0IB'_0 = 120°$. Rezultă că $\sphericalangle B_0I_bB'_0 + \sphericalangle B_0C'_0B'_0 = 180°$, deci și patrulaterul $B_0C'_0B'_0I_b$ este inscriptibil.

Analog se demonstrează că patrulaterul $C_0B'_0C'_0I_c$ este inscriptibil. Rezultă că exagonul $B_0C_0I_cC'_0B'_0I_b$ este înscris în cercul (I_0).

În triunghiul BA_0C avem $\sphericalangle BA_0C = 180° - \sphericalangle CBA_0 - \sphericalangle BCA_0 =$

$$= 180° - \left(180° - \frac{3B}{2}\right) - \left(180° - \frac{3C}{2}\right) = \frac{3}{2}(B + C) - 180° = 90° - \frac{3}{2}A,$$

$$\sphericalangle I_cC_0B = \sphericalangle IC_0B = 30° + \frac{A}{2} \text{ (unghi exterior triunghiului } AIC_0).$$

Analog, $\sphericalangle I_bB_0C = 30° + \frac{A}{2}$

$\sphericalangle I_cC_0I_b = \sphericalangle I_cC_0I + \sphericalangle IC_0I_b = 60° + A + \sphericalangle IC_0I_b$, dar $\sphericalangle IC_0I_b = \sphericalangle CB_0I_b$ deoarece subîntind același arc în cercul (I_0).

Rezultă : $\sphericalangle I_cC_0I_b = 60° + A + \sphericalangle CB_0I_b = 60° + A + 30° + \frac{A}{2} =$

$= 90° + \frac{3A}{2}$; $\sphericalangle I_cCI_b + \sphericalangle BA_0C = 180°$.

Deci, patrulaterul $A_0I_cC_0I_b$ este inscriptibil, deci punctul A_0 se găsește pe cercul (I_0).

Din egalitățile segmentelor : $I_bB_0 = B_0I = B_0C_0 = C_0I = C_0I_c$ și

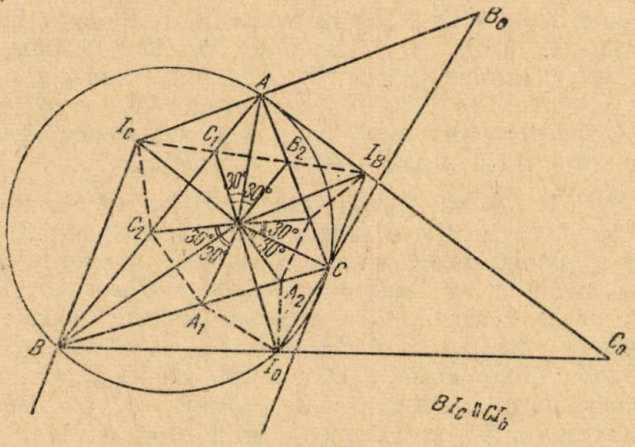


Fig 4.

$I_bB'_0 = B'_0I = B'_0C'_0 = IC'_0 = C'_0I_c$ rezultă că arcele I_bB_0, B_0C_0, C_0I_c sînt egale între ele, iar arcele $I_bB'_0$, $B'_0C'_0$, C'_0I_c sînt egale între ele. Egalitatea acestor arce implică egalitatea unghiurilor $I_cA_0C_0 = C_0A_0B_0 = B_0A_0I_b$ și $I_bA_0B'_0 = B'_0A_0C''_0 = C''_0A_0I''_c$.

Pe figura 4 avem : $A=60°$ $B<60°$, $C>60°$.

Prin cele arătate mai sus s-a obținut o extindere a teoremei lui Morley.

EVIDENȚIAȚII LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ ETAPA FINALĂ DIN 10—13 IUNIE 1962

Matematica

PREMIUL I. 1. *Leu Nicolae Adrian* clasa VIII-a școala medie nr. 13 Mihai Viteazu, București ; 2. *Persache Octavian* clasa a IX-a școala medie nr. 11 D. Cantemir, București ; 3. *Zsido László* clasa a X-a școala medie nr. 5, Brașov ; 4. *Lustig Gheorghe* clasa a X-a școala medie medie nr. 5, Timișoara ; 5. *Bădescu Lucian* clasa a XI-a școala medie D. Golescu Cîmpulung Muscel.

PREMIUL II. 1. *Giurcă Octavian* clasa a VIII-a școala medie nr. 3, Craiova ; 2. *Tonceanu Dan* clasa a VIII-a școala medie nr. 11, Bucu-

rești ; 3. *Nica Vasile* clasa a IX-a școala medie nr. 1, Ploiești ; 4. *Constantinescu Adrian* clasa a IX-a școala medie nr. 1, Pitești ; 5. *Dalyai Pal,* clasa a X-a școala medie Bolyai Tg. Mureș ; 6. Eckstein Gheorghe clasa a X-a școala medie nr. 3 Timișoara ; 7. *Buimovici Alexandru* clasa a XI-a școala medie nr. 18, București ; 8.*Giurgea Viorel* clasa a XI-a școala medie nr. 5, Iași.

PREMIUL III. 1. *Filipoiu Alexandru* clasa a VIII-a școala medie nr. 1 Buzău ; *Drăgulinescu D-tru* clasa a IX-a școala medie Tr. Măgurele ; 3. *Früstok Ștefan* clasa a IX-a școala medie nr. 1, Făgăraș ; 4. *Nicolae Silvia* clasa a IX-a școala medie nr. 1, Ploiești; 5. *Tiron Vasile* clasa a X-a școala medie nr. 1, Rădăuți ; 6. *Micu Nicolae* clasa a X-a școala medie nr. 2, Rîmnicu-Sărat ; 7. *Dragomir Toma* clasa a X-a școala medie nr. 1 Oradea ; 8. *Puha Radu* clasa a XI-a școala medie nr. 1 Rădăuți ; 9. *Cișmașu Doina* anul IV școala pedagogică Deva ; 10. *Hănțilă Florea* clasa a XI-a școala medie nr. 1 Brașov.

MENȚIUNI. 1. *Borcea Sorin* clasa a VIII-a școala medie Oradea ; 2. *Ioniță Maria* clasa a VIII-a școala medie 1 Predeal ; 3. *Stepan Ionel* clasa a VIII-a școala medie serală Medgidia ; 4. *Suiu Virgil* clasa a VIII-a școala medie nr. 2 Rădăuți ; 5. *Toader Gheorghe* clasa a VIII-a școala medie nr. 1 Ploiești ; 6. *Georgescu George* clasa a IX-a școala medie 1 Craiova ; *Gașpariuc Călin* clasa a IX-a școala medie Piatra Neamț ; 8. *Sandu Marin* clasa a IX-a școala medie D. Cantemir Breaza ; 9. *Tevi Ionel* clasa a X-a școala medie nr. 2. București ; 10. *Aisner Sergiu* clasa a X-a școala medie nr. 1 Ploiești ; 11. *Simion Alexandru* clasa a X-a școala medie nr. 1 Bacău ; 12. *Diaconescu Radu* clasa a XI-a școala medie Pucioasa ; 13. *Leția Ion* clasa a XI-a școala medie Aiud ; 14. *Stoia Manuela* clasa a XI-a școala medie nr. 13 București ; 16. *Vinea Vladimir* clasa a XI-a școala medie nr. 32 București ; 17. *Boldea Ion* clasa a XI-a școala medie nr. 1 Lugoj ; 18. *Ababei Gheorghe* anul IV școala pedagogică Suceava ; 19. *Tăbușcă Ion* anul IV școala pedagogică Bîrlad ; 20. *Ciovlică Gheorghe* anul I școala de maiștri Galați.

Fizica

PREMIUL I. 1. *Iosif Nicolae* clasa a XI-a școala medie Turda ; 2. *Popescu Domițian* clasa a XI-a școala medie nr. 24 București ; 3. *Filipaș Titus* clasa a XI-a școala medie nr. 2 Craiova ; 4. *Bîrcă Gălățeanu Șerban* clasa a XI-a școala medie nr. 17 București.

PREMIUL II. 1. *Weinstein Jack* clasa a VIII-a nr. 2 Rădăuți ; 2. *Arie Dan* clasa a VIII-a școala medie nr. 1 Pitești ; 3. *Badralexe Eugen* clasa a VIII-a școala medie nr. 22 București ; 4. *Toaxen Livia* clasa a VIII-a școala medie Roșiori de Vede ; 5. *Stîngescu Sanda* clasa a X-a școala medie nr. 2 Buzău ; 6. *Costea Ion* clasa a X-a școala medie nr. 1 Buzău ; 7. *Meder Laszlo Ferenz* clasa a XI-a școala medie Șincai Cluj ; 8. *Angelescu Ștefan* clasa a XI-a școala medie nr. 15 București ; 9. *Caprini Mihai* clasa a XI-a școala medie nr. 36 București ; 10. *Protopopescu Vladimir* clasa a XI-a școala medie nr. 36 București ; 11. *Draga Gheorghița* anul I școala profesională București ; 12. *Costea Aurica* anul I școala profesională Dragomirești.

PREMIUL III. 1. *Wallaseck Istvan* clasa a IX-a școala medie nr. 7 Cluj; 2. *Marcus Sergiu* clasa a IX-a școala medie nr. 3 Galați; 3 *Grigorescu Iolanda* clasa a IX-a școala medie nr. 22 București; 4. *Spircu Tiberiu* clasa a IX-a școala medie nr. 4 Arad; 5. *Corcoțoi Ioan* clasa a IX-a școala medie nr. 1 Vaslui; 6. *Pantazi Emanoil* clasa a X-a școala medie nr. 11 București; 7. *Dumitrache D-tru* clasa a X-a școala medie Focșani; 8. *Silvestru Aurel* clasa a X-a școala medie nr. 1 Arad; 9. *Pascu Mihai* clasa a X-a școala medie nr. 17 București; 10. *Preotu Eugen* clasa a X-a școala medie nr. 5 Iași; 11. *Grovu Mihai* clasa a X-a medie nr. 11 București; 7. *Dumitrache D-tru* clasa a X-a școala medie Petroșeni; 13. *Dumitru Titu Mihai* clasa a XI-a școala medie nr. 1 Craiova; 14. *Marinescu Nicolae* clasa a XI-a școala medie nr. 15 București; 15. *Mușetescu Cornelia* clasa a XI-a școala medie nr. 15 București; 16. *Petrescu Teodor* clasa a XI-a școala medie nr. 2 Ploiești; 17. *Rusen Corneliu* clasa a XI-a școala medie nr. 1 Ploiești; 18. *Schiopu Ion* clasa a XI-a școala medie nr. 3 Brașov; 19. *Popescu Vasile* anul II școala pedagogică Bîrlad.

MENȚIUNI. 1. *Negruțiu Vasile* clasa a VIII-a școala medie nr. 1 Oradea; 2. *Schiopu Stanciu* clasa a VIII-a școala medie nr. 1 serală Buzău; 3. *Bratu Vasile* clasa a IX-a școala medie nr. 3 Galați; 4. *Flondor Paul* clasa a IX-a școala medie nr. 13 București; 5. *Dobre Marian* clasa a IX-a școala medie nr. 1 Constanța; 6. *Necula Mihai* clasa IX-a școala medie nr. 13 București; 7. *Botgros Dimitrie* clasa a IX-a școala medie nr. 13 București; 8. *Sternberg Dorin* clasa a X-a școala medie nr. 2 Huși; 9. *Telnic Persi* clasa a X-a școala medie nr. 17 București; 10. *Dumitru Adrian* clasa a X-a școala medie nr. 5 Brașov; 11. *Grozeanu Ion* clasa a X-a școala medie Giurgiu; 12. *Frunză Ștefan* clasa a X-a școala medie nr. 1 Constanța; 13. *Blaj Cristian* clasa a XI-a școala medie nr. 8 București; 14. *Pană Costel* clasa a XI-a școala medie Medgidia; 15. *Șchied Ion* clasa a XI-a școala medie Reșița; 16. *Stern Gavi* clasa a XI-a școala medie nr. 28 București; 17. *Mudrancencu Victoria* anul IV școala pedagogică Constanța; 18. *Tomșa Gheroghe* anul IV școala pedagogică Sighet; 19. *Senchin Dumitru* anul III școala pedagogică Buzău.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4650

Viteza unui avion fiind de 720 km/oră ce denivelare coloană de mercur arată tubul Pitot de la aripa lui? Densitatea aerului este $0{,}0013 \frac{g}{cm^3}$, *a mercurului* $13{,}6 \frac{g}{cm^3}$, *iar accelerația gravitației se ia* $9{,}8 \frac{m}{s^2}$.

* * *

Soluție. Deoarece presiunea exercitată de coloana de mercur h echilibrează presiunea dinamică putem scrie:

$$\frac{\varrho_1 v^2}{2} = \varrho_2 g h \qquad v = 720\frac{Km}{h} = 200\ \frac{m}{s}$$

$$h = \frac{\varrho_1 v^2}{2\varrho_2 g}\ ;\quad \varrho_1 = 0{,}0013\ \frac{g}{cm^3}\ ;\quad \varrho_2 = 13{,}6\ \frac{g}{cm^3}\ ;$$

$$h = \frac{40\,000\ \frac{cm^2}{s^2}\cdot 0{,}0013\ \frac{g}{cm^3}}{2\cdot 980\ \frac{cm}{s^2}\cdot 13{,}6\frac{g}{cm^3}}\ ;\quad g = 980\frac{cm}{s^2}\ ;\quad h = \frac{520\,000}{26\,656} \approx 19\ cm.$$

Problema 4651

Dacă într-un triunghi r_b este medie geometrică între r_a și r_c atunci $\sin B = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 C}{\sin A + \sin C}$, *iar dacă r_b este media armonică între r_a și r_c, atunci* $2\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A-C}{2}$ *unde r_a, r_b, r_c sînt razele cercurilor exînscrise.*

Corneliu Georgescu, Craiova

Soluție. Înlocuim $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, etc. în relația $r^2_b = r_a r_b$ și avem:

$(p-b)^2 = (p-a)(p-c)$ sau $(a+b+c)(a+c-2b) = 2(ac-b^2)$

de unde $b = \dfrac{a^2+c^2}{a+c}$ sau $\sin B = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 C}{\sin A + \sin C}$. Dacă înlocuim $r_b = \dfrac{S}{p-b}$, în relația $\dfrac{2}{r_b} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_c}$, găsim $2p-2b=b$ sau $2b=a+c$, deci:

$$2\sin B = \sin A + \sin C\ ;\ 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

deci:

$$2\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2}\ .$$

Soluție dată de *Lucian Bădescu*, elev C-lung Muscel.

Problema 4652

Să se arate că polinomul:

$$[(m-1)(x^3+x^2) - x + 1]^2 - (m-2)^2 x^3 (x^2 + 2x - 1)$$

se divide prin (x^3+x^2-x+1). Să se afle citul fără a face împărțirea.

* * *

Soluție. Polinomul se scrie:

$$P(x)=[x^3+x^2-x+1+(m-2)x^2(x+1)]^2-(m-2)^2x^3(x^2+2x-1)=$$
$$=(x^3+x^2-x+1)^2+2(x^3+x^2-x+1)(m-2)x^2(x+1)+(m-2)^2x^4(x+1)^2-$$
$$-(m-2)^2x^3(x^2+2x-1)=(x^3+x^2-x+1)^2+2(x^3+x^2-x+1)(m-2)x^2\cdot$$
$$(x+1)+(m-2)^2x^3[x(x+1)^2-x^2-2x+1]=(x^3+x^2-x+1)^2+$$
$$2(x^3+x^2-x+1)(m-2)x^2(x+1)+(m-2)^2x^3(x^3+x^2-x+1)$$
$$P(x)=(x^3+x^2-x+1)[x^3+x^2-x+1+2(m-2)x^2(x+1)+(m-2)^2x^3]$$
$$P(x)=(x^3+x^2-x+1)(x^3+x^2-x+1+2mx^3+2mx^2-4x^3-4x^2+m^2x^3-$$
$$-4mx^3+4x^3)=(x^3+x^2-x+1)[(m-1)^2x^3+(2m-3)x^2-x+1].$$

Deci, polinomul se împarte prin x^3+x^2-x+1 fără rest, iar cîtul este $(m-1)^2x^3+(2m-3)x^2-x+1$.

Soluție dată de *V. Pravăț*, elev Adjud

Problema 4654

Să se stabilească relația:

$$nC_{2n}^n=(n+1)[C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}C_n^n]$$

Ilie N. Constantinescu

Soluție. Să considerăm dezvoltarea cunoscută:

$$(x+1)^{2n}=(x+1)^n(1+x)^n=(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+\ldots+C_n^n)\cdot$$
$$(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n)$$

și egalînd coeficienții lui x^{n-1} din primul și ultimul membru avem;

$$C_{2n}^{n-1}=C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}C_n^n, \text{ dar: } C_{2n}^{n-10}=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-1)!}=$$
$$=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{2n(n-1)\ldots(n+2)(n+1)}{(n-1)!\,n}=\frac{n}{n+1}C_{2n}^n$$

și deci, relația este stabilită.

Soluție dată de *Drugă Gheorghe*, elev Breaza.

Problema 4655

Se dă triunghiul ABC cu înălțimile H_bH_c. Dacă I este centrul cercului înscris, să se arate că H_b, I, H_c pot fi colineare numai dacă unghiul A este mai mic decît 60°.

Ene P. Dumitru, absolvent Ploiești

Soluție. $H_b\,I,\,H_c$ sînt colineare dacă există relația:

$$BA\cdot\frac{AC}{AH_b}+CA'\cdot\frac{AB}{AH_c}=BC\cdot\frac{AA'}{AI} \qquad (1)$$

(*I. I. Cristea.* Asupra problemei 1301, G.M.F.-B 1955, pag. 19), unde AA' este bisectoarea unghiului A. Avem: $\frac{BA'}{A'C}=\frac{c}{b}$, unde $\frac{BA'}{a}=\frac{c}{b+c}$ așa că $BA'=\frac{ac}{b+c}$ și $A'C=\frac{ab}{b+c}$, notațiile fiind cele cunoscute.

Mai avem: $AH_b = c \cos A$ și $AH_c = b \cos A$.

În triunghiul ABA' unde BI este bisectoare avem: $\frac{AI}{IA'} = \frac{AB}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$, de unde: $\frac{IA'}{AI} = \frac{a}{b+c}$, așa că: $\frac{AA'}{AI} = \frac{a+b+c}{b+c}$

și relația (1) devine:

$$\frac{ac}{b+c} \cdot \frac{b}{c\cos A} + \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{c}{b\cos A} = a\,\frac{a+b+c}{b+c}$$

$$\frac{1}{\cos A}\left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\right) = \frac{a+b+c}{b+c} \text{ sau: } \cos A = \frac{(a+b+c)-a}{a+b+c} = 1 - \frac{a}{a+b+c}$$

Trebuie să avem: $b+c>a$, de unde: $a+b+c>2a$ așa că:

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{2a}; \quad \frac{a}{a+b+c} < \frac{1}{2} \text{ și deci, } 1 - \frac{a}{a+b+c} > 1 - \frac{1}{2}$$

sau:

$1 - \frac{a}{a+b+c} > \frac{1}{2}$. Cînd $\sphericalangle A > 90°$, H_b, H_c sînt exterioare triunghiului, iar I interior.

$\cos A > \frac{1}{2}$ și cum cosinusul scade în cadranul I de la 1 la 0, avem $\sphericalangle A < 60°$.

Problema 4659

Să se arate că există un număr E în așa fel ca pentru orice a să avem $a * E = a$. Pentru acest număr, $E * E = E$. Să se arate dacă proprietatea de comutativitate și asociativitate, adică

$$a * b = b * a \text{ și } (a * b) * c = a * (b * c)$$

este valabilă pentru operația cu steluță
Operația $a * b$ se definește de relația $a * b = a + b + ab$

(L'éducation Mathématique, Paris)

Soluție. Avem $a * E = a + E + aE = a + (a+1)E = a$
Deci $E = 0$, pentru orice a, $a * E = a$
De asemenea $E * E = E$ deoarece
$0+0+0 \cdot 0 = 0$
Avem $a * b = a + b + ab$ și $b * a = b + a + ba$
Deci $a * b = b * a$. De asemenea

$(a * b) * c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$, iar $a * (b * c) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$.

Deci și $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Problema 4661

Fie M un punct mobil pe o parabolă de vîrf O, parametru p; tangenta în M taie axa în T; normala taie axa în N, iar perpendiculara în M pe MO taie axa în U.

a) *Să se arate că avem relația* $2OU - TN = const = 3p$;

b) *Să se arate că centrul de greutate al triunghiului TMN descrie o parabolă.*

N. Mihăileanu

Soluție. a) Ducem MP perpendiculară pe TU. Segmentul TP se numește subtangentă și este împărțit de O în 2 părți egale. Deci dacă: $y^2 = 2px$ este ecuația parabolei și $M\ (x_0, \sqrt{2px_0})$, $TP = 2x_0$.
Segmentul PN este subnormala și $PN = p$. Deci $TN = p + 2x_0$.
Din triunghiul OMP avem: $OM = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{x_0^2 + 2px_0}$ și Din triunghiul OMU.

$$OU = \frac{OM^2}{OP} = \frac{x_0^2 + 2px_0}{x_0} = x_0 + 2p.$$

Deci: $2OU - TN = 2x_0 + 4p - p - 2x_0 = 3p = \text{const}$.

b) Fie G centrul de greutate. Piciorul medianei din M se află la $x_0 + \frac{p}{2}$ de T, adică la p de O. Deci el se află în focarul parabolei, într-un punct fix. Cum $\frac{GF}{FM} = \frac{1}{3}$ și M descrie o parabolă rezultă că și G va descrie o parabolă omotetică cu prima raportul de omotetie fiind $\frac{1}{3}$.

Soluții bune au dat *Popa Nicolae*, elev Focșani, și *T. Zamfirescu*, elev București.

Problema 4662

Să se elimine ωt *între ecuațiile:*

$$u_1 = U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$$
$$u_2 = U_2 \sqrt{2} \cos 2\omega t.$$

Ce devine rezultatul eliminării pentru $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}$ *și* $\frac{\pi}{2}$?

Ion S. Antoniu

Soluție. Punînd $\frac{u_1}{U_1\sqrt{2}} = x$ și $\frac{u_2}{U_2\sqrt{2}}$ și scriind funcțiile inverse se obțin relațiile:

$$\omega t - \varphi = \arccos x \text{ și } 2\omega t = \arccos y$$

Prin eliminarea lui ωt se obține ecuația

$$\arccos y - 2 \arccos x = 2\varphi \text{ sau: } \cos(\alpha - 2\beta) = \cos 2\varphi$$

în care s-a notat $x=\cos\alpha$ și $y=\cos\beta$. Dezvoltînd cosinusul și ținînd seama de valorile lui α și β se obține ecuația curbei loc geometric

$$4x^4 - 4x^2y\cos 2\varphi + y^2 = 4x^2 - 2y\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi = 0$$

sau, explicitată în raport cu y:

$$y = (2x^2 - 1)\cos 2\varphi \pm 2x\sqrt{1 - x^2}\sin 2\varphi$$

În cazurile particulare date se găsește respectiv:

$$y = 2x^2 - 1,\ y = \pm 2x\sqrt{1 - x^2},\ y = -(2x^2 - 1).$$

Problema 4663

Dacă a, b, c sînt trei numere în progresie aritmetică să se arate că soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned}(a-b)x + (b-c)y &= a^2 - c^2\\ (b-c)y + (c-a)z &= b^2 - a^2\\ (c-a)z + (a-b)x &= c^2 - b^2\end{aligned}$$

sînt în progresie aritmetică.

V. Grigoraș, elev Bacău

Soluție. Adunînd ecuațiile obținem: $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0$ sau: $[(a-b)x-(a^2-b^2)]=[(b-c)y-(b^2-c^2)]=[(c-a)x-(c^2-a^2)]=0$ adică, $(a-b)x=a^2-b^2$ sau $x=a+b$; $(b-c)y=b^2-c^2$ sau $y=b+c$; $(c-a)z=c^2-a^2$ sau $z=a+c$.

Conform enunțului ar trebui să avem: $2y=x+z$ sau $2(b+c)=2a+b+c$, adică $2a=b+c$, care e adevărat, căci a, b, c sînt în progresie aritmetică.

Problema 4664

Să se demonstreze egalitatea:

$$x^{p_1} + x^{p_2} + \ldots + x^{p_n} = \frac{n-2}{2}x^{p_{n+1}}$$

unde:

$$p_K = \frac{\log(\log x^k)^k}{\log x^k}.$$

V. Virgolici, București

Soluție. Avem:

$$p_k = \frac{\log(\log x^k)^k}{\log x^k} = k\frac{\log(\log x^k)}{\log x^k} = \frac{\log(\log x^k)}{\log x^k \cdot \frac{1}{k}}.$$

Deci: $p_k = \dfrac{\log(\log x^k)}{\log x}$, sau: $\log x^{p_k} = p_K \log x = \log(\log x^k)$.

Deci: $x^{p_k} = \log x^k$. Rezultă că:

$$x^{p_1} + x^{p_2} + \ldots + x^{p_{n+1}} = \log x + \log x^2 + \ldots + \log x^{n+1} =$$
$$= (1 + 2 + \ldots + n + 1) \log x = \frac{n(n+1)}{2} \log k = \frac{n}{2} \log x^{n+1}.$$

Dar $\log x^{n+1} = x^{p_{n+1}}$ deci:

$$x^{p_1} + x^{p_2} + \ldots + x^{p_{n+1}} = \frac{n}{2} x^{p_{n+1}} \text{ sau: } x^{p_1} + x^{p_2} + \ldots + x^{p_n} =$$
$$= \frac{n-2}{2} x^{p_{n+1}}.$$

Problema 4665

Să se rezolve ecuația:

$$(x+a)^5 (b-c)^5 + (x+b)^5 (c-a)^5 + (x+c)^5 (a-b)^5 = 0.$$

Strătescu Ion, student

Soluție. Facem substituția: $A = (x+a)(b-c)$, $B = (x+b)(c-a)$, $C = (x+c)(a-b)$. Se observă ușor că: $A+B+C=0$. Ținînd seama de această condiție avem succesiv:

$$A^5 + B^5 + C^5 = A^5 + (B^5 + C^5) = A^5 - A(B^4 - B^3C + B^2C^2 - BC^3 + C^4) =$$
$$= A[(A^4 - B^4) - C^4 + BC(B^2 - BC + C^2)] = A[-C(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3) -$$
$$- C^4 + BC(B^2 - BC + C^2)] = AC[(-A^3 - C^3) + B(A^2 - AB + B^2) + B(B^2 - BC +$$
$$+ C^2)] = AC[B(A^2 - AC + C^2) + B(A^2 - AB + B^2) + B(B^2 - BC + C^2)] =$$
$$= ABC[2(A^2 + B^2 + C^2) - (AB + BC + AC)] =$$
$$= ABC[2(A+B+C)^2 - 5(AB + BC + AC)] = 5ABC(AB + BC + CA).$$

Ecuația devine:

$$-5(x+a)(x+b)(x+c)(b-c)(c-a)(a-b)[(x+a)(x+b)(b-c)(c-a) +$$
$$+ (x+a)(x+c)(b-c)(a-b) + (x+b)(x+c)(c-a)(a-a)] = 0.$$

Rezultă: $(x+a)=0$, $x=-a$, $(x+b)=0$, $x=-b$, $(x+c)=0$, $x=-c$ și:

$$\Sigma(x+a)(x+b)(b-c)(c-a) = 0$$

care se mai scrie: $\Sigma AB = 0$. Dar $\Sigma AB = -\dfrac{\Sigma A^2}{2}$, deci ecuația devine:

$$\Sigma A^2 = 0, \text{ sau: } \Sigma(x+a)^2 (b-c)^2 = 0, \text{ sau:}$$
$$2x^2 (\Sigma a^2 - \Sigma ab) + 2x \Sigma a (b-c)^2 + \Sigma a (b-c) = 0$$

de unde rezultă:

$$x_{4,5} = \frac{-\Sigma a (b-c)^2 \pm i\sqrt{3}\,(a-b)(b-c)(c-a)}{\Sigma a^2 - \Sigma ab}$$

Problema 4666

Să se arate că funcția

$$f(x) = (x+2)^2 - \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2} - \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2}} + \sqrt{(2-x)^2}$$

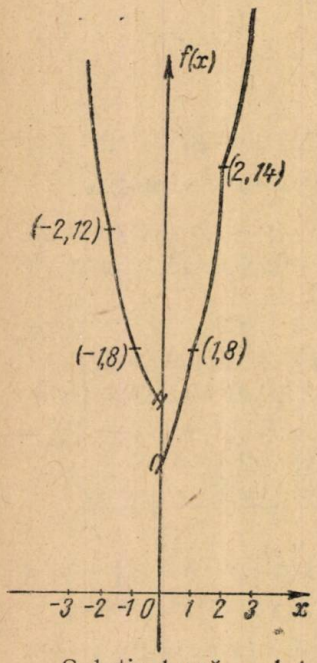
se mai poate scrie

$$f(x) = (x+2)^2 - |x+1| + |x| \cdot |x-1| - \frac{|x| \cdot |x-1|}{x} + |x-2|$$

și apoi să se reprezinte grafic $y = f(x)$
Se vor considera pe rînd intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1,0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Ținînd seama că radicalii sînt aritmetici funcția se poate scrie:



$$f(x) = (x+2)^2 - |x+1| + |x| \cdot |x-1| - \frac{|x| \cdot |x-1|}{x} + |x-2|.$$

Cînd $x \in (-\infty, -2)$ funcția devine:

$f(x) = (x+2)^2 + x + 1 + x^2 - x - x + 1 - x + 2 = 2(x^2+x+4)$. Graficul este o parabolă. Cînd $x \in (-2,-1)$ funcția este aceeași. Cînd $x \in (-1,0)$ $f(x) = 2x^2 + 6$.

În punctul -1 funcția ia valori deoarece $f(-1-0) = f(-1+0)$. $f(-1) = 8$.

Cînd $x \in (0, 1)$; $f(x) = 4x+4$ funcția e o dreaptă, funcția nu există în punctul $x=0$, pentru că $f(0-0) \neq f(0+0)$.

Cînd $x \in (1, 2)$; $f(x) = 2x^2+6+3$ funcția e tot o parabolă. În punctul $x = 1$, funcția există și ia valoare de $f(1) = 8$. Cînd $x \in 2,\infty)$ $f(x) = 2(x^2+x+1)$ și este tot o parabolă. Cînd $x=2$ funcția există pentru că $f(2-0) = f(2+0)$.

Soluție bună a dat *Popa Nicolae, elev* Focșani.

Problema 4670

Dacă $0 < \alpha - r < \alpha < \alpha + r < \frac{\pi}{2}$, *atunci* $\sin(\alpha-r)$, $\sin\alpha$, $\sin(\alpha+r)$ *nu poate fi nici progresie aritmetică, nici progresie geometrică.*

Ștefan Berți, Sighet

Soluție. Dacă $\sin(\alpha-r)$, $\sin\alpha$, $\sin(\alpha+r)$ ar forma o progresie aritmetică, atunci: $\sin(\alpha - r) + \sin(\alpha + r) = 2\sin\alpha$, adică $2\sin\alpha\cos r = 2\sin\alpha$, sau, $\sin\alpha(1 - \cos r) = 0$, ecuație care are soluțiile: $\alpha = k\pi$ și $r = 2k\pi$.

Nici una din aceste soluții nu corespunde condițiilor ecuației date.

Dacă sîn $(\alpha - r)$, $\sin\alpha$, $\sin(\alpha + r)$ ar forma o progresie geometrică atunci $\sin(\alpha - r)\sin(\alpha + r) = \sin^2\alpha$ adică:

$(\sin\alpha\cos r - \cos\alpha\sin r)(\sin\alpha\cos r + \cos\alpha\sin r) = \sin^2\alpha$ sau,

$\sin^2\alpha\cos^2 r - \cos^2\alpha\sin^2 r = \sin^2\alpha$ adică, $\sin^2\alpha(\cos^2 r - 1) = \cos^2\alpha\sin^2 r$, de unde: $-\sin^2\alpha\cdot\sin^2 r = \cos^2\alpha\cdot\sin^2 r$, ceea ce nu este posibil.

Problema 815 (MFL)

În sistemul de coordonate rectangulare xOy sînt date punctele $A(o, b)$; $B(o, -b)$; $P(m, -b)$ și $Q(a, m-b)$, unde a și b sînt numere fixe, iar. iar m un parametru variabil.

Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție ale dreptelor AP și BQ.

Rafain Dezső, Odorhei

Soluția dată de elevul *Iszlai Géza* școala medie din Sovata. Ecuațiile dreptelor, care trec prin punctele A și P, respectiv prin B și Q sînt:

$$2bx + my - mb = 0,$$
$$mx - ay - ab = 0.$$

Eliminînd parametrul m dintre ecuațiile obținem

$$\frac{x^2}{\frac{ab}{2}} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Deci locul geometric căutat este o elipsă, dacă a și b au aceleași sume și este hiperbolă, a și b au semne contrare.

Observație. Am presupus că $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Problema 816 (MFL)

Un vagon cu masa de 20 t se mișcă cu o viteză de 72 km/h, la o curbă cu *raza de 800 m. Să se determine:* a) *Mărimea forței centrifuge de inerție care acționează asupra vagonului;* b) *Suprainălțarea șinei exterioare față de cea interioară, știind că ecartamentul liniei este de 1,5 m;* c) *Coeficientul de frecare dintre platforma vagonului și un corp aflat pe ea pentru ca acest corp să rămînă fix; se presupune în acest caz orizontalitatea șinelor. Se va considera $g = 10\ m/s^2$.*

Olimpiada de fizică, 1961 cl. VIII-a

Soluția dată de eleva *Chis Aranka* a Liceului Unificat, Dej.

a) Forța centrifugă de inerție F, care acționează asupra vagonului (știind că $v = 72$ km/h $= 20$ m/s, se calculează din formula:

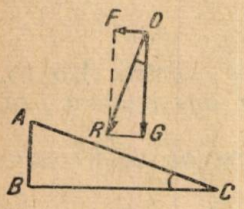
$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{20\,000\cdot 20^2}{800} N = 10^4 N.$$

b) Vagonul este în echilibru dacă planul șinelor este perpendicular pe forța R, care este rezultanta greutății G și a forței centrifuge F.

Conform condiției, triunghiurile ABC și ORG sînt asemenea

deci, $$\frac{AB}{RG} = \frac{AC}{OR},$$

de unde diferența de nivel între șine este:



$$AB = \frac{AC \cdot RG}{OR} = \frac{AC \cdot RG}{\sqrt{OG^2 + RG^2}} =$$

$$= \frac{150 \cdot 10\,000}{\sqrt{200\,000^2 + 10\,000^2}} \text{ cm} =$$

$$= \frac{150}{401} \text{ cm} \approx 7{,}5 \text{ cm}.$$

c) Deoarece corpul nu se deplasează, se trage concluzia, că forța de frecare este egală sau mai mare ca forța centrifugă, deci coeficientul de frecare este:

$$\mu = \frac{F_s}{G} \geqslant \frac{10\,000}{200\,000} = 0{,}05.$$

Problema 817 (MFL)

Pe aceeași axă se așează două discuri la o distanță de 1,5 m. Sistemul se rotește în jurul axei cu o turație de 1800 rot/min. Un proiectil se mișcă paralel cu axa și străbate amîndouă discuri în așa fel ca diferența dintre cele două găuri corespunde unui unghi de 30°. Mișcarea proiectilului se consideră uniformă. Să se determine viteza mișcării proiectilului.

Schwartz Lajos, Oradea

Soluția dată de elevul *Kopán Sándor* din școala medie nr. 1 — Sighișoara. Spațiul parcurs cu mișcare uniformă de proiectil este

$$s = v \cdot t.$$

În timpul t discul se rotește cu unghiul

$$\alpha = \omega \cdot t = 2\pi\nu t,$$

unde $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$.

Din ecuațiile de mai sus rezultă

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{v}{2\pi\nu},$$

de unde viteza proiectilului:

$$v = \frac{2\pi\nu s}{\alpha} = \frac{2\pi \frac{1800}{60} \frac{1}{s} \cdot 1{,}5\,m}{\frac{\pi}{6}} = 540 \frac{m}{s}.$$

PROBLEME PROPUSE*)

5353. Triunghiul ABC cu latura BC fixă, vîrful A variabil și unghiul A = const. Se prelungește latura AB cu segmentul $AD = AC$ și se formează triunghiul ADC. Se cere: a) locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ADC; b) locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ADC.

Emil Mortun, Pitești

5354. Să se rezolve ecuațiile:

$$\sin 6x - 2\cos(8x - 60°) = 3$$
$$\sin 3x - 2\cos(4x + 60°) = 3$$
$$\sin 9x - 2\sin(12x - 30°) = 3.$$

C. Ionescu-Țiu

5355. Fie

$$x = a^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{5}{6}};\quad y = a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}};\quad z = a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}.$$

Să se arate că $x = yz$ și apoi să se calculeze expresia:

$$E = \frac{xz - y}{(z - 1)(x + y)}.$$

I. Stamate, Cluj

5356. Dacă a, b, x și y sînt numere pozitive și dacă $a - 2x = b - 2y = \sqrt{x^2 + y^2}$, să se arate că: $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$, iar dacă raportul $\frac{a}{b}$ este crescător, atunci și raportul $\frac{x}{y}$ este de asemenea, crescător.

C. Ionescu-Țiu

5357. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd raza cercului circumscris, lungimea laturii AB și știind că ortocentrul se găsește la mijlocul înălțimii AA_1.

Tomescu Ion, elev Ploiești

5358. Se dă un triunghi ABC cu laturile a, b, c și un punct în interiorul său. Fie M, P, Q proiecțiile acestui punct pe înălțimi. Să se demonstreze că: $a \cdot AM + b \cdot BP + c \cdot CQ = 4S$.
(În legătură cu problema 4125).

* * *

5359. Să se rezolve ecuația:

$$9x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 18x + 9 = 0.$$

Eug. Șt. Iacob, Brașov

---

*) VIII (5363, 5381, 5382, 5383); IX (5355, 5357, 5358, 5360, 5372, 5374); X (5354, 5358, 5365, 5366, 5368, 5380); XI (5353, 5356, 5361, 5362, 5364, 5367, 5369, 5371, 5373, 5375, 5376, 5377, 5378, 5379). Soluțiile se primesc pînă la 1.11.1962.

5360. Se dă un patrulater convex $ABCD$ cu aria S. Pe latura AB se iau segmentele $AM = BN = \frac{AB}{n}$, n fiind număr egal sau mai mare ca 2. Pe celelalte laturi se iau în mod analog, $BP = CQ = \frac{BC}{n}$; $CR = DT = \frac{CD}{n}$; $DU = AV = \frac{AD}{n}$. a) Să se calculeze aria S_1 a octogonului MNPQRTUV; b) Să se calculeze aria S_2 a octogonului $MVPNRQUT$ în cazul cînd segmentele notate mai sus se iau pe prelungirile laturilor.

Corneliu Georgescu, Craiova

5361. Să se reprezinte grafic:

$$y_1 = \sqrt{3x^2+2x+3}\,;\quad y_2 = \sqrt{x^2-2x-3} \text{ și } y_3 = \sqrt{1-2x-3x^2}$$

C. Ionescu-Țiu

5362. Să se reprezinte grafic:

$$y = \frac{x^2 - 2(m+1)x + m + 3}{(x+1)^2}$$

evidențiindu-se diferite cazuri după parametrul real m.

I. Stamate, Cluj

5363. La 16 martie 1961, în Uniunea Sovietică a fost lansat un satelit artificial al Pămîntului pe o orbită cu perigeul de 217 km, apogeul de 980 km și unghiul de înclinare față de planul ecuatorial de 49°. Pămîntul fiind presupus sferic, iar raza medie a Pămîntului de 6367 km, să se calculeze latitudinile maxime ale punctelor din care poate fi observat satelitul la perigeu și apogeu. (Nu se va lua în considerare refracția atmosferică).

Ioan Tudoran, Cluj

5364. Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x.$$

C. V. Costăchescu, Constanța

5365. Să se arate pentru care valori întregi și pozitive ale lui n:

$$(\sqrt{6}+1)^n - (\sqrt{6}+1)\,n + n^3 - 1 = \mathfrak{M}6$$

Ghica S. Anton, elev Pitești

5366. Să se calculeze volumul unui tetraedru $VABC$ cunoscînd laturile triunghiului ABC și unghiurile α, β, γ făcute de planele VBC, VAC și VAB cu planul ABC.

* * *

5367. Se dă un tetraedru oarecare $OABC$ și fie G centrul său de greutate. Fie P un punct în spațiu. Știind că dublul distanței PG este diagonala paralelipipedului dreptunghic de muchie PA, PB, PC; să se găsească locul geometric al centrului de greutate al tetraedrului $PABC$. Generalizare.

Bădescu Lucian, elev C-lung Muscel

5368. Să se demonstreze că polinomul:

$$P(x) = x^{2n^2-n-1} + x^{2n^2-3n-2} + \ldots + x^{4n+2} + x^{2n+1} + 1$$

este divizibil cu:

$$Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1.$$

V. Poteraşu, student Iaşi

5369. Să se calculeze suma seriei numerice:

$$S = \frac{17}{36} + \frac{50}{576} + \frac{107}{3600} + \frac{194}{14400} + \ldots$$

Boletin Matematico *(B. I. Baidaff)* Buenos Aires

5370. Să se afle limita fracției

$$\frac{(a^x - 1)x^2}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{x^3}{3}\right)}$$

cînd x tinde către zero.

Boletin Matematico *(A. Gloden)*

5371. a) Să se reprezinte grafic curba (C) dată de funcția $y = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

b) Să se afle valorile lui m cînd dreapta (D) de ecuația $y = m(x - 1)$ are puncte comune cu curba (C).

c) Care este locul geometric al mijlocului segmentului BC, unde B și C sînt 2 puncte de intersecție ale dreptei (D) cu curba (C) în afară de punctul A?

d) Pentru care valori ale lui m abscisele punctelor B și C au același semne?

Bacalaureat, subiect tip, Franța 1961

5372. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 + my + mz = yz + 2mx,$$
$$y^2 + mz + mx = zx + 2my,$$
$$z^2 + mx + my = xy + 2mz.$$

Se va ține seama că se verifică pentru $x = y = z$.

Gh. Buicliu

5373. Să se reprezinte grafic funcția $y = \dfrac{-x^2 + 5x - 4}{x}$.

Să se evalueze aria regiunii din primul cadran cuprinsă între curbă și axa absciselor.

(Bacalaureat Franța, 1961)

5374. Să se reprezinte grafic funcția $y = \dfrac{2x - 3}{3 - x}$, apoi folosind graficul să se rezolve inegalitățile

$$\frac{2x - 3}{3 - x} \leqslant 2; \quad \frac{2x - 3}{3 - x} > 5 - 2x.$$

Să se rezolve inegalitățile și independent de grafic.

* * *

5375. Se consideră cercul $x^2 + y^2 - 1 = 0$; și parabola $y^2 = x - 1$; tangente în $A(1,0)$. O dreaptă variabilă ce trece prin A taie cercul în M și parabola în N. Paralela din M la axa parabolei și perpendiculara din N pe aceeași axă se întîlnesc într-un punct P. Să se determine și să se construiască grafic locul geometric al acestui punct.

C. Săndulache, Bacău

5376. Dreapta $(\triangle)$ de ecuație $x + y - 1 = 0$ taie axa Ox în A. Fie M un punct variabil pe această dreaptă $(\triangle)$. Din M se duce dreapta $(\triangle_1)$ perpendiculară pe $(\triangle)$ iar din A se duce dreapta $(\triangle_2)$ paralelă cu OM. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor $(\triangle_1)$ și $(\triangle_2)$.

C. Săndulache, Bacău

5377. Fiecare piesă de domino a unui joc de domino este împărțită în două părți marcate de la 0 la 6 puncte, cele două părți putînd sau nu, să poarte același număr de puncte. Toate piesele de domino sînt diferite.

a) Să se arate că numărul pieselor de domino ale unui joc sînt în mod necesar, 28. Pentru jucători iau fiecare cîte 6 piese de domino.

b) Care este — pentru fiecare jucător — probabilitatea de a avea trei duble?

c) Care este probabilitatea pentru ca nici un jucător să nu aibă nici piesa de dublu șase, nici cea de dublu cinci, nici cea de dublu patru?

d) A se relua chestiunea de la punctul a) presupunînd un joc de domino compus după aceiași lege, numerele marcate pe fiecare jumătate de piesă putînd lua toate valorile între 0 și 7.

(Bacalaureat, Etiopia, iunie, 1961)

5378. Fie punctele A, B, C pe un cerc și punctele D pe AB și E pe CD, astfel că $AD = mDB$ și $DE = nEC$, unde m și n sînt numere pozitive constante. Dacă A este fix, iar B și C mobile, respectiv cu vitezele v_B și v_C, să se găsească locul geometric, viteza și condițiile imobilității punctului E.

Tudor Zamfirescu, sudent București

5379. Într-un sistem de coordonate rectangulare să considerăm parabola $y^2 = 6x$, dreapta (D), $2y = x$, care taie parabola a doua oară în punctul P și un punct oarecare M de pe dreapta (D). Dreapta care trece prin punctul M și este paralelă cu axa Ox, taie parabola în punctul N. a) Să se determine și să se reprezinte grafic locul geometric al centrului de greutate al triunghiului OMN, cînd M descrie dreapta (D). b) Să se determine locul punctului M între punctele O și P astfel încît aria triunghiului OMN să fie maximă. Care este valoarea maximă a ariei?

Schwartz Valeria, Oradea

5380. Fie h_a, h_b, h_c și β_a, β_b, β_c înălțimile și bisectoarele unui triunghi oarecare ABC, duse respectiv din A, B, C. Să se arate că există relația:

$$\frac{h_a^2}{\beta_a^2} + \frac{h_b^2}{\beta_b^2} + \frac{h_c^2}{\beta_c^2} - 1 = 2\,\frac{h_a \cdot h_b \cdot h_c}{\beta_a \cdot \beta_b \cdot \beta_c}$$

Simon Petre, Tg. Mureș

5381. Să se demonstreze că media geometrică a celor 12 segmente care unesc vîrfurile unui triunghi oarecare cu centrul cercului și cu centrele cercurilor înscrise, este egală cu media geometrică a laturilor triunghiului.

Fila Eugen, profesor Zalău

5382. Un șofer nerespectînd regula vitezei a fost oprit de un miliţian. Maşina, în cursul frînării a parcurs un drum de 15 m pînă la oprire. Șoferul susţinea că a mers cu viteza de 40 km/h. Miliţianul a găsit în maşină un vas cilindric umplut cu apă pînă la jumătate. Măsurînd dimensiunile vasului a găsit diametrul de 40 cm, înălţimea de 50 cm şi punctul cel mai înalt al părţii interioare udate era la 22 cm faţă de suprafaţa apei. După cîtva timp a făcut procesul verbal pentru amendă, pentru că după el viteza a depăşit valoarea de 60 km/h. Cine a avut dreptate?

Lőrincz Jozsef, Oradea

5383. Un schior pe apă cu greutatea de G este tras de o barcă cu motor cu o viteză v. Suprafaţa schiului este S; se scufundă cu totul în apă unde are greutatea G_1. Cît este unghiul format cu orizontala în timpul mişcării? Date: $G = 65$ kgf, $G_1 = 5$ kgf, $S = 2m^2$, $v = 5$ m/s, $c = 110$.

Schwartz Lajos, Oradea

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele lucrărilor scrise date la Olimpiada de matematică etapa finală, Bucureşti 11 iunie 1962

5384. Venitul lunar al unui muncitor este egal cu produsul dintre numărul de ore efectuate, salariul tarifar orar şi indicele de îndeplinire a normei, plus o indemnizaţie specială de 7 lei pentru fiecare zi muncă. În luna martie muncitorul a primit 1570,40 lei, în luna aprilie 1510 lei, iar în luna mai 1385,28 lei. Se consideră ziua de lucru de 8 ore. Se ştie că în luna aprilie a lucrat o zi mai puţin ca în martie iar în luna mai indicele de îndeplinire a normei obţinut a fost mai mic cu 0,2 faţă de fiecare din lunile precedente. Să se afle: a) Numărul orelor de muncă efctuate în fiecare lună; b) Salariul tarifar orar, c) Indicele de îndeplinire a normei în fiecare lună.

(Clasa a VIII-a) *Lucia Ţane*

5385. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = a$ şi $BC = b$ şi se consideră cercurile înscrise în triunghiurile ABC şi ACD cu centrele în O_1 şi O_2, avînd punctele de contact cu diagonala AC în T_1 şi T_2. a) Să se arate că patrulaterele OA_1CO_2; $O_1T_1O_2T_2$ şi BO_1DO_2 sînt paralelograme cu acelaşi centru. Dacă patrulaterul AO_1CO_2 ar fi romb, ce legătură ar exista între a şi b? Ce devin celelalte două patrulatere? b) Să se găsească pe latura CD un punct M astfel încît patrulaterul O_1CMO_1 să fie inscriptibil. Fie O_3 centrul cercului circumscris acestui patrulater. Să

se arate că triunghiul $O_1O_2O_3$ e dreptunghic. c) Să se calculeze lungimea segmentului T_1T_1 în funcție de a și b.

(Clasa VIII) *Corneliu Georgescu*

5386. a) Se dă ecuația în m:

$am(m-1)+(b-c)m+c=0$, cu rădăcinile m_1 și m_2.

Să se calculeze $m_1^3+m_2^3$ în funcție de a, b, c.

b) Pentru care valori ale lui m expresia

$$am(m-1)+(b-c)m+c$$

este minimă sau maximă și care sînt aceste extreme.

c) Să se arate că oricare ar fi m real și a, b, c laturile unui triunghi, există inegalitatea: $am(m-1)+(b-c)m+c>0$.

d) Să se arate poziția parabolei corespunzătoare funcției $y=ax(x-1)+(b-c)x+c$, față de axele de coordonate.

(Clasa IX) *C. Ionescu-Țiu*

5387. Se dau două cercuri fixe cu centrele respectiv în A și B, tangente exterior în punctul T și de rază respectiv a și b. Notăm cu P mijlocul segmentului T_1T_2 unde T_1 și T_2 sînt punctele de contact cu o tangentă exterioară cercurilor date. Un al treilea cerc tangent exterior celor două cercuri date în punctele R și S are centrul în C și raza c.

a) Să se arate că cercul circumscris triunghiului TRS este același cu cercul înscris triunghiului ABC. Fie I centrul acestui cerc și raza x.

b) $PT^2=ab$; c) $IA^2-IB^2=AB(CA-CB)$;

$$d)\ \frac{1}{x^2}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

e) Să se afle locul geometric al punctului I cînd a și b sînt constante, iar raza c variază.

(Clasa IX) *C. Ionescu- Țiu*

5388. Un vas plin cu apă are forma unei piramide patrulatere regulate a cărei apotemă este egală cu latura bazei și egală cu 2a. Inițial, vasul este ținut cu vîrful în jos și cu baza într-un plan orizontal. Se înclină apoi vasul așa fel încît înălțimea piramidei și una din apotemele bazei să rămînă în planul în care s-au aflat la început, iar înălțimea, în ultima ei poziție, să facă un unghi de 60° cu planul orizontal pe care stă vîrful piramidei. a) Ce fracțiune din cantitatea de apă se varsă prin această înclinare?

b) Să se arate că unghiurile pe care le fac, cu planul orizontal ce trece prin vîrful piramidei, două din muchiile laterale opuse, în ultima lor poziție, sînt complementare.

(Clasa X) *Corneliu Georgescu*

5389. a) Fiind date polinoamele:

$P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$ și $I(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$ să se arate că $P(x)$ se divide cu $I(x)$ și să se afle cîtul $Q(x)$.

b) Notăm cu $E(\alpha)$ expresia care se obține înlocuind în $Q(x)$ pe x^k prin $\cos k\alpha$, unde k ia valorile 1; 2; 3;... $(n-3)$; $(n-2)$. Să se determine valorile lui α pentru care $E(\alpha)=0$.

c) Să se determine suma pătratelor coeficienților polinomului $Q(x)$.

(Clasa X) *D. Flondor*, București

5390. Se consideră elipsa $3x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$. Se notează axa mică cu AB. Tangenta într-un punct M variabil pe elipsă și tangenta în A la elipsă se intersectează în Q. Fie N (diferit de A) punctul de contact al tangentei dusă din Q la cercul de diametru AB. Dreapta QN taie axa ox în P iar dreapta AM taie paralela prin Q la AB în L. a) Să se afle locul geometric al punctului I cînd P descrie elipsa. b) Să se arate că punctele B, N, M sînt colineare.

c) Să se demonstreze că dreptele OQ și AN se intersectează în punctul T situat pe perpendiculara în P pe AB. Să se afle locul punctului T.

(Clasa XI) *Gh. Popescu*, Lugoj

5391. Se consideră un con circular drept a cărui generatoare are lungimea l constată și sfera tangentă conului de-a lungul cercului său de bază.

a) Să se studieze variația volumului V cuprins între con și sferă, cînd unghiul $2x$ de la vîrful conului variază și să se determine extremele.

b) Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{3V}{\pi l^3}.$$

(Clasa XI) *Gh. D. Simionescu*

5392. Să se arate că:

$$\frac{\left(a - \frac{ax + aby}{by - ax}\right)^2 + \left(\frac{abx + bz}{ax - by}\right)^2}{\left(\frac{az + aby}{ax - by}\right)^2 + \left(b + \frac{abx + bz}{by \quad ax}\right)^2} = \left(\frac{ax + z}{by + z}\right)^2$$

(Anul I școli profesionale) *Em. Dogăroiu*, Brăila

5393. Patru plăci egale, în formă de triunghi isoscel, formează o piramidă regulată, cu latura bazei a și muchia $2a$. Plăcile sînt articulate în vîrful V al piramidei, muchiile piramidei nefiind sudate. Se depărtează fețele laterale și se fixează introducînd alte patru plăci, tot triunghiuri isoscele, cu baza $\frac{a}{2}$, în așa fel încît se formează o piramidă octogonală, a cărei bază are alternativ laturile a și $\frac{a}{2}$.

a) cu cît este mai mică înălțimea piramidei octogonale față de înălțimea piramidei cu baza patrată?

b) Să se calculeze volumul celor două piramide.

(Anul I școli profesionale) *O. Sacter*

5394. O bucată de tablă are forma unui patrulater $ABCD$, cu $AB = AD$ și $CB = CD$. Din această bucată de tablă se taie un trapez, ale cărui baze sînt paralele cu diagonala BD și la egală distanță de BD. Se notează cu a diagonala BD, cu H și h respectiv înălțimile triunghiurilor isoscele ABD și CBD și cu x distanța de la fiecare bază a trapezului, la diagonala BD.

a) Să se calculeze x în funcție de h în cazul cînd aria trapezului este o treime din aria patrulaterului de tablă $ABCD$ și $H=3h$. b) Presupunînd H și h oarecare ($H>h$), să se determine trapezul de arie maximă care se poate tăia din bucata de tablă $ABCD$. (Bazele trapezului tot la distanțe egale de BD).

c) Dacă se notează cu x_0 valoarea lui x în acest caz să se arate că $\frac{1}{x_0}=\frac{1}{h}+\frac{1}{H}$.

(Anul I școli tehnice de maiștri) *Gh. D. Simionescu*

5395. La o GAC un teren de 795 ha, s-a semănat cu grîu, porumb și sfeclă. Se întreabă ce întindere a fost semnată separat cu grîu, porumb și sfeclă știind că s-a repartizat munca la 6 brigăzi astfel: primei brigăzi i s-a dat să lucreze $\frac{1}{3}$ din suprafața semănată cu grîu, celei de a doua brigăzi $\frac{43}{75}$ din cea semănată cu porumb și celei de a treia $\frac{1}{9}$ din terenul semănat cu sfeclă, iar ultimelor brigăzi le-a rămas întinderi egale de porumb, grîu și sfeclă. b) Știind că în anul 1961 producția de porumb a fost 3240 kg la hectar iar pentru anul 1962 aplicîndu-se metode perfecționate se prevede o producție de 5000 kg boabe la hectar să se afle cu cît la sută va crește producția de porumb.

(Anul IV școli pedagogice) *M. Cîrje*, Bacău

5396. a) Un stîlp este înfipt vertical în pămînt; partea rămasă deasupra solului are înălțimea $AB = h$. Un observator vizează din punctul O (OA este orizontală) către A, către B și către punctele E, F care împart pe AB în trei părți egale ($AE=EF=FB$). Se notează $\sphericalangle ACE = \alpha$; $\sphericalangle EOF = \beta$; $\sphericalangle FOB = \gamma$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ în funcție de h și de $OA = a$. b) Se presupune stîlpul AB înfipt oblic în pămînt astfel încît face cu verticala AH unghiul θ. ($\sphericalangle OAB = 90° - \theta$).

Păstrînd aceleași notații și presupunînd că OA, AB, AH sînt în același plan vertical să se calculeze și în acest caz $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, în funcție de a, h și θ. c) Să se determine unghiul θ astfel ca să avem $\beta = 30°$ în cazul cînd $3a = 2h$.

(Anul I maiștri și anul IV școli pedagogice) *Gh. D. Simionescu*

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V—VII*)

E: 1857. Un patrat $ABCD$ are latura a. Fie E mijlocul laturii BC, iar F un punct pe CD așa fel ca $CF = 2FD$. Să se calculeze distanța de la vîrful A la dreapta EF.

* * *

*) V (E: 1859, 1860, 1863, 1865); VI E: 1857, 1858, 1862, 1864, 1866); VII (E: 1861, 1867, 1868, 1869, 1870). Soluțiile se primesc pînă la 1.11.1962.

E : 1858. Într-o echipă de săpători unul a săpat 6 m^3, iar ceilalți cîte 10 m^3. Dacă fiecare ar fi săpat cîte 8 m^3 ar fi rămas nesăpați 24 m^3. Cîți metri cubi s-au săpat în total ?

* * *

E : 1859. Se împarte 4373 și 826 printr-un același număr x întreg și se obține ca rest respectiv 8 și 7. Care este x ?

* * *

E : 1860. Să se arate că fracția $\frac{4859}{623}$ este ireductibilă.

* * *

E : 1861. Un triunghi oarecare are cunoscute înălțimile h_a, h_b, h_c și perimetrul $2p$. Să se exprime aria triunghiului și raza cercului înscris folosind formula care dă aria triunghiului cînd se cunoaște o latură și înălțimea corespunzătoare.

C. Ionescu-Țiu

E : 1862. Să se calculeze perimetrul celui mai mare patrat a cărui arie este mai mică decît 1962 m^2, iar latura este exprimată printr-un număr întreg de decimetri. Care va fi latura celui mai mic patrat a cărui arie este mai mare decît 1962 m^2, iar latura este exprimată printr-un număr întreg de decametri ?

C. Ionescu-Țiu

E : 1863. Un strungar a avut de executat șapte axe cu diametrul de 54,7 mm, admițînd o eroare de cel mult 0,2 mm. La control s-au găsit următorii diametri : 55,1 ; 54,9 ; 54,6 ; 54,5 ; 54,4 ; 54,8 ; 55 mm. Cîte axe au fost acceptate ? Care dintre cele rebutate le-ar mai putea corecta la strung ?

* * *

E : 1864. Programul P.C.U.S. prevede pentru R.S.F.S.R. ca pînă în 1980 suprafața cultivată cu grîu și porumb pentru boabe la un loc să fie de 75000000 ha astfel ca la o producție de 40 q de porumb la hectar și 20 q grîu la hectar să se obțină 1640000000 q grîu și porumb. Să se afle suprafața ce se prevede a fi cultivată cu grîu și cu porumb.

D. M. Bătinețu, student București

E : 1865. Să se găsească două numere care au diferența 1018, iar c.m.m.m.c. este de 10 ori mai mare decît c.m.m.d.c. al lor.

Ilie Stănescu, profesor Sibiu

E : 1866. Trei muncitori execută o lucrare astfel : primul 40% din lucrare iar al doilea 1/3 din rest plus 5% din toată lucrarea. Să se afle cîte procente din lucrare a executat al treilea muncitor. Cît se cuvine fiecărui muncitor dacă costul întregii lucrări este de 400 lei.

Ilie Stănescu, profesor Sibiu

E : 1867. Să se construiască un unghi de 52°30′, numai cu rigla și compasul.

* * *

E : 1868. Prin două puncte date ale unui cerc să se traseze două coarde paralele astfel că suma lor să fie egală cu un segment dat.

* * *

E : 1869. Cum s-ar putea confecționa un semnalizator electric de foc, de exemplu sonerie de alarmă pentru semnalarea cazurilor de foc? Să se dea o schemă simplă a instalației.

Schwartz Lajos, Oradea

E : 1870. a) De ce se mărește volumul bulelor pe măsura apropierii de suprafața apei?

b) De ce „joacă" un scurt timp picătura de apă căzută pe suprafața incandescentă a sobei de fier în loc să se evapore imediat?

B. Vitályos Erzsébeth, Cluj

CĂRȚI NOI

George Polya. Matematica și raționamentele plauzibile

Două volume, Editura științifică București, 1962. Scrisă atrăgător și accesibil, cartea cunoscutului matematician de origine maghiară este consacrată procesului creației matematice. În primul volum, bogat ilustrat cu variate exemple, autorul se străduiește să răspundă la întrebări care preocupă deopotrivă pe cercetător, pe cel ce predă matematica și pe cel ce o învață. Toate aceste întrebări derivă din următoarea întrebare fundamentală: pe ce căi se dobîndesc cunoștințe noi în matematică, care este mecanismul descoperit în această știință? Răspunsul, surprinzător pentru neinițiați arată că în creația matematicianului joacă un rol important metodele de cercetare comune tutuuror științelor naturii: observația și generalizarea, ipoteza inductivă și experimentul.

În volumul al doilea, autorul încearcă să stabilească reguli și forme ale raționamentului inductiv, pe care el îl numește raționament plauzibil. Fiecare regulă se obține pornind de la exemple luate din matematică, fizică, astronomie, practica juridică sau medicină. Se indică posibilități de a evalua adevărul concluziilor acestor forme de raționament inductiv cu ajutorul calculului probabilităților. Volumul al doilea poate fi citit independent de primul.

Situîndu-se, în general, pe poziții materialiste, autorul își expune ideile într-un limbaj curgător și plin de umor, ușor de urmărit.

La sfîrșitul fiecărui capitol sînt propuse probleme (dîndu-se și soluțiile lor), gradate ca dificultate, a căror rezolvare permite înțelegerea mai profundă a ideilor autorului.

Materia ambelor volume este grupată în 16 capitole astfel: I. Inducția, II. Generalizare, particularizare, analogie, III. Inducția în geometria în spațiu, IV. Inducția în teoria numerelor, V. Diverse exemple de inducție, VI. O propoziție mai generală, VII. Inducția matematică, VIII. Maxime și minime, IX. Matematica fizică, X. Problema izoperimetrică, XI. Alte tipuri de argumente plauzibile, XII. Unele scheme remarcabile, XIII. Alte scheme și primele relații, XIV. Întîmplare, ipoteza rivală totdeauna prezentă, XV. Teoria probabilităților și logica raționamentului plauzibil, XVI. Raționamentul plauzibil în invenție și în învățămînt.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare, soluții primite pînă la 1 mai 1962)

PITEȘTI. S.m.1. Cl. V. Păunescu Ștefan (E: 1775, 90, 802, 06, 09, 11). Cl. IX. Hurduc Dan (5070, 90, 96, 110, 16, 31, 39, 60, 67, 70), Mihăilescu Iancu (5067, [illegible], 72, 73, 86—91, 95, 96, 98), Păunescu Gheorghe (5035, 70, 96, 110, 12, 16, 39, 41, 57, 60, 67). Cl. X. **Dumitru Petrică** (5064, 73, 74, 99, 100, 02, 05, 08, 18—25, 43, 45, 50, 52—55, 63—66, 93, 95, 96, 200), Florescu Costel (5067, 69, 70, 80, 84, 89, 100, 03, 05, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19—25, 35, 39, 41, 43, 44, 50), Ianculescu Radu (5069, 80, 72, 74, 80, 89, 90, 96, 103, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 35, 36, 39, 40, 44, 57, 60, 67, 69, 73, 92, 202), Mărgineanu Doru (5020, 24, 26—36, 45, 51, 54). Cl. XI. Bejan Gheorghe (5109—11, 13—19, 21, 25, 35, 39, 41, 43, 50, 53, 55), Maftei Ion (5080, 100, 10, 16, 43, 54, 55, 60, 63, 64), **Pătrașcu Gheorghe** (5073, 74, 99, 100, 01, 03, 05, 07, 08, 18—25, 43, 45, 49, 50, 52—55, 63—66, 93—98). Ș.m.2. Cl. VIII. Dumitrescu Elena (E: 1775, 802, 03, 06, 07) 08, 09, 11). Cl. X. Andreescu Marian (5069, 89, 96, 109, 10, 11, 15, 16, 25, 29, 35, 39, 41, 44, 60, 67, 75, 80, 88), Iancu Ion (5109, 18, 20, 26, 44, 49, 63, 70, 93, 95, 200), Matula Sidonia (5109, 10, 13, 15, 16, 35, 39, 49, 60, 61), Mitrache Ion (5069, 89, 96, 111, 16, 26, 29, 35, 39, 41, 44, 49, 60, 67, 75, 80, 88), Marinescu Gheorghe (5069, 84, 96, 109, 10, 16, 18, 26, 35, 41, 44, 49, 60, 67, 75, 80), Petrescu Margareta (5109, 10, 12, 13, 16, 29, 35, 39, 41, 44, 57—61, 67, 70, 75). Cl. XI. **Diaconescu Ion** (5018, 20—22, 24, 25, 27, 28, 31—33, 35, 41, 44, 49, 51—53, 59, 60, 64, 66—70), 72—74, 80, 89, 93, 98—100, 03, 05, 08, 10—13, 15—22, 24, 25, 29, 35, 39, 41, 43—46), Zamfir Cornel (5021, 28, 29, 31, 33, 60, 67—70, 72—74, 80, 84, 86, 89, 92, 93, 96, 98—100, 03—07).

PLOIEȘTI. **Șc. de 7 ani nr. 12.** Cl. VII. Steriu Dan (E: 1776, 77, 80, 90, 99, 801—04, 06, 07), Vidu Nicolae (R: 1775, 78, 79, 98, 801—03, 06, 08, 11). **S.m.1.** Cl. VI. Bretcanu Sabina (E: 1801—06). Cl. VII. Alecu Georgeta (E: 1802, 03, 06, 07—13), Butufei Sonia (E: 1762, 801—09), Petre Sorin (E: 1790, 97, 98, 801, 02, 03, 06—10), Popescu Lidia (E: 1799, 802, 03, 06—12), Pîrvulescu Constantin (E: 1775, 79, 90, 91, 803—05, 07, 10, 12), Tănăsescu Octavian (E: 1801—03, 06—09, 11). Cl. VIII. Circioiu Victoria (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 11), Dumitrescu Gabriel (E: 1776—78, 802, 03, 06, 07, 09, 15), Ionescu Paul (E: 1801—03, 06, 07, 09, 11, 12), Staicu Gheorghe (5073, 99, 103, 07, 18, 20, 23, 45, 50, 52, 53, 64, 93, 95, 200), Vasilescu Ion (5073, 99, 107, 18, 20, 21, 23, 45, 49, 52, 53, 57, 59, 69, 71, 79, 81, E: 1807, 09, 10, 10, 14). Zara Dan (E: 1775, 76, 77, 79, 80, 88, 90, 93, 95, 98, 800, 01—14, 18, 45, 70, 80, 93, 95). Cl. IX. Enescu Sorin (5032, 36, 45, 67, 72, 89, 96, 110, 60, 67). Cl. X Aisner Sergiu (5067, 68, 72, 73, 80, 82, 86, 90, 99, 100, 60, 63, 67, 69 70), Apostoleanu Anca (5074, 84, 86, 89, 109, 16, 21, 44, 49, 60, 63, 67, 89, 95, 202), Apostol Gheorghe (5067, 72, 74, 80, 86, 96, 99, 100, 39, 60, 63, 67, 69), Roșu Gheorghe (5067, 68, 70, 73, 74, 84, 86, 89, 100, 03, 10, 15, 16, 18—22, 25, 63, 93, 202), Weisman M. (5029, 41, 67, 69, 70, 73, 74, 82, 84, 86, 89, 96, 100, 03, 05, 09). Cl. XI. Brănici Doru (5068—82, 80, 86, 89, 96, 98, 109—11, 13—16, 26, 30, 35, 41, 44, 46, 49, 57—62, 67, 70, 75, 80, 83, 88, 89, 91, 202), **Butacin Nicolae** (5016, 59, 68—74, 77—80, 82, 87, 89, 92, 98, 99, 103, 05, 09—23, 25, 26, 30, 31, 35, 39, 41, 44—46, 49, 50, 52, 55, 58, 60, 61, 63, 67, 75, 83, 84, 89, 91, 202). **Lazea Adrian** (4937, 73, 5007, 11, 12, 20, 22, 36, 41, 52—54, 56, 59, 60, 67, 69—74, 92, 94, 96, 97, 100, 03—05, 07, 08, 11, 13, 16—25, 35), **Maxin Dan** (5067—72, 80, 83, 74, 85, 89, 98, 109—17, 35, 39, 41, 44, 46, 48, 57—62, 67, 69, 75, 80, 83, 89, 91, 202). Manole Gheorghe (5109, 10, 15, 16, 35, 39, 41, 44, 60, 61, 75, 83), Munteanu Mariana (5113, 17, 30, 35, 39, 44, 60, 83), **Peiulescu Marius** (5022, 29, 60, 68—74, 77—80, 87, 92, 103, 05, 09—23, 25, 26, 30, 31, 35, 39, 41, 44, 46, 49, 60, 61, 67, 75, 80, 83, 89, 91, 202), Vasilescu Dumitru (5109—11, 15—17, 26, 39, 41, 57—62, 67, 68, 70, 202), Vasilescu Luminița (5068, 71, 111, 13, 16, 17, 30, 35, 39, 44). **S.m.2.** Cl. VII. Gogonea Viorela (E: 1777, 78, 802, 03, 06, 07), Stan Emil (E: 1801—14). Cl. VIII. Gogonea Doina (E: 1775, 77—80, 802, 06, 07, 08), Goldstein Iolanda (E: 1775, 77—80, 802, 03, 06, 07, 09), Grumberg Brimonel (E: 1776, 801, 06, 10), Formache Constantin (E: 1775, 97, 98, 801, 06—10, 15), Fucks Anatol (E: 1775, 77, 78, 80, 90, 97, 98, 802, 03, 06, 07), Mocanu Rebeca (E: 1775, 77—80, 802, 03, 05, 06, 09, 10), Munteanu C. (E: 1775, 79, 801, 03, 07, 09, 14), Orășeanu Marilena (E: 1775, 79, 80, 86, 802, 03, 05, 07, 09, 11),

Stabilirea unor inegalități

În problema 4482 din G.M.F.-B nr. 12/1960, prof. C. Ionescu-Țiu stabilește relația:

$$(a_1^{m+p} + a_2^{m+p} + \ldots + a_n^{m+p}) \cdot (a_1^{m-p} + a_2^{m-p} + \ldots + a_n^{m-p}) \geqslant \quad (1)$$
$$\geqslant (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)^2$$

unde a_i sînt numere reale și pozitive.

Dacă punem condiția $m = 0$ și $p = 1$ relația (1) devine:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2 \quad (2)$$

adică relația din problema 4538 din G.M.F.-B nr. 1/1961.

a) În inegalitatea (2) facem $n = 3$ și obținem inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 9 \quad (3)$$

și dacă în această inegalitate facem $a_1 = h_a$, $a_2 = h_b$, $a_3 = h_c$ atunci obținem

$$(h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_e}\right) \geqslant 9 \quad (4)$$

Însă, $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_e} = \frac{1}{r}$ și deci inegalitatea (4) devine:

$$h_a + h_b + h_e \geqslant 9\, r.$$

b) Dacă în inegalitatea (3) înlocuim $a_1 = r_a$, $a_2 = r_b$, $a_3 = r_c$ obținem:

$$(r_a + r_b + r_c) \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) \geqslant 9 \quad (5)$$

însă, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_e} = \frac{1}{r}$ și relația (5) devine

$$r_a + r_b + r_c \geqslant 9\, r.$$

c) Înlocuim în (3) pe: $a_1 = \operatorname{ctg} A$, $a_2 = \operatorname{ctg} B$, $a_3 = \operatorname{ctg} C$ și obținem:

$$(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} A} + \frac{1}{\operatorname{ctg} B} + \frac{1}{\operatorname{ctg} C}\right) \geqslant 9$$

sau:

$$(\Sigma \operatorname{ctg} A) \cdot (\Sigma \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B) \geqslant 9 \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$$

și dacă ținem seamă că:

$$\Sigma \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B = 1$$

obținem inegalitatea:

$$\Sigma \operatorname{ctg} A \geqslant 9 \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$$

sau:

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \cdot \Sigma \operatorname{ctg} A \geqslant 9$$

d) Dacă în relația (3) punem $a_1 = a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{p}$ etc. și ținem seamă că $p = \frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$ obținem relația:

$$\sum \frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{r_b + r_c} \geqslant \frac{9}{2p}$$

e) Dacă notăm cu ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c puterile centrelor cercurilor exînscrise corespunzătoare laturilor a, b, c față de cercul circumscris triunghiului și înlocuim în relația (3) obținem:

$$(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c)\left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}\right) \geqslant 9 \qquad (6)$$

Acum ținem seamă că: $\varrho_a = OI_a^2 - R^2$ și $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ prin urmare, $\varrho_a = R^2 + 2Rr_a - R^2 > 0$ și deci sîntem în condițiile de existență ale relației (3). Analog rezultă:

$$\varrho_b = 2Rr_b, \quad \varrho_c = 2Rr_c$$

și deci:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = \frac{1}{2Rr}$$

prin urmare, inegalitatea (6) devine: $(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c)\frac{1}{2Rr} \geqslant 9$

$$\text{sau } \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c \geqslant 18Rr$$

și cum $R >$ a rezultă că:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c > 36r^2$$

f) În inegalitatea (2) facem $n = 2$ și obținem inegalitatea

$$(a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geqslant 4 \qquad (7)$$

Dacă a, b, c, d, sînt laturile unui patrulater inscriptibil, iar δ_1 și δ_2 diagonalele acestuia vom demonstra că:

$$4abcd \leqslant \delta_1^2\delta_2^2$$

În adevăr, dacă în inegalitatea (7) facem $a_1 = ac$, $a_2 = bd$ obținem:

$$(ac + bd)\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right) \geqslant 4 \text{ sau:}$$

$$(ac + bd)^2 \geqslant 4abcd \qquad (8)$$

Teorema lui Ptolomeu aplicată puatrulaterului ne dă:

$$ac + bd = \delta_1 \delta_2$$ și relația (8) devine:

$$4\,abcd \leqslant \delta_1^2 \cdot \delta_2^2$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

g) Dacă în inegalitatea (2) facem $n = 4$ obținem

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right) \geqslant 16 \qquad (9)$$

Înlocuim $a_1 = R_1$, $a_2 = R_2$, $a_3 = R_3$, $a_4 = R_4$ unde R_1, R_2, R_3, R_4 sînt razele sferelor exînscrise unui tetraedru și deasemenea R raza sferei înscrise. Cu aceste notații inegalitatea (9) devine:

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \geqslant 16 \qquad (10)$$

și dacă ținem seamă că: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{R}$ obținem:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geqslant 8R$$

Notînd cu h_1, h_2, h_3, h_4 înălțimile tetraedrului și ținînd seamă că $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{2}{R}$ obținem din relația (9) inegalitatea

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geqslant 8R$$

h) În inegalitatea cunoscută: $x + y + z + u \geqslant 4\sqrt[4]{xyzu}$ înlocuim

$$x = \frac{1}{R_1}, y = \frac{1}{R_2}, = z\,\frac{1}{R_3}, u = \frac{1}{R_4}$$

și obținem:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{R_1 R_2 R_3 R_4}} \qquad (12)$$

însă: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{R}$ și inegalitatea (12) devine:

$$\sqrt[4]{R_1 R_2 R_3 R_4} \geqslant 2R$$

Dacă în (11) înlocuim $x = \frac{1}{h_1}, y = \frac{1}{h_2}, z = \frac{1}{h_3}, u = \frac{1}{h_4}$ și ținem seamă că $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{2}{R}$, rezultă inegalitatea:

$$\sqrt[4]{h_1 h_2 h_3 h_4} \geqslant 2R$$

D. M. Bătineţu, student București

CALEIDOSCOP MATEMATIC

I. Relații între patrate perfecte

1. *Să se găsească un patrat perfect care să fie suma de trei patrate perfecte.*

O soluție avem pornind de la identitatea

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

și luînd pentru a, b valori care să facă termenul $2\,ab$ să fie un patrat. Luăm $a = m^2$, $b = 2n^2$ și identitatea devine:

$$(m^2 + 2n^2)^2 = (m^2)^2 + (2n^2)^2 + (2mn)^2$$

Numerele $x = m^2$, $y = 2n^2$, $z = 2mn$, $u = m^2 + 2n^2$ verifică egalitatea

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

deci, sînt soluții ale problemei propuse.

Aplicație — pentru $m = 3$, $n = 2$ avem: $17^2 = 9^2 + 8^2 + 12^2$

— O altă soluție avem dacă pornim de la identitatea

$$(a + b + c)^2 = (a + b - c)^2 + 4ac + 4bc$$

și punem $a = m^2$, $b = n^2$, $c = p^2$ sau numere proporționale cu acestea. Avem identitatea:

$$(m^2 + n^2 + p^2)^2 = (m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2$$

care ne duce la o soluție cu trei parametri numere întregi:

$$x = m^2 + n^2 - p^2\,;\quad y = 2mp\,;\quad z = 2np\,;\quad u = m^2 + n^2 + p^2$$

Aplicație: $m = 4$, $n = 2$, $p = 1$, $21^2 = 19^2 + 8^2 + 4^2$

2. *Să se găsească două patrate perfecte avînd suma lor egală cu suma altor două patrate.*

Soluția problemei se găsește pornind de la identitatea

$$(a + b - c)^2 + 4ac = (a - b + c)^2 + 4ab$$

în care punem $a = m^2$, $b = n^2$, $c = p^2$ și avem:

$$(m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 = (m^2 - n^2 + p^2)^2 + (2mn)^2.$$

Numerele întregi x, y, u și v care verifică relația cerută:

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

sînt termenii acestei identități, unde:

$$x = m^2 + n^2 - p^2\,;\quad u = m^2 - n^2 + p^2\,;$$
$$y = 2mp\,;\qquad\qquad v = 2mn.$$

Aplicație: $m = 7$, $n = 4$, $p = 2$; $61^2 + 28^2 = 37^2 + 56^2$

— O altă cale de a rezolva problema este folosind identitate

$$(mn + qs)^2 + (mq - ns)^2 = (mn - qs)^2 + (mq + ns)^2$$

care ne conduce la soluția cu patru parametri:

$$x = mn + qs\,;\qquad u = mn - qs\,;$$
$$y = mq - ns\,;\qquad v = mq + ns.$$

Aplicație: $m = 5$, $n = 4$, $q = 3$, $s = 2$; $26^2 + 7^2 = 14^2 + 23^2$

Adăugăm că, odată cu rezolvarea acestei probleme se rezolvă și următoarea: Să se găsească patrulaterele ortodiagonale care au laturile exprimate prin patru numere întregi.

3. *Să se găsească trei patrate perfecte, unul fiind medie aritmetică a celorlalte două.*

Numerele întregi x, y, z satisfac ecuația $x^2 + y^2 = 2z^2$ și pentru a le exprima, considerăm identitatea

$$(a^2 + 2ab - b^2)^2 + (b^2 + 2ab - a^2)^2 = 2(a^2 + b^2)^2$$

care ne conduce la soluția următoare:

$$x = a^2 + 2ab - b^2; \quad y = b^2 + 2ab - a^2; \quad z = a^2 + b^2.$$

Aplicație: dacă luăm $a = 3$, $b = 2$ găsim: $17^2 + 7^2 = 2(13)^2$

4. *Două numere întregi au media lor proporțională și media armonică exprimate prin numere întregi. Ce formă au acele numere?*

Dacă numerele căutate sînt x, y, z și h media lor armonică acestea satisfac ecuația

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{h}.$$

Să considerăm acum, egalitatea

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{2}{2ab}$$

care se verifică imediat. Comparînd termenii ei cu relația care exprimă media armonică deducem soluțiile întregi ale ecuației (1):

$$x = a(a + b), \quad y = b(a + b), \quad h = 2ab.$$

Dacă mai punem acum condiția ca numerele întregi x, y să aibă media proporțională ca un număr întreg, trebuie ca produsul lor $xy = ab(a + b)^2$ să fie patrat. Pentru aceasta, punem $a = m^2$, $b = n^2$ sau numere proporționale cu acestea și avem soluția

$$x = m^2(m^2 + n^2), \quad y = n^2(m^2 + n^2),$$

m, n fiind numere naturale oarecari.

— Dacă numerele m, n sînt de aceeași paritate, suma $m^2 + n^2$ este un număr par, iar numerele x, y, exprimate mai sus și media aritmetică, un număr întreg.

Aplicație: dacă luăm $m = 5$, $n = 3$ avem soluția $x = 850$, $y = 306$, care au media aritmetică 578, media geometrică 510 și media armonică 450.

II. Cîteva triunghiuri raționale

Un triunghi cu laturile numere raționale este numit *rațional*, cînd suprafața lui se exprimă tot rațional. Să observăm că într-un triunghi rațional, unghiurile lui exprimate prin funcții trigonometrice sînt exprimate rațional cu ajutorul laturilor; la fel raza cercului circumscris, a celui

înscris și a cercurilor exînscrise, (vezi G.M.F.-A, nr. 7, iulie 1955, pag. 375—380, articolul prof. C. Ionescu-Țiu).

Începem cu triunghiul dreptunghic. Un asemenea triunghi este rațional cînd catetele x, y și ipotenuza z verifică relația lui Pitagora $z^2 = x^2 + y^2$, în numere raționale.

Pentru a rezolva problema vom considera identitatea

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

în care punem $a = m^2$, $b = n^2$ și avem:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2.$$

Laturile triunghiului dreptunghic se exprimă sub formă rațională prin numerele:

$$z = m^2 + n^2;\ x = m^2 - n^2;\ y = 2mn. \tag{1}$$

În particular, dacă m, n iau valori întregi se obțin triunghiuri cu laturi numere întregi. Grupele de soluții întregi (x, y, z) se numesc numere pitagorice.

Să observăm că dacă T_0 (x_0, y_0, z_0) este o grupă de numere pitagorice și numerele proporționale: kx_0, ky_0, kz_0 au aceiași proprietate și dau naștere la triunghiuri asemenea cu triunghiul fundamental T_0 ale cărui laturi sînt numere pitagorice prime între ele. Ca să obținem numai triunghiul T_0 este necesar să luăm pentru m și n numere prime între ele și de paritate diferită. Astfel, cînd m, n sînt numere de o cifră formulele (1) dau 18 triunghiuri T_0.

— Prin alipirea a două triunghiuri dreptunghice raționale ACD, ABD care au cateta AD comună, formăm un triunghi rațional.

Într-adevăr, dacă aria S a triunghiului ABC se exprimă rațional în funcție de laturile a, b, c atunci înălțimea AD se exprimă rațional, precum și segmentele CD, BD acestea fiind date de relațiile:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD;\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD.$$

Soluția problemei este dată de următoarele identități:

$$(m^2n^2 + q^2s^2)^2 - (m^2n^2 - q^2s^2)^2 = (2mnqs)^2,$$
$$(m^2q^2 + n^2s^2)^2 - (m^2q^2 - n^2s^2)^2 = (2mnqs)^2,$$

care dau laturile triunghiurilor dreptunghice ACD, ABD. Luăm anume

$$b = m^2n^2 + q^2s^2, \qquad c = m^2q^2 + n^2s^2.$$
$$CD = m^2n^2 - q^2s^2, \qquad BD = m^2q^2 - n^2s^2.$$
$$h = AD = 2mnqs$$

De aci deducem și latura $a = CD + BD$

$$a = m^2n^2 - q^2s^2 + m^2q^2 - n^2s^2 = (m^2 - s^2)(n^2 + q^2)$$

iar cu notațiile clasice avem

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = m^2(n^2 + q^2),$$

$$S = \frac{1}{2}ah = mnqs(m^2 - s^2)(n^2 + q^2),$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{nqs(m^2 - s^2)}{m},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{S}{p(p-a)} = \frac{nq(m^2 - s^2)}{ms(n^2 + q^2)} \text{ și analogele.}$$

Aplicație. Dacă luăm $m = 3$, $n = 2$, $q = s = 1$, avem: $a = 40$, $b = 37$, $c = 13$, $h = 12$, $S = 240$, $r = \frac{16}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{16}{15}$.

I. Teodorescu, profesor Galați

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4671

În ciocnirea elastică dintre un foton și un electron, fotonul este difuzat în direcția θ și electronul deviat cu viteza v. Să se afle lungimea de undă a razei incidente (fotonul incident) și lungimea de undă a razei difuzate (fotonul difuzat). Se dau m, h, c. Aplicație: $\theta = 30°$ și $v = 1000$ km/s.

Emilian P. Moflic

Soluția autorului. Fotonul incident cedează o parte din energia sa pentru a da energia cinetică $\frac{mv^2}{2}$ a electronului, iar cealaltă parte a energiei sale este difuzată în direcția θ. Fiind o ciocnire elastică putem aplica legea de conservare a energiei:

$$h\gamma_0 = h\gamma + \frac{mv^2}{2}\ ;\quad h(\gamma_0 - \gamma) = \frac{mv^2}{2}.$$

Dar $\gamma_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ și $\gamma = \frac{c}{\lambda}$; $\frac{mv^2}{2} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0}ch$ sau: $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0} = \frac{mv^2}{2ch}$.

Dar în același timp, $\Delta\lambda$ depinde și de direcția θ:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m \cdot c}\sin\frac{\theta}{2},\quad \lambda\lambda_0 = \frac{4h^2\sin\frac{\theta}{2}}{m^2v^2}.$$

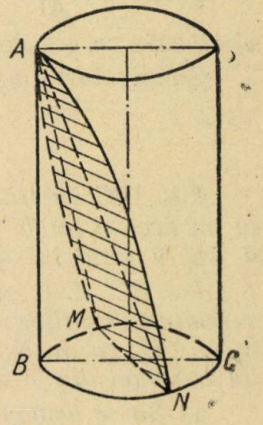
Rezolvînd sistemul precedent obținem:

$$\lambda = \frac{h}{m}\left[\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{c} \pm \sqrt{\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{c^2} + \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{v^2}}\right]$$

$$\lambda_0 = \frac{h}{m}\left[\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{c} \pm \sqrt{\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{c^2} + \frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{v^2}}\right].$$

Problema 4677

Pe cercul bazei superioare a unui cilindru cu volumul egal cu 1, se ia un punct A. Fie BC un diametru al bazei inferioare punctele A și B aparținînd aceleași generatoare. Fie MN un diametru al bazei inferioare perpendicular la BC. Să se demonstreze că volumul mărginit de suprafața cilindrului și planul care trece prin punctele A, M și N este cuprins între $\frac{1}{4}$ *și* $\frac{1}{6}$.



(Cl. X, etapa pregătitoare Olimpiada 1961, U.R.R.S.)

Soluție. Deoarece MN și BC sînt perpendiculare și AB e o generatoare AB și deoarece MN e diametru, porțiunea MBN este un semicerc. Deci volumul $ABMN$ este o copită cilindrică cu baza un semicerc, adică dacă r și h sînt respectiv raza și înălțimea cilindrului,

$V_{ABMN} = \frac{2}{3}r^2h$. Dar $\pi r^2h = 1$ și $r^2h = \frac{1}{\pi}$. Deci $V_{ABMN} = \frac{2}{3\pi}$.

Dar $\frac{1}{6} < \frac{2}{3\pi} < \frac{1}{4}$, deoarece $3\pi < 12$ sau $\pi < 4$ și $3\pi > 8$ adică $\pi > 2\frac{2}{3}$.

Deci volumul din problemă e cuprins între $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{6}$.

Problema 4681

In orice piramidă a cărui vîrf se proiectează în centrul cercului înscris în bază, raportul dintre volum și aria laterală este egal cu produsul dintre 1/3 din raza cercului înscris în poligonul de bază și sinusul unghiului diedru de la baza piramidei.

(Cl. X, etapa pregătitoare Olimpiada 1961, U.R.R.S.)

Soluție. Fie $VA_1A_2A_3 \ldots A_n$ piramida, a cărei poligon de bază $A_1A_2 \ldots A_n$ este circumscriptibil. Înălțimea piramidei o vom nota cu „h", raza cercului înscris cu „r", perimetrul bazei cu „p". Observăm că, din teorema celor trei perpendiculare piciorul apotemei coincide cu punctul de contact respectiv al laturei poligonului cu cercul înscris. Deci toate apotemele sînt egale între ele și fie „l" lungimea lor. Avem $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ unde α este unghiul diedru de la baza piramidei.

Deci $V_{VA_1A_2 \ldots A_n} = \frac{S_{A_1A_2 \ldots A_n} \cdot h}{3} = \frac{prh}{6}$

Dar $Al_{VA_1A_2\ldots\ldots A_n} = \frac{pl}{2}$.

Deci $\frac{V_{VA_1A_2\ldots\ldots A_n}}{Al} = \frac{rh}{3l} = \frac{rh \cdot \sin\alpha}{3h} = \frac{r\sin\alpha}{3}$

adică ceea ce era de demonstrat

Soluție bună a dat *Popa Nicolae*, elev Focșani.

Problema 4682

Fie ABC un triunghi oarecare. Se rotesc laturile lui, în spre exterior, cu un același unghi α și anume: BC în jurul vîrfului B, CA în jurul lui C și AB în jurul lui A.

Fie BC', CA', AB' noile poziții ale laturilor. Se notează cu D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, AB, cu D', E', F' mijloacele laturilor B'C', C'A', A'B', cu M, N, P mijloacele segmentelor AA', BB', CC' și cu L piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC. Se cere:

a) *Să se demonstreze că triunghiul MLN este dreptunghic.*

b) *Să se afle locurile geometrice ale intersecțiilor perechilor de drepte (ML, BP) și (NL, CC') cînd α variază.*

c) *Să se afle locul geometric al mijlocului k al segmentului MN cînd unghiul α variază.*

d) *Să se arate că punctele F, K, F' sînt coliniare și să deducă de aci locul geometric al lui F', mijlocul laturei A'B'.*

e) *Să se demonstreze că F'D și AC' sînt paralele și să se deducă de aci că centrul de greutate al triunghiului A'B'C' coincide cu centrul de greutate G al triunghiului ABC, oricare ar fi unghiul α.*

Gh. D. Simionescu

Soluție. a) Patrulaterul *ALCM* și *ALBN* sînt inscriptibile, deci

$$\sphericalangle ALM = \sphericalangle ACM = \frac{\alpha}{2} \text{ și } \sphericalangle BLN = \sphericalangle BAN = \frac{\alpha}{2},$$

de unde rezultă

$$\sphericalangle MLN = \sphericalangle ALB + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle ALB = 90°$$

b) *LN* și *BP* sînt paralele deoarece formează cu *BL* unghiuri alterne interne egale cu $\frac{\alpha}{2}$. Deci *ML* și *BP* sînt perpendiculare și *NL* și *CC'* sînt perpendiculare.

Dacă notăm intersecțiile respective cu *U* și *V*, atunci *U* descrie cercul de diametru *BL*, iar *V* cercul de diametru *LC*.

c) Cercul *MLN* are centrul în *K*, iar cercurile *ALBN*, *ALCM* în *F* și *E*. Secantele comune ale cercului *MLN* cu celelalte două cercuri sînt *LN* și *LM*, deci dreptele care unesc centrele corespunzătoare vor fi perpendiculare pe aceste secante.

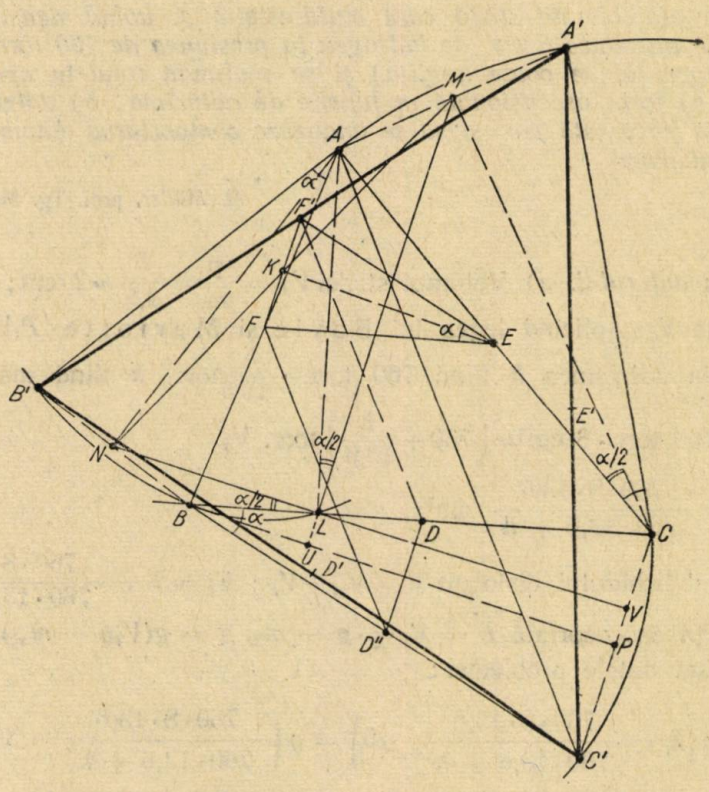
Rezultă KF perpendicular pe LN, KE perpendicular pe LM, și deci $\sphericalangle EKF = 90°$.

Deoarece E și F sînt fixe, locul punctului k este cercul cu diametrul EF.

d) Întîi trebuie observat că $\sphericalangle FEK = \frac{\alpha}{2}$ deoarece FE paralel cu BC și EK paralel cu LN.

Proprietatea din enunț se poate demonstra în două feluri:

a) Sau se observă că $MF' = \frac{1}{2} AB' = \frac{1}{2} AB$ și $ME = \frac{1}{2} AC$ iar $\sphericalangle F'ME = \sphericalangle A$ și deci triunghiurile $MF'E$ și AFE sînt egale, deci EK



este bisectoarea în triunghiul isoscel FEF' iar K este mijlocul segmentului FF'.

b) Sau se consideră patrulaterul $MF'NF$ care are laturile MF' și NF egale și paralele, deci diagonalele se taie în părți egale, iar FKF' sînt coliniare și K este mijlocul lui FF'.

Deoarece $F'E = EE = \frac{1}{2} BC = \text{const.}$ locul lui F' este cercul cu centrul E, de rază $\frac{1}{2} BC$.

c) Notăm cu D'' mijlocul lui BC'. Avem: triunghiurile FEF' și BDD'' sînt egale și deci FF' și DD' sînt paralele, iar FF' este paralelă cu DD''.

Figura $FF'DD''$ este paralelogram, și deci $DF'=DD''$ care unește mijloacele laturilor BA, BC', deci $F'D$ este paralelă cu AC' și egală cu $\frac{1}{2}AC'$. Atunci diagonalele trapezului $AF'DC'$ *se taie în raportul* $\frac{1}{2}$. Însă aceste diagonale sînt AD și $C'F'$ mediane în cele două triunghiuri, iar punctul lor comun G este centrul de greutate al fiecăreia.

Problema 4684

Într-un alambic de sticlă care cîntărește 5 g, avînd densitatea de 2,5 g/cm³ se introduce 8 cm³ de hidrogen la presiunea de 760 torr, (Greutatea hidrogenului se poate neglija) și se scufundă totul în apă. Să se calculeze: a) forța ascensională în funcție de adîncime; b) adîncimea la care această forță este zero și să se analizeze comportarea alambicului în jurul acestui punct.

M. Müller, prof. Tg. Mureș

Soluția autorului. a) Volumul sticlei $V_{st}=\frac{p}{m}=\frac{5}{2,5}=2$ cm; volumul gazului este V_g Aplicînd legea lui Boyle și Mariotte, $P_1V_1=P_2V_2$, presiunea la adîncimea h fiind 760 torr $+\frac{h}{13,6}$torr, h fiind măsurat în milimetri, 760 torr · 8 cm³ $=\left(760+\frac{h}{13,6}\right)$ torr. V_2.

Deci, $V_g=\frac{760\cdot 8\cdot 13,6}{760\cdot 13,6+h}$ cm³.

Volumul lichidului dislocuit $V_t=V_{st}+V_g$; $V_t=2+\frac{760\cdot 8\cdot 13,6}{760\cdot 13,6+h}$.

a) Forța ascensorială $F=V_t\cdot\varrho\cdot g-m_{st}\,g=g(V_t\varrho-m_{st})$.
Înlocuind datele problemei:

$$F=g\left(2+\frac{760\cdot 8\cdot 13,6}{760\cdot 13,6+h}-5\right)=g\left(\frac{760\cdot 8\cdot 13,6}{760\cdot 13,6+h}-3\right)=$$

$$=g\,\frac{760\cdot 13,6\cdot 8-3\cdot 760\cdot 13,6-3h}{760\cdot 13,6+h}=\frac{760\cdot 5\cdot 13,6-3h}{760\cdot 13,6+h}.$$

b) $F=0$; $760\cdot 5\cdot 13,6-3h=0$.

$$h=\frac{760\cdot 5\cdot 13,6}{3}+\frac{3800\cdot 13,6}{3}=\frac{51680}{3}=17\,226,6\text{ mm}$$

dacă $h>17,227$ avem $F<0$ alambicul se scufundă
$h<17,227$ „ $F>0$ alambicul se ridică
$h=17,227$ „ $F=0$ alambicul rămîne în echilibru.

Problema 4686

O sursă de curent avînd rezistența interioară de 1 ohm și tensiunea electromotoare de 12 V alimentează un circuit format din 10 becuri legate în paralel, purtînd inscripția: 3,5 V, 0,2 A și un reostat cu cursor avînd rezistența de 24 ohmi și lungimea de 30 cm. Să se determine poziția cursorului pentru ca becurile să funcționeze în regim normal.

M. Müller, prof. Tg. Mureș

Soluția autorului. Rezistența unui bec: $R_b = \frac{U}{I} = \frac{3,5}{0,2} = 17,5\ \Omega$.

Rezistența becurilor legate în paralel: $\frac{1}{R} = \frac{10}{R_b} = \frac{10}{17,5}$, deci $R = 1,75$ ohmi.

Intensitatea curentului este de $I = 10 \cdot 0,2\ A = 2\ A$.

Aplicînd legea lui Ohm pentru întregul circuit $I = \frac{E}{R + R_x + r}$, R_x fiind rezistența căutată. Deci, $R + R_x + r = \frac{E}{I}$, sau

$$R_x = \frac{E}{I} - R - r = \frac{12}{2} - 1,75 - 1 = 3,25 \text{ ohmi.}$$

Dacă rezistenței de 24 ohmi îi corespunde o lungime de 30 cm pentru 3,25 ohmi avem: $\frac{30}{24} \cdot 3,25 = \frac{5}{4} \cdot 3,25 = \frac{16,25}{4} = 4,0625$.

Deci, cursorul trebuie fixat la 4 cm de punctul B și la $30 - 4 = 26$ cm de punctul A.

Problema 4687

Fie $x_1, x_2, \ldots x_p$, p numere reale și pozitive, iar m și n două numere naturale.

Dacă $m \leqslant n$ să se stabilească inegalitatea:

$$(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_p^m)^n \geqslant (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n)^m.$$

C. I. T.

Soluție: Intrucît $\{x_1\}$ sînt reale și pozitive iar m este un număr natural, există un număr real și pozitiv y, astfel încît:

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_p^m = y^m \tag{1}$$

Datorită faptului că $\{x_1\}$ sînt pozitive iar $m \leqslant n$, din relația (1) deducem inegalitatea:

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n \leqslant y^n. \tag{2}$$

Ridicăm ambii membri din relațiile (1) și (2) la puterile n și m respectiv și obținem:

$$(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_p^m)^n = y^{mn} \tag{3}$$

și

$$(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n)^m \leqslant y^{mn} \tag{4}$$

care, comparate, ne dau relația din enunț:

$$(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n)^m \leqslant (x_1^m + x_2^m + \ldots + x_p^m)^n;\ (m \leqslant n.$$

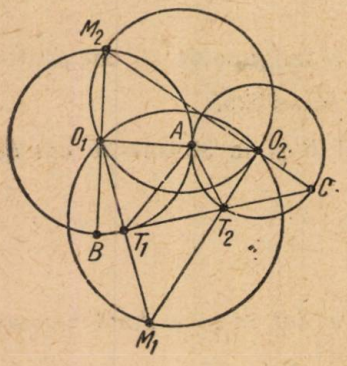
Soluție dată de *Tudor M. Gheorghe*, București.

Problema 4688

Fie cercurile O_1 și O_2 tangente în A și unghiul T_1AT_2 constant (T_1 pe cercul O_1 și T_2 pe cercul O_2), T_1T_2 taie cercurile O_1 și O_2 respectiv în B și C. Să se afle locurile geometrice ale punctelor M_1 și M_2 intersecțiile respective ale: O_1T_2 cu O_2T_2 și O_1B cu O_2C cînd unghiul T_1AT_2 se rotește în jurul lui A.

Locot. N. V. Pupăzan

Soluție. $\sphericalangle O_1M_1O_2 = \pi - \sphericalangle O_2O_1M_1 - \sphericalangle O_1O_2M_1$.
Dar din triunghiurile AO_1T_1 și AO_2T_2 avem:



$$\sphericalangle O_2O_1M_1 = \pi - 2\sphericalangle T_1AO_1, \text{ și}$$

$$\sphericalangle O_1O_2M_1 = \pi - 2\sphericalangle T_2AO_2.$$

Dar $\sphericalangle T_1AO_1 + \sphericalangle T_2AO_2 = \pi - A =$ = const.

Deci $\sphericalangle O_2O_1M_1 + \sphericalangle O_1O_2M_1 = 2\pi -$ $- 2\pi + 2A = 2A =$ const.

Deci $\sphericalangle O_1M_1O_2 = \pi - 2\hat{A} =$ const.

Deci locul geometric al lui M_1 este format din 2 arce de cerc capabile de $\sphericalangle \pi - 2A$ și simetrice față de O_1O_2.

$\sphericalangle O_1M_2O_2 = \pi - (\sphericalangle M_2BC + \sphericalangle M_2CB) = \pi - (\pi - \sphericalangle AT_1T_2 - \sphericalangle O_1AT_1 +$
$+ \pi - \sphericalangle AT_2T_1 - \sphericalangle O_2AT_2) = \pi - (2\pi - 2\pi + 2A) = \pi - 2A.$

Deci M_2 descrie aceleași arce de cerc ca și M.

Soluție bună a dat *Popa Nicolae*, elev Focșani.

Problema 4693

Să se demonstreze că dacă numerele 1961 și $a-b$ sînt prime între ele iar a^3-b^3 e divizibil cu 1961 atunci și $(a+b)^6-b^6$ e divizibil cu 1961.

* * *

Soluție dată de *D. M. Bătinețu*, absolvent București. Dacă 1961 și $a-b$ sînt prime între ele iar 1961 devide pe $\dfrac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$.

Pentru a arăta că divide și pe $(a+b)^6-b^6$ să vedem dacă această diferență e divizibilă cu a^2+ab+b^2.

Avem: $(a+b)^6-b^6=[(a+b)^3]^2-b^6=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)^2-$
$-b^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5$.

Împărțind pe:

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5$ la a^2+ab+b^2

rezultă cîtul: $a^4+5a^2b+9a^2b^2+6ab^3$ și restul zero, ceea ce ne arată că: $(a+b)^6-b^6$ e divizibil cu a^2+ab+b^2.

Ținînd cont că $a^2+ab+b^2=\mathfrak{M}.\ 1961$ rezultă că și:

$$(a+b)^6-b^6=\mathfrak{M}.\ 1961.$$

Problema 4694

Găleata unei fîntîni cu scripete se găsește la o adîncime de 12,8 m și în urma unui șoc începe să oscileze. Să se calculeze viteza cu care găleata e scoasă afară în mișcare uniformă, dacă în timp de 6,3 secunde perioada găleții scade cu 6,28 secunde.

C. Savu, profesor Urlați

Soluția autorului. $V=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{l_2-l_1}{6{,}3\,s}$; $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g}}$;

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}};\quad T_1-T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}(\sqrt{l_1}-\sqrt{l_2};)$$

$$6{,}28=\frac{6{,}28}{\sqrt{9{,}8}}(\sqrt{l_1}-\sqrt{l_2});\quad \sqrt{9{,}8}=\sqrt{l_1}-\sqrt{l_2};$$

$$\sqrt{l_2}=\sqrt{l_1}-\sqrt{9{,}8}=\sqrt{12{,}8}-\sqrt{9{,}8};$$

$$\sqrt{l_2}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(8-7);\ \sqrt{l_2}=\frac{1}{\sqrt{5}};\ l_2=\frac{1}{5}\ m.$$

$$V=\frac{12{,}8-0{,}2}{6{,}3}=\frac{12{,}6\ m}{6{,}3\ s}=2\ \frac{m}{s}.$$

Problema E: 1670

Costul unui aparat electrocasnic de 1800 lei, a fost plătit în monedă hîrtie de cîte 25 lei și de cîte 3 lei, în total plătind 182 monede hîrtie. Să se afle cîte bucăți au fost de 25 lei și cîte de 3 lei.

* * *

Soluție. Rezolvăm problema prin metoda ipotezelor. Presupunem că ar fi plătit numai monede de 25 lei în acest caz s-ar fi plătit: $25\times182=$ $=4550$ lei; prin urmare, mai mult decît în realitate cu: $4550-1800=2750$ lei.

Acest plus de 2750 lei provine din înlocuirea fiecărei monede de 3 lei cu una de 25 lei, deci, prin adăugarea în plus la fiecare monedă de 3 lei a încă $25-3=22$ lei în valoare. Sînt deci: $\dfrac{2750}{22}=125$ monede de 3 lei și $182-125=57$ monede de 25 lei.

Verificare: $125\times3+57\times25=375+1425=1800$ lei.

Problema E : 1674

a) *Să se calculeze de cîte ori în 24 de ore la un ceas cu secundar central, secundarul este bisectoarea unghiurilor formate de orar și minutar;*
b) *Să se calculeze unghiul format de două bisectoare interioare consecutive după ora 12.*

* * *

Soluție. a) Secundarul este bisectoare de atîtea ori de cîte ori el străbate o circumferință întreagă înmulțit cu 2, ținînd seama că secundarul este și bisectoare interioară și exterioară în timp de un minut. Deci, $N = 2 \cdot 60 \cdot 24 = 2880$ ori.

b) Considerăm un caz particular, atunci cînd orarul, minutarul și secundarul ceasului sînt suprapuse la ora 12. După un minut distanța dintre orar și minutar este de $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ secunde.

Să presupunem că după x secunde, după ce a trecut un minut, secundarul este din nou bisectoare interioară. În acest timp orarul străbate $\frac{x}{720}$ secunde, iar minutarul $\frac{x}{60}$ secunde. Deci, la distanța de $\frac{11}{12}$ secunde se mai adaugă și distanța $\frac{x}{60} - \frac{x}{720} = \frac{11x}{720}$ secunde. Deci, tot intervalul este de $\frac{11}{12} + \frac{11x}{720} = \frac{11x + 660}{720}$ secunde.

Secundarul străbate acest interval în $2x$ secunde. Deci:

$$\frac{11x + 660}{720} = 2x \text{ de unde: } x = \frac{660}{1429} \text{ secunde.}$$

Deci intervalul pe jumătate dintre orar și minutar este de:

$$\frac{11}{24} + \frac{11}{2 \cdot 720} \cdot \frac{660}{1439} = \frac{11 \cdot 1439 + 112}{24 \cdot 1439} = \frac{7985}{17 \cdot 268}.$$

Cum unui interval de 900 secunde îi corespunde un unghi de $\frac{\pi}{2}$ urmează că unui interval de $\frac{7975}{17 \cdot 268}$ secunde îi corespunde un unghi

$$\alpha = \frac{7975 \cdot \pi}{2 \cdot 900 \cdot 17 \cdot 268} = \frac{319\,\pi}{1243296} \text{ radiani.}$$

Problema E : 1676

În urma creșterii productivității muncii și a depășirilor de plan, treptat au scăzut prețurile de cost la diversele articole de larg consum. Astfel, un costum de haine bărbătesc, în 1959 a costat 810 lei; la începutul anului 1960 s-au aplicat — într-o perioadă scurtă de timp, două reduceri consecutive de cîte 5%; în trimestrul al III-lea s-a mai făcut o

reducere de 2%. Să se afle: a) cît costă același costum după ultima reducere? b) cîte procente reprezintă această triplă reducere de cost aplicată sumei reduse?

B Baieră, Păunești, Adjud

Soluția autorului. — Calculăm 5% din 810 lei : $\frac{5}{100}$, din 810 = 40,5. Aflăm costul după prima reducere: 810 lei — 40,5 = 769,5 lei.

Calculăm a doua reducere de 5%, $\frac{5}{100}$ din, 769,5 = 38,475 lei. Aflăm costul costumelor după a II-a reducere: 769,5 — 38,475 = 731,025 lei. Calculăm a treia reducere de 2%, $\frac{2}{100}$ din 731,025 = 14,6205 lei. Aflăm costul costumului după a III-a reducere: 731,025 — 14,6205 = 716,4045 lei.

Aflăm cîte procente reprezintă suma redusă: 810 — 716,4 = 93,6 lei, deci,

$$x = \frac{93{,}6 \cdot 100}{810} = 11{,}5\%.$$

Problema E: 1677

Pentru 20 kg. fidea; 10 kg. zahăr și 5 kg. unt s-a plătit 300 lei. Cît costă cîte un kg. din fiecare fel de produs dacă, un kg. de zahăr costă cît 2 kg. fidea, iar un kg. de unt costă cît 2 kg. de zahăr?

E. Tilică, profesor Focșani

Soluție. Presupunem că toată cumpărătura ar fi numai fidea; vom avea: 20 kg fidea; 10 kg zahăr fac 20 kg fidea; 5 kg unt fac 10 kg zahăr fac 20 kg. fidea. Deci vor fi 60 kg. fidea care costă 300 lei, 1 kg. fidea costă 300 lei : 60 kg = 5 lei, 1 kg. zahăr costă 5 lei $\times$ 2 = 10 lei și 1 kg. unt costă 10 lei $\times$ 2 = 20 lei.

Problema 818 (MFL)

Care este puterea de așchiere la strungirea unui ax de oțel cu diametrul d = 120 mm. care se rotește cu o turație de n = 400 rotații pe minut, iar forța de așchiere este de 600 kgf?

Rusu Ioan, Cluj

Soluția dată de eleva *Paál Mária Éva* din cl.VIII-a a școlii medii din Petroșeni. Puterea de așchiere este:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{F \cdot 1}{t} = \frac{F \pi d n}{t} = \frac{600\,kgf \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}12\,m \cdot 400}{60\,s} =$$

$$= 1507{,}2\,\frac{mkgf}{s} \approx 20{,}1\ CP.$$

Problema 819 (MFL)

Să se determine densitatea metanului la o presiune de 820 torr și la temperatura de 15°C.

Schwartz Lajos, Oradea

Soluția dată de eleva *Wantuch Edit* școala medie mixtă Marghita.

Densitatea este: $\varrho = \frac{m}{V}$. Aplicăm ecuația lui Mendelejev — Clapeyron și obținem:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = \frac{820 \text{ torr} \cdot 16 \frac{g}{\text{mol}}}{0{,}082 \cdot 760 \frac{l \text{ torr}}{\text{grad} \cdot \text{mol}} \cdot 288{,}15°K} = 0{,}73 \frac{g}{l}.$$

Soluția dată de elevul *Kovács Sándor* din cl. XI-a a școlii medii „Ady-Șincai", Cluj.

În stare normală ($t = 0°C$, $p = 1$ atm) densitatea gazului este dată de relația:

$$\varrho_0 = \frac{M}{V_0},$$

unde M este greutatea moleculară și V_0 este volumul molar al gazului.

Variația densității gazului este

$$\varrho = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t} \varrho_0.$$

Înlocuind valoarea lui ϱ_0, obținem:

$$\varrho = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t} \cdot \frac{M}{V_0} = \frac{820}{760} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{273}} \cdot \frac{16 \frac{g}{\text{mol}}}{22{,}41 \frac{\text{dm}^3}{\text{mol}}} = 0{,}73 \frac{g}{\text{cm}^3} =$$

$$= 7{,}3 \cdot 10^{-4} \frac{g}{\text{sm}^3}.$$

Problema 820 (MFL)

Într-un cilindru de fier în care se află mercur se introduce o bucată de platină, astfel că mercurul va umple complect cilindrul. 1. Să se găsească raportul maselor platinei și mercurului, astfel ca pentru orice temperatură cilindrul să rămînă plin, fără să se verse mercurul. 2. Să se găsească soluția pentru care problema este posibilă.

Se cunosc x, μ și λ coeficienții de dilatare de volum ai cilindrului, mercurului și platinei, precum și ϱ', ϱ'' densitatea platinei și a mercurului.

La examenul de admitere Universitatea Cluj, 1961

Soluția dată de elevul *Zsigmond Gyula* din cl. XI-a a școlii medii „Petőfj Sándor" — Cristurul Secuiesc.

1. Fie V volumul cilindrului la o temperatură oarecare, iar V_1 volumul platinei și V_2 volumul mercurului. Putem scrie:

$$V = V_1 + V_2.$$

Volumul cilindrului de fier la temperatura t este:

$$V_t = V(1 + kt) = \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}\right)(1 + kt).$$

Volumul platinei este:

$$V_{1t} = V_1(1 + \lambda t) = \frac{m_1}{\varrho_1}(1 + \lambda t),$$

iar volumul mercurului:

$$V_{2t} = V_2(1 + \mu t) = \frac{m_2}{\varrho_2}(1 + \mu t).$$

Înlocuind acestea în prima ecuație, avem:

$$\left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}\right)(1 + kt) = \frac{m_1}{\varrho_1}(1 + \lambda t) + \frac{m_2}{\varrho_2}(1 + \mu t),$$

de unde

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(\mu - k)\,\varrho_1}{(k - \lambda)\,\varrho_2}.$$

2. Se știe că raportul maselor trebuie să fie pozitiv, deci problema este posibilă în cazul, dacă

$$\mu > k > \lambda.$$

În cazul celor trei materii date în problemă, această condiție este satisfăcută.

Problema 821 (MFL)

Un voltametru cu anod de Ag, care conține soluția de $AgNO_3$, este legat în serie cu o rezistență de 25 ohmi și cu o bobină lungă de 20 cm, cu 100 spire, avînd miez de fier. Rezistența se află într-un vas care conține 0,5 l apă la tempeatrura de 18°C. Prin circuit trece un curent electric care transportă la catod $5 \cdot 10^{21}$ ioni de Ag, încălzește apa din vasul ce conține rezistența și produce în miezul de fier o inducție magnetică de 31400 gauss. Se cere: a) Cantitatea de Ag depusă la catod. b) Intensitatea curentului și timpul cît circulă. c) Pînă la ce temperatură se încălzește apa din vas. Se neglijează capacitatea calorică a vasului.

Olimpiada de fizică 1961, cl. X-a

Soluție dată de eleva *Gajzágá Mária* din Zalău.

a) Numărul electronilor în mișcare corespunde cu numărul ionilor de argint. Valența argintului fiind unu, sarcina va fi:

$$q = n \cdot e = 5 \cdot 10^{21} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C.$$

Masa de argint depusă la catod este:

$$m = k \cdot q = 1{,}118 \frac{mg}{C} \cdot 5 \cdot 10^{21} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 894{,}4\ mg.$$

b) Se știe că la fier $\mu = 800$, și că inducția magnetică într-o bobină cu miez de fier este:

$$B = 4\pi\mu \frac{NI}{l},$$

de unde intensitatea curentului:

$$I = \frac{B \cdot l}{4\pi\mu N} = \frac{31\,400\ \text{Gs} \cdot 20\ \text{cm}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 100\ \text{spire}} = 0{,}625\ Bi = 6{,}25\ A.$$

Curentul circulă timp de

$$t = \frac{q}{I} = \frac{800\ C}{6{,}25\ A} = 128\ s.$$

c) Se știe că

$$\text{cm}\ (t_2 - t_1) = 0{,}24\ I^2Rt,$$

temperatura finală a apei este:

$$t_2 = \frac{0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t}{\text{mc}} + t_1 = \frac{0{,}24 \cdot (6{,}25)^2 \cdot 25 \cdot 128\ \text{cal}}{500g \cdot 1 \frac{\text{cal}}{g^\circ C}} + 18^\circ C = 78^\circ C.$$

Problema E. 753 (MFL)

Pentru verificarea balanțelor, greutățile se mută în diferite locuri pe taler. În ce caz aceasta influențează indicațiile balanței?

Dezső Ervin, Cluj

Soluția dată de elevul *Demény Pál* din cl. VI-a a școlii medii „Bethlen Gábor" — Aiud. În cazul balanțelor precise rezultatele măsurării nu depind de locul în care se află greutățile pe taler. În cazul balanțelor precise, suspensia talerelor este de așa natură, încît centrul de greutate al talerului chiar și cu încărcătură se află în planul vertical ce trece prin punctul de suspensie al talerului. Dacă această condiție nu este îndeplinită, atunci prin mutarea greutății dintr-un loc în altul pe taler va aduce după sine indicații diferite ale balanței. În acest caz se schimbă distanța dintre punctul de aplicație al forței și centrul de rotație. Asemenea balanțe nu sînt utilizabile.

Problema 754 E. (MFL)

Un sistem obișnuit de scripeți este format din 4 scripeți mobili și 4 ficși. Greutatea scripetelor mobili este de 6,6 kgf, iar încărcătura este de 125 kgf. Ce forță este necesară pentru ridicarea acestei greutăți? Cîți cai putere trebuie să aibă un motor pentru a putea ridica această greutate în timp de 2 minute la o înălțime de 30 m?

* * *

Soluția elevei *Székely Eleonóra* din Baia Mare. În cazul scripetului compus format din 4 mobili, pentru ridicarea unei greutăți (în cazul nostru $R = 125$ kgf $+ 6{,}6$ kgf $= 131{,}6$ kgf), trebuie să aplicăm o forță activă:

$$F = \frac{R}{8} = \frac{131{,}6}{8}\ kgf = 16{,}45\ kgf.$$

Lucrul mecanic efectuat de motor este:

$$L = R \cdot l \text{ sau } L = F \cdot 8l,$$

întrucît nu avem cîștig de lucru mecanic.

$$\text{Puterea } P = \frac{L}{t} = \frac{Rl}{t} = \frac{131{,}6\ kgf \cdot 30\ m}{120\ s} = 32{,}9\ \frac{kgm}{s} = 0{,}44 \text{ C.P.}$$

Problema E. 755 (MFL)

Ce putere este necesară pentru ca printr-un conductor de cupru cu lungimea de 1 km și diametrul de 5 mm să circule un curent cu intensitatea de 100 A?

* * *

Soluția elevului *Rusitzky Tibor*, cl. VII-a a școlii de 7 ani nr. 1 din Baia Mare.

Puterea este:

$$P = I \cdot U = R \cdot I^2.$$

Rezistența conductorului:

$$R = \varrho \frac{l}{s} = 0{,}0168\ \frac{\Omega mm^2}{m} \cdot \frac{1000\ m}{6{,}25 \cdot 3{,}14\ mm^2} = 0{,}865\ \Omega;$$

înlocuind:

$$P = 0{,}856\ \Omega \cdot 100^2 A^2 = 8{,}56\ kW.$$

PROBLEME PROPUSE*)

5397. Se dă un sistem de axe ortogonale. Fie A $(a,0)$ un punct fix pe axa Ox și B (o,n) un punct variabil pe axa oy. Se cere:
a) Să se scrie ecuația cercului de diametru AB; b) In punctele O și B se duc tangentele la acest cerc, care se intersectează în punctul P. Să se afle aria triunghiului POB; c) Să se găsească locul geometric al punctului P cînd B variază.

(Maturitate, iunie 1962, R.P.R.)

5398. Dintr-o bilă sferică de rază R se cere să se strunjească o piesă în formă de con circular drept, astfel încît pierderea de material să fie minimă. Să se exprime în funcție de R aria laterală a conului rezultat.

(Maturitate, iunie 1962, R.P.R.)

5399. Să se facă graficul funcției

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x + 1)(x - 2)}.$$

(Maturitate, iunie 1962, R.P.R.)

5400. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem $A = 2B$, atunci $a^2 = b(b + c)$.

Miron Oprea, Ploiești

5401. Forța principală de așchiere, forța de avans și forța de respingere care acționează asupra unui cuțit de strung au valorile de 900 kgf, 600 kgf și respectiv 700 kgf. Să se calculeze mărimile și direcția forței totale de așchiere care solicită cuțitul în următoarele cazuri: a) piesa este strunjită cilindric (lateral), și b) piesa e retezată (strunjire frontală).

Gh. I. Căpitan, profesor Anina

5402. Să se demonstreze că numărul $N = n^p - n$ este divizibil cu $6p$ pentru orice n natural și p prin $(p \geqslant 5)$. (Generalizarea problemei 5202).

Tudor Gheorghe, student București

5403. Să se arate că în orice triunghi suma patratelor a două laturi este mai mare sau cel puțin egală cu de patru ori aria sa.

I. Hadircă, profesor Breaza

5404. Să se rezolve ecuațiile:

$$\frac{\sin 9x \cdot \sin(12x - 30°) - 1}{\sin 9x + \sin(12x - 30°) - 2} = 0,$$

$$\frac{\sin(3x + 60°) + \sin(21x - 60°) - 2}{\cos(3x - 60°) - \cos(21x - 30°) - 2} = 0,$$

---

* VIII (5401, 5407, 5415, 5422); IX (5403, 5411, 5414, 5421, 5423, 5424); X (5400, 5402, 5404, 5406, 5409, 5412, 5417, 5418, 5420, 5425); XI (5397, 5398, 5399, 5405, 5408, 5410, 5413, 5416, 5619, 5426).

$$\sin(3x - 60°) \cdot \sin(21x - 60°) + 1 = 0,$$
$$\cos(3x + 30°) \cdot \cos(21x - 30°) - 1 = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

5405. Un cerc de centru și rază variabile rămîne tangent laturii unui unghi drept AOB, unde A și B sînt punctele de tangență. Fie C un punct pe acest cerc. Tangenta în C determină pe laturile OA și OB respectiv punctele M și N, iar bisectoarea unghiului drept determină pe MN punctul I. Se cere:

a) Să se determine poziția punctului C astfel ca pe tangenta MCN să fie satisfăcută relația $\frac{MI}{IN} = \frac{4}{3}$.

b) O dreaptă (Δ) paralelă cu OB taie pe OA în P și tangenta MN, determinată mai sus, în H. Să se determine locul geometric al punctului H pentru cazul cînd $OA \cdot OP = 1$.

C. Săndulescu, profesor Bacău

5406. Să se rezolve ecuația $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ în cazul cînd x, y, z, t, sînt termeni ai unei progresii aritmetice. Să se arate că există patru numere naturale consecutive x_0, y_0, z_0, t_0 care satisfac ecuația dată.

* * *

5407. În jurul a două planete se lansează pe orbite circulare la aceiași înălțime h, cîte un satelit artificial.

a) Ce relație există între vitezle circulare ale sateliților știind că planetele au axele egale, iar razele sînt R_1 și R_2, unde $R_1 > R_2$? Ce relație există între vitezele circulare ale sateliților dacă planetele ar avea razele egale, iar masa ar fi M_1 și M_2, unde $M_1 > M_2$?

I. N. Radu, profesor Tîrgoviște

5408. Într-un cerc dat (C) se duce un diametru fix AA'. Pe tangenta Δ dusă în A la cercul (C) se consideră un punct variabil M. Fie T punctul de contact al celei de a doua tangentă dusă din M la cercul (C) și P punctul de intersecție al dreptei MA' cu perpendiculara dusă din T pe AA'. Să se afle locul geometric al punctului P cînd punctul M descrie dreapta Δ.

15888 (Journal de mathématiques élémentaires)

5409. Să se determine valorile unghiului A cuprinse între 0° și 180° care verifică inecuația

$$\frac{-5\cos^2 A + 3\cos A + 3}{\cos A} < 1.$$

(Bacalaureat Antile, iunie 1961)

5410. Se stabilește o diferență de potențial $U = 200$ volți între catodul și placa unei diode Se neglijează viteza inițială a electronilor. În aceste condiții să se calculeze viteza electronilor cînd întîlnesc placa. Se dă: masa unui electron $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg; sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C.

(Bacalaureat, Franța 1961)

5411. Dacă a, b, c sînt trei segmente date, să se construiască expresia:

$$x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{abc(a+b+c)}}.$$

Bădescu Lucian, elev C-lung Muscel

5412. Pentru care valori ale lui x avem:

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{2(1+\sec x)}}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{2(1+\sec x)}}=\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}}.$$

C. Ionescu-Țiu)

5413. Se dă o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei l și cu înălțimea h. Notăm cu ABC și $A'B'C'$ respectiv baza de sus și baza de jos. Prin A se duce un plan Q paralel cu latura opusă $B'C'$. El secționează prisma după un triunghi AMN (M pe BB' și N pe CC').

a) Din A' se duce $A'P$ perpendiculară pe planul Q. Să se arate că punctul P este situat pe înălțimea AI a triunghiului AMN.

b) Să se determine poziția planului Q cînd P este conjugat armonic cu centrul de greutate al triunghiului AMN în raport cu A și I. Discuție. Să se calculeze segmentul CN cînd problema este posibilă. c) În cazul cînd există două plane Q în condițiile punctului 2, presupunem că unul din planele Q face cu planul $A'B'C'$ un unghi de 60°. Să se afle în acest caz, ce relație există între h și l și care este unghiul dintre cele două plane Q.

Anastasie Petrescu, Craiova

5414. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{y^{z-y}}{x^{z-y}\cdot y^{z-x}}=\frac{z^{z-y}}{y^{z-y}\cdot z^{y-x}}=\frac{x^z}{y^x}=\frac{y^{y-x}}{y^{z-x}}.$$

R. Bîrzan, student, Cluj

5415. Stația interplanetară sovietică a făcut înconjurul lunei și a fotografiat partea invizibilă de la o distanță de 7500 km. Știind că raportul volumelor lunei și pămîntului este 0,02, raza pămîntului 6400 km, iar masa lunei $7{,}3\cdot 10^{19}$ t și a pămîntului $6\cdot 10^{27}$ g, se cere: a) Viteza de rotație în jurul lunei a stației; b) de cîte ori este mai mare accelerația gravitațională a pămîntului la înălțimea de 7500 km decît a lunei la aceiași înălțime.

C. Dinulescu, profesor, Buzău

5416. Un vas conic gol, fără capac, cu pereții de grosime neglijabilă, plutește cuufndat pînă la deschiderea sa în lichidul unui bazin opac. Știind că vasul a fost construit cît mai încăpător, dar astfel ca suprafața sa în contact cu lichidul să nu poată fi văzut din aer, iar densitatea superficială (în g/cm³) a pereților vasului este egală cu densitatea în (g/cm³) a lichidului, să se calculeze capacitatea vasului. (Vitezele luminii în aer și lichid se iau respectiv 300.000 km/s și 200.000 km/s, iar greutatea aerului din vas se neglijează.)

Tudor Zamfirescu

5417. Se dă o piramidă exagonală regulată și fie $\alpha < \beta < \gamma$, unghiurile distincte formate de muchiile piramidei la vîrful acesteia. Să se demonstreze relația:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cdot\frac{\cos\gamma+1}{\cos\gamma-1}.$$

Ghica S. Anton, elev, Pitești

5418. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}=1.$$

C. Năstăsescu, elev, București

5419. Pe cercul de diametru AB se ia un punct mobil M. Fie P intersecția dreptei BM cu perpendiculara din A pe tangenta în M la cerc și Q intersecția dreptei AM cu perpendiculara din B pe tangenta din M. Să se afle: a) Locurile geometrice ale punctelor P și Q; b) locul geometric al mijlocului segmentului PQ.

Ioan Poru, profesor, Caransebeș

5420. Dacă laturile triunghiului ortic al unui unghi ABC sînt în progresie aritmetică atunci există relația: $\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}C = 3$.

Ionel Atanasiu, profesor, Gugești

5421. Într-un pahar de 250 cm^3 acoperit se găsesc 50 g apă la temperatura de 4°C. Să se calculeze numărul de molecule de apă care se găsesc în pahar în faza lichidă și în faza gazoasă. Presiunea de saturație a vaporilor de apă la 4°C este de 6,1 mm Hg. Densitatea apei lichide la 4°C este 1 $g \cdot cm^{-3}$.

Florin Vasiliu, elev, Bacău

5422. Să se arate că dacă $x + y + z = 1$, atunci:

$$x^3 + y^3 + z^3 + xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz.$$

* * *

5423. Se dă triunghiul ABC, unde $a > c$ și un punct M mobil pe latura BC. Să se calculeze aria triunghiului AMC pentru care raportul $\frac{AM^2}{BM}$ este minim.

N. Bebea, profesor, Pucioasa

5424. Se dă funcția $y = ax + b$ definită pentru x întreg pozitiv și diferit de zero. Să se afle coeficienții a și b știind că suma primelor n valori ale funcției este n^2.

Ilie Stănescu, profesor, Sibiu

5425. Printr-un fir de argint cu secțiunea de 0,03 mm² trece un curent de 0,1 *A*. Să se calculeze viteza de transport a electronilor și să se compare cu viteza medie pătratică de agitație termică a electronilor, știind că firul se încălzește pînă la 40 C. Densitatea argintului este de 10,5 g g/cm³, iar constanta lui Boltzmann are valoarea $0{,}138.10^{-15}$ ergi.

Florin Vasiliu, elev, Bacău

5426. Se dau în plan două puncte *A* și *B* și se notează pe dreapta pe care o determină, între *A* și *B*, un punct *C*; fie (*a*), (*b*), (*c*) semicercurile descrise respectiv pe *BC*, *CA*, *AB* ca dimetre și situate toate trei de o parte a dreptei *AB*.

a) Transformînd figura prin inversiunea J_a, de pol *A*, care conține semicercul (*a*), să se arate că există un cerc (τ) și numai unul singur, tangent în același timp celor trei semicercuri (*a*), (*b*), (*c*). Să se găsească locul centrului α al transformatei al lui (τ) în această inversiune, cînd punctul *C* descrie segmentul *AB*.

De asemenea, considerînd inversiunea J_b de pol *B*, care conține cercul (*b*), să se găsească locul centrului β al transformatei lui (τ) în această inversiune, cînd punctul *C* descrie segmentul *AB* și dă naștere unei construcții geometrice cu centrul *I* a cercului (τ). Cu ajutorul unei a treia inversiuni analoage celor două precedente, să se arate că dreapta *IC* trece neapărat printr-un punct fix, γ care va fi găsit.

b) Se ia ca axă a absciselor dreapta *AB* orientată de la *A* către *B* și ca axă de ordonate mediatoarea segmentului *AB*, orientată așa fel încît punctele cercurilor (*a*), (*b*), (*c*) să aibă ordonate pozitive; fie *O* mijlocul segmentului *AB*; se ia *AB*; se ia $AB = 2R$ și $OC = X$.

Să se calculeze în funcție de *R* și *x* coordonatele punctelor α și β, apoi coordonatele *X* și *Y* ale punctului I.

(*Bacalaureat Atena*, iunie 1961

SUBIECTELE LUCRĂRILOR SCRISE DATE LA CEA DE-A IV-A OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ȚINUTĂ ÎN R. S. CEHOSLOVACIA 1962

Prima lucrare (timp de lucru 4 ore), 10.7.1962

5427. Se cere să se determine cel mai mic număr natural *n* care are următoarele proprietăți:

a) numărul scris în sistemul zecimal se termină cu cifra 6;

b) dacă se suprimă ultima cifră și se scrie cifra 6 la începutul numărului se obține de patru ori numărul căutat.

5428. Să se determine toate valorile reale ale lui *x* care satisfac inegalitatea

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

5429. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$, cu fețele $ABCD$, $A'B'C'D'$ și cu muchiile AA', BB', CC', DD' paralele. Punctul x parcurge cu o viteză constantă muchiile AB, BC, CD, DA, iar punctul y parcurge cu aceiași viteză muchiile $B'C'$, $C'C$, CB, BB'. Punctele x și y încep să se miște în același moment (x din A și y din B'). Se cere să se determine locul geometric al mijloacelor z al segmentului xz și să se facă un desen.

A doua lucrare (timp de lucru 5 ore), 11.7.1962

5430. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

5431. Se dă un cerc k și trei puncte diferite A,B,C pe acest cerc. Să se construiască un punct D pe cercul k astfel ca patrulaterul $ABCD$ să fie circumscris unui cerc (circumscriptibil).

5432. Se dă un triunghi isoscel. Cercul circumscris avînd raza r și cercul înscris raza ρ; se cere să se demonstreze că distanța centrelor acestor două cercuri este dată de formula

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

5433. Se dă un tetraedru $SABC$, astfel că cinci sfere sînt tangente la toate cele șase drepte SA, SB, SC, AB, BC, CA. Atunci acest tetraedru este regulat. Invers, la orice tetraedru regulat există cinci sfere tangente la toate muchiile tetraedrului. Se cere să se demonstreze aceste două teoreme și să facă un desen.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VII *)

E : 1871. Tarlaua unei gospodării agricole colective, lungă de 800 m și lată de 7,5 hm s-a semănat cu grîu. La hectar se seamănă 2,25 q grîu și se împrăștie 120 kg îngrășăminte.

a) Cîți saci sînt necesari pentru transportul grîului dacă un sac cîntărește 85 kg? b) Cîți saci de îngrășăminte sînt, dacă unul cîntărește 50 kg? c) Cîte camioane sînt necesare pentru transportul grîului și îngrășămintelor dacă un camion transportă 4,14 tone?

D. Popescu, profesor, Feteşti

E : 1872. O fabrică de rulmenți a produs zilnic în luna iulie, 3496 rulmenți față de 2040 rulmenți produși zilnic în luna mai, obținîndu-se astfel, 30 000 lei economii. În luna iulie se ajunge la producția de 3800 rulmenți pe zi. Să se afle ce economii s-au obținut în luna iulie.

O. Ursulescu, elev, București

---

*) V (E : 1871, 1872, 1875, 1877); VI (E : 1873, 1874, 1876, 1878); VII (E : 1879, 1880, 1881).

E : 1873. Pentru 2 kg de fidea și 3 kg de zahăr s-a plătit 40 lei. Cît costă 1 kg de fidea și 1 kg de zahăr dacă raportul prețurilor dintre fidea și zahăr este 1 : 2.

Emil Tilici, profesor, Cîrligele

E : 1874. Ce cantitate de sămînță de mazăre se va însămînța la hectar știind că are puritatea $P = 99\%$, puterea de germinație $G = 98\%$, iar norma teoretică este $N = 194{,}040$ kg/ha ?

Grigore Viorel, profesor, Oroftiana

E : 1875. Sarcinile de plan pentru anul 1962 în privința întreținerii și dezvoltării patrimoniului forestier prevăd lucrări de plantare, lucrări de îngrijirea culturilor tinere și lucrări de ajutorare a regenerărilor naturale pe o suprafață de 489 500 ha. Știind că suprafața de plantat este cu 350 500 ha mai mică ca suprafață de lucrări de îngrijirea culturilor tinere și cu 9600 ha mai mare ca suprafața de lucrări de ajutorare a regenerării naturale să se calculeze ce suprafețe sînt planificate pentru fiecare fel de lucrare în parte.

I. Munteanu, profesor, Zăpodeni

E : 1876. Să se calculeze norma teoretică a inului pentru fuior cu puritatea 100% și puterea de germinație 98% știind că s-a însămînțat 150 kg/ha.

Grigore Viorel, profesor, Oroftiara

E : 1877. Ascultînd discuția între Ionel, Sandu și Nicușor :

Ionel : Pe 5 penițe, 3 caiete și 4 creioane am plătit 7,05 lei,

Sandu : Eu am cumpărat 3 penițe, 5 creioane și 4 caiete și am plătit cu 1,70 lei mai mult ca Ionel,

Nicușor : Eu am avut bani cît Sandu și după ce am cumpărat 4 penițe, 3 creioane și 5 caiete mi-au rămas 0,55 lei.

Adrian cere să-l ajutați să socotească aritmetic, cît costă un caiet, un creion și o peniță.

Tudor Căsăndoiu, student, București

E : 1878. Fiecare placă de oțel construită pentru cazanele mașinilor cu vapori este prevăzută cu 90 găuri de 76 mm diametru și 20 mm adîncime. Știind că burghiul folosit pentru perforarea plăcii are o viteză de tăiere de 30 m/min și înaintează cu 0,4 mm pe rotație, să se determine : a) turația burghiului, b) timpul necesar perforării plăcii (se va neglija timpul necesar deplasării plăcii pentru a o aduce în dreptul burghiului, precum și timpul de ridicare și coborîre a burghiului).

Al. Lalescu, profesor, Cîmpina

E : 1879. Normele de tehnica securității prevăd că, priza de pămînt la care se leagă toate părțile instalațiilor pentru sudarea electrică trebuie să aibă rezistența de 4 Ω. Ce lungime are un conductor de cupru dacă are aceeași rezistență, secțiunea de 1,5 mm², iar rezistivitatea de 0,0175 Ω mm²/m.

Gh. I. Căpitan, profesor, Anina

E : 1880. Să se arate că

$$\frac{x^3 - y\sqrt{y}}{x^2 + x\sqrt{y} + y} + \frac{x^3 + y\sqrt{y}}{x^2 - x\sqrt{y} + y} = 2x.$$

C. Dumitriu, Odobești

E : 1881. Dacă A și B sînt numere întregi care satisfac relația :

$$1960A - 1961B = \mathfrak{M}.\ 109$$

atunci satisfac și relația :

$$1926A - 1944B = \mathfrak{M}.\ 1962.$$

*D. M. Bătineț*u, student, București

CĂRȚI NOI

1. *George Ciucu, Gabriel Simboan : Teoria probabilităților și statistică matematică*, Biblioteca Societății de științe matematice și fizice din R.P.R., nr. 46, Editura Tehnică, 1962.

Lucrarea conține probleme cu indicații și răspunsuri referitoare la : evenimente, probabilități, legi de repartiție, repartiții cu mai multe dimensiuni, momente, dispersii, corelații, funcții caracteristice ale repartițiilor uzuale, convergența șirurilor de variabile aleatoare, procese stochastice, teoria selecției, teoria estimației etc.

Fiecare capitol este precedat de o scurtă prezentare a noțiunii de bază, utilizate în capitolul respectiv.

Cartea se adresează studenților de la facultățile de matematică și fizică, economie și planificare și studenților institutelor politehnice, precum și cadrelor didactice și tuturor acelora care prin natura ocupațiilor lor trebuie să facă apel la teoria probabilităților și statistică matematică. Problemele sînt grupate pe capitole astfel :

I. Cîmpuri finite. Cîmpuri numerabile. Probabilități geometrice. II. Legi de repartiție. Compunerea legilor de repartiție. Repartiții cu mai multe dimensiuni. III. Momente. Dispersii. Invarianți. Corelație. Funcții generatoare. IV. Funcții caracteristice ale repartițiilor uzuale. Funcții de tip pozitiv. V. Convergența șirurilor de variabile aleatoare. VI. Lanțuri Markov. Procese staționare. Corelația și densitatea spectrală a proceselor stochastice. VII. Statistică matematică (Valori medii. Dispersii. Corecții. Mediana. Moda. Corelații. Selecții.)

2. *C. Coșniță, F. Turtoiu : Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Tehnică, 1962.

Materialul prezentat în această lucrare este în general de analiză clasică : pe lîngă problemele de analiză, cuprinde și unele probleme de algebră.

S-a insistat mai mult asupra unor probleme de *calcul diferențial*, care fac legătura cu ecuațiile diferențiale și ecuațiile cu derivate parțiale ce se predau în învățămîntul superior, precum și asupra problemelor de șiruri și serii.

Au fost redate în detaliu metodele de rezolvare ale problemelor pentru care sînt necesare cunoștințe ce depășesc nivelul școlilor medii.

Lucrarea poate fi consultată de elevii școlilor medii de cultură generală, de candidații la examenul în învățămîntul superior și de studenții din primul an de la institutele tehnice.

Problemele sînt grupate pe capitole astfel :

I. Analiză combinatorie ; II. Limite ; III. Derivate și diferențiale ; IV. Maxime și minime ; V. Reprezentări grafice ; VI. Integrale ; VII. Șiruri, Serii ; VIII. Diverse.

3. *Ciclotronul de N. D. Fedorov*, Biblioteca Societății de științe matematice și fizice din R.P.R. nr. 47, Editura Tehnică, 1962.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR-OKSZÁGOS 1833

În lucrare sînt expuse în mod succint, noțiunile de bază privind ciclotronul, principiul lui de funcționare, construcția, precum și diferite probleme referitoare la îmbunătățirea și la folosirea acestuia. În cuprinsul lucrării remarcăm: Construirea ciclotronului, principiul de funcționare, focalizarea fasciculului de electroni, energia limită a ionilor accelerați, expulzarea ionilor din camera de accelerare, ciclotronul cu variație azimutală a cîmpului magnetic, cîteva particularități ale ciclotronului, ciclotronul cu energie variabilă, accelerarea ionilor pe „armonici" impare, ciclotronul cu un duant, îmbunătățirea focalizării electrice a fasciculului, utilizarea ciclotronului. Lucrarea se adresează cititorilor cu pregătire la nivelul școlilor de cultură generală.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(Soluții primite pînă la 15.06.1962)
(urmare)

SIBIU. Șc. de 7 ani nr. 4. Cl. VII. Bucur Doina (1775, 79, 1800, 03—08, 10). **Șc. de 7 ani nr. 5. Cl. VII.** Cristea Aurel (1775, 79, 1801—08), Govăzdea Siliana (1777—79, 96, 1802, 04, 05, 07—09), Mihi Ilie (1775, 79, 1801—07, 11), **Șc. de 7 ani nr. 9. Cl. VI.** Teodorescu Radu (1770, 91, 98, 99, 1800, 02, 03, 06, 08). **Șc. de 7 ani nr. 15. Cl. VIII.** Griva Marius (1801—09), **Ș.m. 1. Cl. IX.** "Boguș Mihai (5110, 12, 16, 18, 21, 23, 39, 57, 60, 67, 93, 95, 5208, 24, 38, 39, 42). **Cl. X.** Păcuraru Iuliu (5112, 13, 18—22, 25, 26, 29, 35, 43, 44, 46, 47, 52, 63, 67). **Ș.m. 2. Cl. X.** Gherban Doru (5112, 13, 26, 29, 36, 39, 40, 44, 46, 49, 57, 60, 67, 69, 75, 80, 86, 88). **Ș.m. 3. Cl. VIII.** Albinaru Doina (1802, 03, 05—07, 09, 10, 15, 23, 24, 29, 5200, 42), **Dăncilă Ioan** (1791, 92, 96, 97, 1801—41, 5110, 12, 1315, 18, 20, 21, 40, 52, 57, 70, 83, 93, 95, 5200, 02, 08, 14, 16, 24, 37, 38, 42—44, 48, 49, 57—62, 70, 71, 81, 92, 93), **Elefterescu Mihai** (1801—08, 10, 11, 121, 14, 20, 22), Geleriu Dan (1801—11, 16, 18—20, 23, 24, 25, 28—31, 33, 35, 37, 39, 42, 5193, 5208, 42, 48, 49, 57, 59, 61, 62, 65, 70), Popescu Adriana (1792, 1813—15, 17, 18, 23—26, 42, 5149), Török Anna (M.F.L. 733, 46, 61, 70, 75). **Cl. IX.** Voicescu Smaranda (5157, 67, 75, 83, 5202, 24, 31, 39, 50, 57, 61). **Cl. X.** Gheorghiu Cornel (5113, 15, 16, 21, 22, 29, 35, 63, 65, 5202, 07, 08, 10, 45). **Șc. tehnică de construcții.** Unteh Wilhelm (5109—11, 13, 15, 17, 35, 39, 42, 59, 60, 62, 67). **Grupul școlar Independența.** Bvaisch Dieter (5109—11, 13, 15—21, 24, 25, 35, 44, 46, 48). Absolventă Bucur Mariana (5207—12, 16, 17, 21, 24, 25, 30, 31, 36), elev. cap. (5109—11, 15—17, 26, 29, 30, 35, 39, 41, 44).

SF. GHEORGHE. Ș.m. 1. Cl. VIII. Kiss Ildiko M.F.L. (747, 51, 800, 771, 72, 73, 75, 77, 78, 80), Nebel Deneș M.F.L. (757, 48, 300, 771, 77, 80). **Ș.m. 2. Cl. VIII.** Pop Maria M.F.L. (768, 71—73, 75, 77—80), Szasz György M.F.L. (768—71, 73, 76, 77, 79, 80, 837).

SIGHET. Ș.m. 1. Cl. VIII. Maierovici Iacob (1790, 93, 5110, 12, 13, 15, 18, 20, 26, 29, 35, 35, 39, 41, 44, 45). **Cl. IX.** Iacobici Maier (5113, 18, 20, 26, 36, 41, 45, 60, 75, 86), Stern Samuil (5110, 16, 18, 20, 39, 44, 59, 75, 95, 5203, 33, 43). **Cl. X.** Elek Anna (5115—17, 26, 32, 35, 39, 41, 44, 46, 48), M.F.L. (780, 823—26, 237, 829, 31, 36, 37), Lang Karoly M.F.L. (780, 825, 26, 35, 37).

SIGHIȘOARA. Ș.m. 1. Cl. VIII. Antal Istvan M.F.L. (768—70, 74, 76, 837), Blajanisz Jeno M.F.L. (747—49, 69, 73, 832, 37), Kiss Denes M.F.L. (747, 48, 69, 71, 77, 79), Kopam Sondor M.F.L. (768, 70—76, 78, 823, 24, 31, 32, 37), Kovecsi Lidia M.F.L. (758, 59, 817, 69, 70, 76, 77, 824, 37), Nagy Klara M.F.L. (768—70, 79, 831, 37), Polder Ilona M.F.L. (768, 69, 776, 77, 837), Puskas Agnes M.F.L. (768—70, 831, 37), Vajda Elemei M.F.L. (758, 59, 817, 18, 773, 75, 837), Valentsik Andras M.F.L. (772—74, 832, 37), Zsigmond Janos M.F.L. (768—70, 75, 79, 837). **Cl. IX.** Rus Petru (5110, 16, 39, 59, 60, 67, 5207, 08, 44—46), **Serachitopol Adrian** (4195, 5072, 89, 5112, 25, 34, 49, 57—65, 67, 69, 70, 73, 75, 76, 80, 89, 93, 96, 98, 5200, 02, 07, 08, 10—12, 14, 21, 24, 29, 31, 36—40), Toth Ferencz M.F.L. (824, 25, 31, 32, 37), Voinica Octavian (5160, 69, 5207, 03, 10, 23, 24, 36, 37, 40, 42—46, 56, 57, 59, 60—62, 67, 84, 86, 95), Zsold Janos M.F.L. (807, 09, 18, 24, 32 37). **Cl. XI.** Ajtay Maria

(5111, 14, 16, 17, 60, 61, 67, 5207, 58, 10, 11), Frunzeti Dan (5109, 11, 14, 16, 17, 25, 34, 50, 63, 93).

ŞIMLĂU. Ş.m.m. Cl. X. Sabău Liviu (5160, 67, 5207, 08, 10, 46, 48, 57, 60, 61, 67), Szabo Sandor M.F.L. (780, 824, 25, 31, 32, 36).

SINAIA. Ş.m. George Enescu. Cl. VIII. Cătană Ilie (1796, 1807, 09, 10, 13, 18, 23, 28, 29, 5112, 49, 52, 60, 95, 5208, 24, 42, 44), Marinică Lucian (1804, 08—10, 13, 18, 24, 5160, 79, 93, 5257). Cl. IX. Răduță Vasile (5096, 5110, 12, 16, 39, 42, 49, 60, 67, 75, 5224, 34), Cl. X. Mocanu Cornelia (5109, 10, 15, 16, 44, 67, 70, 5207, 08, 10, 24). Cl. XI. Puiu Mihai (5157—70, 73, 75, 76, 79—81, 85, 86, 89—91, 93—96, 98—200, 02, 04, 07—13, 17, 21, 24, 26, 29—31, 36—39, 41, 42, 44—54, 56—64, 66—68, 70, 71, 73—75, 81, 83—89, 99), Tănase Virgil (5071, 79, 82—84, 86, 87, 105—09, 11—15, 17, 18, 22—26, 29—31, 34, 35, 40, 41, 44, 50, 52—58, 60, 63, 70, 80, 86, 99, 202).

SIRET. Ş.m. Cl. X. Airinoi Anton (5139, 59—61, 69, 70, 88, 5207, 03, 10, 36), Cirievici Doina (5112, 58, 60, 62, 67, 70, 5207, 08, 10, 24).

SINICOLAUL MARE. Ş.m. Cl. XI. Dărău Constantin (5118, 21, 22, 60, 67, 93, 95, 207—09, 11, 21, 24, 42).

SLATINA. Ş.m. T. Vladimirescu. Cl. VIII. Diaconescu Radu (1804—10, 16, 23, 28, 30, 31, 35—37, 39, 41, 5248, 57, 61, 62, 70), Ştefan Virgil (1802—04, 06—12, 30, 35—37, 41, 5161, 5242, 48).

SLĂNIC. Ş.m. Cl. IX. Alionte Constantin (5110, 12, 16, 18, 20, 21, 23, 34, 39, 45, 50, 53, 60, 65, 67, 75), Dragu Cornel (5110—12, 16, 39, 41, 5160, 67, 5217, 24, 31, 35, 39, 42, 44), Soiman Livia (5110, 16, 18, 20, 21, 39, 5208, 39, 42, 44).

SLOBOZIA. Absolvent Drăgan Nicolae (5667, 80, 92, 5208, 57).

STREHAIA. Ş.m. Cl. X. Mîndreanu Guță (5159, 60, 64, 67, 75, 93, 95, 5249, 50, 61, 74, 80).

SUCEAVA. Cl. VIII. Botezatu Silviu (1816, 24, 29, 35, 37, 5218, 42, 44, 48, 61, 70), Rocacea Cezar (1757, 61, 65, 67, 71, 1831, 02—04, 06, 11, 16, 30, 5193, 95), Rosenheck Simon (1801—04, 06—09, 11, 14, 16, 17, 24, 28), Rotaru Viorel (1802, 03, 06, 07, 09, 23, 35, 37, 42, 44, 70). Cl. IX. Rață Mircea (5224, 41, 44, 48, 49, 51, 57, 59, 61, 69, 70). Cl. X. Coitman Hardy (5157, 69, 5207, 08, 10, 24, 29, 48, 50, 57, 61, 62, 67), Verciuc Nicolae (5116, 19, 50, 63, 5203, 07, 08, 40, 42, 44).

SUPLAIUL DE BANAU. Şc. de 7 ani. Cl. VII. Nits Maria M.F.L. (770, 72—75).

TECUCI. Cl. VIII. Alter Surica (1801—10, 13, 5193), Ş.m. 2. Cl. VIII. Avram Maria (1790, 1802—08, 10, 24, 29), Bacalu Viorel (1801, 03, 07, 09, 11, 29, 30, 36—38, 5193), Blănaru Gelu (1802, 03, 06—09, 11, 30, 35—38, 5193), Căpraru Emilia (1790, 1802—10, 24, 29), Chirvăsuță Ion (1802, 03, 06—09, 11, 28, 30, 35, 37), Cobdrache Elisabeta (1790, 1802—07, 09, 10, 24, 29), Cozia Ion (1802, 03, 06, 07, 09, 11, 29, 30 35—38, 5270), Cohn Marin (1802, 06—08, 11, 29, 30, 36, 37), Epure Costache (1802, 03, 06, 07, 09—11, 30, 36, 37, 5193), Harabagiu Mihai (1802, 03, 06—11, 13, 15, 24, 29, 30, 32, 35—41), Leibovici Marieta (1802, 03, 06, 07, 09, 15, 29, 30, 36—38), Luca Elena (1802, 03, 06, 07, 09, 15, 29, 30, 36, 38), Oprişan Teodor (1816, 18—23, 29—41), Pologa Violeta (1793, 1800, 03, 04, 06, 07, 09, 11, 24, 29), Vicol Niculina (1993, 1800, 02, 03, 06, 07, 09, 11, 24, 29). Cl. IX. Adam Ionel (5157, 60, 64, 67, 70, 93, 5221, 24, 39, 40, 48, 51, 57—59, 62, 70, 86), Bădiță Elena (5180, 93, 5224, 36, 39, 42, 70, 74, 86), Chiops Liliana (5180, 93, 95, 5221, 36, 39, 42, 70, 85), Ecca Gheorghe (5157, 60, 67, 70, 93, 5221, 39, 42, 48, 51, 57, 59, 70, 74, 86), Gheorghiu Olimpia (5180, 93, 95, 5224, 36, 39, 42, 70, 74, 86), Mihalovici Delia (5180, 93, 5224, 36, 39, 42, 70, 74, 85, 95), Niculescu Dan (5160, 65, 67, 70, 93, 5221, 39, 42, 48, 57, 70, 72), Popa Gheorghe (5164, 70, 93, 95, 99, 5208, 17, 35, 39, 42, 44, 59, 62), Rău Didina (5180, 93, 95, 5224, 36, 39, 42, 74, 85), Tătaru Ioan (5157, 60, 67, 93, 95, 5221, 31, 42, 48, 51, 57, 59, 62, 70, 86), Ungureanu Ioan (5180, 93, 95, 5224, 31, 36, 39, 42, 70, 74, 86).

TIMIŞOARA. Şc.m. 1. Cl. IX. Wallachy Evelin (5160, 67, 5221, 39, 42, 50, 51, 70, 71, 74, 85). Cl. X. Catilina Ioan (4145, 96, 5207, 08, 10, 12, 20, 39, 40, 42, 44, 45, 46), Stern Toma (5067, (5067, 69, 70, 73, 80, 84, 86, 89—90, 96, 99, 5100, 03, 05, 07—10, 16, 16, 18—21, 23—27, 23—26, 30, 31, 35, 39, 41, 43, 49, 50, 52, 53, 55, 57, 60, 63, 64, 65, 67, 69, 70, 80, 83, 95, 5200, 02, 07, 08, 10, 12, 21, 24, 39, 40, 42, 44, 45, 46). Ş.m. 2. Cl. VIII. Dreier Peter (1802, 03, 07, 09, 26, 29, 30, 35, 36, 37), Holcz Ludovic (1800, 02, 03, 06, 07—09, 11, 35, 37), Hack Albert (1796, 1801—03, 06—09, 20, 22, 23,

24), Petri Norbert (1801—03, 06—11, 14, 16). Sendeff Eduard (1802, 03, 06—09, 24, 30, 35, 36, 37), Schwengler Nicolaus (1802, 03, 06—09, 24, 30, 35, 36, 37), Cl. IX. Lang Adelheid (5113, 50, 60, 67, 80, 83, 93, 5208, 18, 24, 38), Nediu Alina (5113, 60, 67, 80, 83, 93, 5208, 18, 24, 38), Popescu Viorela (5513, 50, 60, 64, 67, 80, 83, 93, 5203, 18, 24, 31, 38), Szende Suzana (5110, 16, 26, 39, 41, 49, 67, 75, 89). Ş.m. 5. Cl. XI. Lusztig Gheorghe (4901, 63—69, 72—80, 83, 85—95, 5101, 03, 06, 10, 12, 16—22, 29—35, 38, 40—46, 49, 51, 55, 67, 70, 77, 78, 81—84, 86—89, 92, 94, 207—17, 19, 23—27, 29—33, 36, 37, 48, 51, 53, 54, 57, 61, 70—72, 74, 76, 81, 89, 92), an. II Neguş Spiridon (5112, 13, 15, 18, 21, 29, 39, 49, 59).

TIRGOVIŞTE. Ş.m. 3. Cl. VIII. Andreescu Nicolae (E: 1816, 17, 18, 23, 24, 29, 30, 36, 37, 5212, 38, 42, 56), Niculescu Constantin (E: 1793, 1804, 05, 14, 16, 17, 20, 23, 29, 51, 52, 65, 5228, 42, 44), Cl. IX. Ionescu Mircea (5110, 16, 18, 20, 23, 41, 49, 50, 52, 53, 54), Cl. XI. Creţu Dumitru (4965—68, 73, 75, 76, 78—80, 82, 83, 85, 86, 90, 91, 95, 5001, 02, 06, 15, 18—20, 24, 27—30, 32, 33, 35, 41, 49, 51, 67, 69—71, 80). Ş.m. seralâ Uzina Mecanică. Cl. IX. Pavel Marin (5929, 30, 39, 41, 96, 99, 5134, 39, 44, 50, 53).

TG. JIU. Şc. elem. nr. 4. Cl. VII. Bănică Mariana (1803—06, 08, 10, 16, 20, 22, 5193, 5208), Şc. m. 1. Cl. IX. Merciani Constantin (5112, 16, 57, 60, 80, 5217, 18, 21, 24, 39).

TG. MUREŞ. Şc.m. Bolyai Farkaş, Baratosi Firoska (E: 769, 770, 772, 773, 774), Ballo Iren (758, 760, 761, 772, 774, 775), Barabas Barna (E: 757, 758, 759, 760, 761, 763, 765, 768, 770, 771, 772, 775), Bogos Gizella (E: 757, 758, 760, 772, 774), Budai Istvan (789, 774, 780, 801, 832, 837, 838), Osetri Imre (792, 800, 817, 819, 780, 824, 835, 837), Dalyai Pal (80, 823, 825, 826, 827, 828, 829, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 838), Domokos Csaba (816, 780, 832, 837), Eperjessy Maria (760, 768, 771, 773), Farkas Agnes (758, 760, 761, 772, 774, 775), Fekete Klara (769, 716, 757, 761, 762, 770, 771, 773, 774, 775), Gönczz Bela (757, 758, 760, 761, 768, 771, 772, 775), Györfy Zoltan (757, 758, 761, 768, 770, 772, 773), Herman Judit (769, 770, 771, 772, 773), Hartsa Maria (757, 758, 769, 772, 773, 775, Herman Farkas (746, 747, 758, 761, 832), Imren Laszlo (746, 747, 748, 751, 770, 771, 772, 774, 775), Kelemen Erzsebet (746, 757, 749, 769, 771, 772), Koppandi Matild 758, 760, 768,, 772, 774, 775), Kovacs Barna (766, 774, 780, 831, 832, 835, 847), Muth Katalin (768, 770, 772, 773, 774, 775), Racz Istvan (758, 760, 768, 770, 772, 773), Szabo Heno (780, 824, 825, 827, 829, 830, 831, 832, 837, 838), Simo Erzsebet (757, 760, 769, 770, 771, 772, 773, 775), Szaskay Marta (758, 760, 761, 768, 770, 772, 773, 775), Szabo Andras (748, 758, 761, 763, 773, 770, 771, 773, 774, 775), Szombarhely Maria (758, 760, 761, 769, 770, 772, 773, 775, Varady Ibolya (769, 770, 771, 772, 773, 775), Vass Judit (757, 758, 760, 770, 773), Zzigmond Magda (769, 770, 771, 7772, 773), Şc.m. Unirea, Elekes Istvan (752, 792, 793, 801, 824, 832), Şc.m. Andrei (5018, 20, 36, 49, 5109, 10, 16, Papiu Ilarian, Csupor Lajos (769, 770, 771, 772, 773, 774, 777), Stratan Valentin (769, 770, 771, 772, 773, 774), Şc.m. nr. 4 Erdei Gyöngy (800, 768, 767, 776, 832), Mathe Laszlo (780, 823, 825, 832), Pridal Annamaria (800, 765, 766, 767, 776, 778, 832).

TG. OCNA. Şc.m. Cl. X. Stănescu Corina (5109, 10, 15, 16, 35, 39, 67, 89, 5202, 07, 08, 10, 14, 23, 24).

TG. CĂRBUNEŞTI. Cl. IX. Bulanda Justin (5009, 5107, 20, 50, 52, 54, 55, 64, 93, 95, 99).

TÎRNĂVENI. Şc.m. Al. Sahia. Cl. IX. Chincisan Ioan (5118, 20, 23, 34, 50, 52, 53, 55).

TURDA. Ş.m. Mihai Viteazu. Cl. X. Filip Liana (5119, 12, 23, 24, 50, 55, 63, 64, 93, 98), Mihai Ilie (5119, 20, 25, 63, 65, 96, 5200, 12, 24, 45, 46).

TULCEA. Şc.m. Tulcea. Cl. X. Sezonoiu 26, 29).

TURNU MĂGURELE. Şc.m. Unirea. Cl. IX. Drăgulinescu Dumitru (5115, 17, 18, 20, 21, 26, 44, 50, 52, 53, 60, 67, 70, 75, 83, 89, 91, 93, 95, 5202).

TURNU SEVERIN. Şc.m. 2 Cl. VIII. Bondoc Dumitru (1802, 03, 06, 07, 09, 10, 15, 24, 5112 .20), Ivăscanu Nicolae (1790, 1802, 03, 06, 07, 09, 13, 5518, 20, 5238, 5443). Mărgeanu Valer (1790, 91, 1802, 06, 09, 24, 5, 5118, 20, 93, 5243), Stoian Victor (1780, 03, 06, 07, 09, 10, 15, 24, 5118, 20, 93. Cl. X. Anventiev Vitalia (5115, 16, 25 35, 39, 57, 60, 67, 5207, 08, 10, 17, 24, 29). Cornea Dumitru (5109, 10, 12, 15, 16, 26, 30, 31, 35, 39, 40, 44, 46, 49, 57, 60, 67, 69, 75, 80, 83, 88, 89, 91, 5202, 07, 08, 10, 14, 24, 31, 48, 56, 57, 59, 61, 67, 74, 83, 86). Văcărescu Ion (5112, 22, 60, 63, 70, 5207, 08, 10, 17, 18, 24, 29).

TRUSEŞTI. Şc.m. Cl. VIII. Adomnicăi Ioan (1790, 98, 1802, 03, 06, 07, 08,

09, 11, 13, 14, 16, 29), Turculeț Demostene (1803, 08, 14, 16, 5202), Vieru Mihai (1798, 1803, 06, 08, 12, 14, 16, M29, 5202), Cl. IX. Azamfirei Niculina (5118, 20, 45, 50, 53, 5200, 39, 42, 44), Onofrei Maria (5110, 16, 18, 20, 45, 50, 53, 80, 93, 5200, 39, 42, 44), Cl. X. Iacob Adorica (5109, 10, 15, 16, 18, 35, 39, 45, 50, 55, 60, 63, 80, 93, 5242, 44, 45), Zolta Alexandru (5109, 10, 15, 16, 35, 39, 55, 60, 63, 80, 5244, 45).

URLAȚI. Șc.m. Cl. X. Petcu Ion (5120, 23, 93, 5200, 12, 38, 39, 42, 43, 44).

URZICENI. Șc.m. Cl. VI. Georgescu Mihaela (1801—05, 08, 11).

VARIAȘ. Șc. de 8 ani Variaș. Cl. VI. Lencuța Maria (1701-06, 08).

VASLUI. Șc.m. 1. Cl. VIII. Maftei Eugen (1790, 91, 1801—11, 13, 14, 16—20, 22—24, 26, 28, 29, 5089, 5118, 20, 60, 65, 75, 80, 83, 89, 93, 95, 5200, 02, 08, 31, 38, 42), Șc.m. 2. Cl. X. Grosu Ioan (5113, 39, 57, 67, 69, 70, 75, 76, 83, 85, 91, 5202, 14), Hermelin Solo (5109, 10, 13, 15, 16, 35, 39, 46, 5207, 08, 21, 31),Cl. XI. Ailinci Dumitru (5157, 58, 59, 60, 61, 63, 5202, 07, 08, 09, 10).

VALENII DE MUNTE. Șc.m. Cl. VIII. Ceșerea George (1775, 79, 90, 1802, 03, 06—09, 5120), Moldoveanu Adrian (1802, 03, 06, 07, 08, 09, 16, 23, 24, 26, 29).

VEDEA. Șcm.. mixtă. Cl. IX. Matei Petrică (5110, 16, 39, 41, 54, 60, 67, 75, 5250, 56, 59).

VIDELE. Șc.m. mixtă. Cl. VIII. Dumitrescu Traian (1802, 03, 06—12, 14, 15, 5193, 95).

VIȘEUL DE SUS. Absolvent Ioanid Grigore (5118—23, 25, 43, 45, 50, 52, 53, 54, 55).

ZALĂU. Șc.m. Ady Endre. Gajzag Maria (823, 824, 825, 827, 831, 832, 835, 836, 837), Janko Șandor (823, 824, 825, 827, 829, 830, 835, 836, 837), Teszler Maria (765, 767, 768, 769, 770, 776), Schmidt György (768, 769, 770, 771, 776), Tunyogi Ferenc (761, 763, 768, 770, 776, 780), Grupul școlar Simion Bărnuțiu, Aszodi Ferenc (729, 732, 757, 758, 776, 777, 779), Csapă Erszebet V. (749, 768, 771, 776, 777), Csillag Istvan (766, 767, 768, 771, 779), Debreczy Bela (763, 774, 776, 779), Sazakas Josef (763, 767, 776, 777, 779), Fülöp György (769, 771, 775, 776, 777, 779), Gașș Ibolya (699, 703, 763, 767, 774, 776, 779), Gall Klara V. (749, 766, 768, 771, 779), Giriti Ibolya (757, 766, 767, 768, 776), Haraszy Endre (769, 774, 776, 777, 779), Illyés Piroska (703, 763, 765, 774, 776, 779), Kalauz Bela (763, 767, 776, 777, 779), Krassovszky Klara (729, 745, 766, 768, 776), Kimpan Klara (703, 744, 763, 765, 776, 779), Kiss Janos (716, 763, 764, 771, 776, 777, 779), Kis Josef (757, 765, 774, 776, 779), Kultsar Erzsebet (747, 754, 758, 768, 776, 777, 779), Kiss Ilona (699, 757, 758, 763, 776), Kun Piroska (699, 701, 776, 777, 77), Major Ilona (769, 774, 775, 776, 779). Mura Anna (769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 778, 779), Nagy Laszlo (699, 701, 776, 777, 779), Piricsi Ilona (732, 758, 764, 777, 779), Somogy Erzsebet (763, 765, 769, 776, 779), Szasz György (729, 732, 776, 777, 779), Somogyi Zsuzsanna (746, 747, 758, 776, 779), Szücs Istvan (758, 766, 767, 776, 777, 779), Terna Istvan (742, 747, 749, 757, 768, 769, 774, 776, 777, 779), Tungogi Judit (758, 763, 764, 771, 777, 77), Vincze Katalin (758, 763, 768, 776, 779).

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 15 iulie 1962 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme din ultimele trei numere apărute, după cum urmează:

1. **Stancu M. Ion** (clasa XI, ș.m. 3 Pitești), 2. **Viorel Costea** (cl. X Orăștie), 3. **Toma Dragomir** (cl. X, ș.m. 1 Oradea), 4. **Rujan Octavian** (cl. X, ș.m. 1 Timișoara), 5. **Bădulescu Grigore** (cl. X Topoloveni), 6. **Weissmann M.** (cl. X, ș.m. 1 Ploiești), 7. **Aisner Sergiu** (cl. X, ș.m. 1 Ploiești), 8. **Banu Gheorghe** (cl. IX, ș.m. Pucioasa), 9. **Ioniță Maria** (cl. VIII Predeal), 10. **Zamfir D. Corneliu** (cl. XI, ș.m. 3 Pitești), 11. **Oanță Sima** (cl. X Slatina), 12. **Stern Toma** (cl. X, ș.m. 1 Timișoara), 13. **Bîrzănescu Vasile** (cl. X, ș.m. 1 Constanța), 14. **Băluță Gheorghe** (absolvent Adjud), 15. **Siroker Iosif** (cl. X, ș.m. 17 București), 16. **Matei Ioan** (cl. VII Valea Lungă), 17. **Zăgreanu Marius** (cl. XI Năsăud), 18. **Bejancu Aurel** (cl. X Novaci), 19. **Borza Ioan** (cl. X Orăștie), 20. **Boldea Ion** (cl. XI, ș.m. 1 Lugoj), 21. **Mărgineanu Doru** (cl. X, ș.m. 1 Pitești), 22. **Onu Vasile** (cl. XI Săveni), 23. **Zamfir Ion** (cl. X Panciu), 24. **Popovici Cornel** (cl. VIII, șm.. 1 Lugoj), 25. **Popa Ioan** (absolvent Mihăiești), 26. **Olariu Adrian** (cl. VIII, ș.m. 2 Turda), 27. **Corcoțoi Ioan** (cl. IX Vaslui), 28. **Sfîrcu Tiberiu** (cl. IX, ș.m. 4 Arad), 29. **Munteanu Mircea** (cl. X, ș.m 5 Brașov), 30. **Popa Radu** (cl. IX Petroșani), 31. **Diaconu Nicolae** (cl. X, ș.m. 3 Pitești), 32. **Stratan Valentin** (cl. VIII Tîrgu Mureș), 33. **Pupăzan Nicolae** (locot., Lugoj), 34. **Negruțiu Vasile** (cl. VIII, ș.m. 1 Oradea), 35. **Jora Boris** (cl. XI Babadag), 36. **Crainic Emanuel** (cl. X, ș.m. 17 București), 37. **Radu Dan** (cl. XI, ș.m. 22

București), 38. Rabinovici Silviu (cl. XI, ș.m. 2 Fălticeni), 39. Pantelimon Anton (cl. XI, ș.m. 1 Unirea, Focșani), 40. Lucaci Nicolae (cl. X, ș.m. 5 Galați), 41. Potcovaru Gheorghe (cl. XI, șm.. 1 Craiova), 42. Zara Dan (cl. VIII, ș.m. 1 Ploiești), 43. Pîrvulescu Constantin (cl. X, ș.m. 1 Ploiești), 44. Catană Ilie (cl. VIII, ș.m. Sinaia), 45. Andru Dorin (cl. X, ș.m. 1 Timișoara), 46. Anghel Vasile (cl. XI, ș.m. Mărășești), 47. Acu Dumitru (cl. X, ș.m. Năsăud), 48. Mincinopschi Gheorghe (cl. X, Mărășești), 49. Chiriac Ioan (absolvent Novaci), 50. Andrei Paul (cl. X, Odobești), 51. Lupu Stela (cl. VIII, Odobești), 52. Preda Victoria (cl. X, Vălenii de Munte), 53. Liciu Eugen (cl. X, ș.m. 2 Turnu Severin), 54. Neagoe Victor (cl. VIII, ș.m. 1 Pitești), 55. Diaconescu Nioclae (cl. VIII, Rupea), 56. Spătaru Aurel (cl. IX, Pucioasa), 57. Crișan Victor (cl. X, ș.m. Avram Iancu Aiud), 58. Șerban Doina (absolventă Brașov), 59. Buiculescu Mioara (cl. X, ș.m. 20 București), 60. Ciocoiu Virgil (cl. VIII, ș.m. 2 Buzău), 61 Curtin Cătălin (cl. VIII, Constanța), 62. Depărățeanu Dan (cl. VIII, Costești), 63. Bunea Bănică (ș.m. Deva), 64. Petrescu Margareta (cl. X, ș.m. 2 Pitești), 65. Gherban Doru (cl. X, ș.m. 2 Sibiu), 66. Airinei Anton (cl. X Siret), 67. Tătar Ioan (cl. X, Tecuci), 68. Cătălina Ioan (cl. X, ș.m. 1 Timișoara), 69. Migdalovici Marcel (absolvent Tîrgoviște), 70. Filip Liana (cl. X, ș.m. 1 Turda), 71. Cula Constantin (cl. X, Tr. Măgurele), 72. Hajos Ladislau (cl. X, ș.m. Hunedoara), 73. Halm Marcel (cl. X, șm.. 1 Iași), 74. Jurca Ion (cl. (cl. VIII, ș.m. 1 Lugoj), 75. Șandru Victor (cl. X, Orăștie), 76. Rusu Constantin (absolvent, Iași), 77. Costeie Doru (cl. IX Novaci), 78. Thier Nonel (cl. IX, ș.m. 6 Iași), 79. Iacobovici Sorin (cl. X, ș.m. 5 Galați), 80. Băluțescu Mihail (absolvent Craiova), Mendelsohn Zeppy (cl. IX, ș.m. 1 Focșani), 82. Coșanu Marius (cl. VIII, ș.m. 2 Buzău), 83. Sgăvîrdea Dumitru (grupul școlar c.f.r. București), 84. Feran Monica (cl. X, ș.m. 19 București), 85. Ionescu Mihai (cl. X, ș.m. 1 București), 86. Bîzgă Ilie (cl. IX, ș.m. Breaza), 87. Băncilă Maria (cl. VIII, ș.m. 6 Brașov), 88. Simplăceanu Virgil (cl. IX, ș.m. Blaj), 89. Iordan Mariana (cl. VII, șc. elem. 1 Bîrlad), 90. Iordan Dumitru (complexul școlar Bîrlad), 91. Ciura Alexandru (cl. X, Baia de Arieș), 92. Boicu Emil (cl. X, ș.m. 1 Bacău), 93. Bulzan Tiberiu (cl. XI ș.m. 3 Arad), 94. Naceaev Mihai (cl. X, ș.m. 3 Arad), 95. Luță Cristian (cl. X, ș.m. 13 București) și 96. Mozes Ervin (cl. X, ș.m. 3 Arad).

Pînă la 15 iulie 1962 s-au mai primit soluții bune la problemele propuse din ultimele 3 numere ale G.M.F. seria B de la:

ADJUD. Absolvent Băluță Gh. (5146, 66, 74, 89, 92, 94, 97, 202, 03, 07—12, 17—19, 21, 24—32, 34, 36—47, 79, 81, 83—88, 92, 94, 95).

Ș.m. Cl. VIII. Cernău eanu Mircea (E: 1802, 03, 06—09, 15, 16, 18, 27, 29), Franche Aneta (E: 1802, 03, 06—09, 18, 20, 29, 35, 37), Păduraru Ana (E: 1802, 03, 06—09, 18, 20, 29, 35, 37).

AIUD. Ș.m. Avram Iancu. Cl. IX. Crișan Victor (5057, 59, 60, 62, 67, 69, 70, 75, 77, 80, 83, 85, 86, 88, 90, 202, 06, 08, 12, 14—17, 21, 29, 31, 36, 39, 42, 48—51, 57—62, 71, 74, 81, 83), Reff Radu (5157, 60, 64, 65, 67, 208, 12, 38, 39, 42, 44, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 74, 86). Cl. X. David Tiberiu (5115, 16, 18, 19, 25, 35, 60, 61, 93, 96, 207, 10, 46).

Ș.m. Bethlen Gabor. Cl. VI. Demeny Pal (MFL: 781—86, 89—92).

ALBA IULIA. Ș.m. Horia, Cloșca și Crișan. Cl. X. Almaș Eduard (5157, 60, 63, 65, 67, 69, 74—76, 80, 93, 95, 96, 98, 200, 02).

ARAD. Ș.m. 2. Cl. VII. Stănescu Radu (E: 1802, 03, 06—11, 16—19, 24, 26, 30).

Ș.m. 3. Cl. X. Mozeș Ervin (5160, 63, 67, 75, 93, 95, 98, 207, 08, 10, 12, 18, 21, 24, 38, 39, 42, 44—46, 50, 57—62, 66, 67, 74), Neceaev Mihai (5160, 63, 93, 95, 96, 98, 207, 08, 10, 12, 18, 21, 24, 38, 39, 40, 42, 44—46, 50, 57—61, 66, 67, 86, 95). Cl. XI. Bulzan Tiberiu (5157, 58, 60, 63, 67, 70, 93, 95, 96, 207, 08, 10, 12, 18, 21, 24, 31, 40, 42, 45, 46, 50, 56—62, 67, 70, 74, 75, 95).

Ș.m. 4. Cl. IX. Spîrcu Tiberiu (5207—12, 14, 16—18, 21, 23—26, 31, 32, 34, 36—39, 42—46, 48—53, 57—63, 67, 70, 71, 78, 81—83, 85—88), Tulescu Dinu (5119, 23—25, 44, 53, 55, 57, 59, 60, 62—65, 67, 69, 71, 74, 80, 93, 207, 08, 12, 24, 31, 36, 39, 44, 45).

Ș.m. Ion Slavici. Cl. VIII. Martiska Anna (MFL: 782, 83, 86, 87, 89, 91, 92), Parce Magdalena (MFL: 758, 65, 81, 82, 87, 89, 91, 92). Cl. IX. Nemeth Miklos (MFL: 839—41, 43, 44, 47, 49).

Șc. elem. nr. 13. Cl. VII. Dan Felicia (E: 1816, 18, 22, 35, 37, 43, 45—47).

AZUGA. Ș.m. Cl. VIII. Artoafă Marian Marian (5116, E: 1801—03, 06—09, 18, 23, 31, 38).

Ș.m. serală Cl. X. Păcuraru Ilie (5175, 88, 207—10, 42, 53, 61, 67), Tecuceanu Milea (5163, 88, 93, 207—10, 42, 59,

60, 61), Terbeş Iulian (5160, 207—10, 17, 42, 48—61, 67).

Şc. elem. Cl. VII. Andrei Dumitru (E: 1775, 78, 80, 806—09).

BABADAG. Ş.m. Cl. XI. Jora Boris (5158, 59, 61, 62, 66, 74, 88, 207, 08, 10, 12, 14, 16—18, 21, 24, 31, 32, 36, 39, 40, 42—46, 48, 50, 53, 57—62, 64—67, 70, 71, 74, 77, 78, 83, 85, 92, 95).

BACĂU. Ş.m. 1. Cl. X. Baicu Emil (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18—25, 29, 30, 35, 34, 39, 41, 43—46, 49, 50, 52—55), Bejan N. (5163, 80, 96, 202, 07, 08, 21, 24, 29, 31, 46, 48, 52, 53, 57, 59), Botezatu Liliana (5160, 67, 98, 210, 24, 29, 31, 40, 52, 53, 60). Ş.m. 2. Cl. X. Vasiliu Florin (5160, 67, 97, 207, 08, 10, 37, 44, 45, 52, 53, 60, 61, 94, 95, 341, 44).

BAIA DE ARIEŞ. Ş.m. Cl. VIII. Lörincz Alexe (5218, 31, 38, E: 1802, 03, 07—11, 24, 37). Cl. X. Ciura Alexandru (5157, 60, 63, 65, 67, 69, 70, 75, 80, 86, 90, 95, 98, 207, 03, 10, 14, 21, 24, 26, 29, 31, 34, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 46).

BAIA MARE. Ş.m. 1. Cl. VIII. Apostolescu Radu (5248, E: 1816—18, 22—24, 30, 35—37), Nica Theodora (5193, 270, E: 1802, 03, 06—09, 11, 14, 30, 36). Cl. X. Buciuman Toma (5157, 60, 202, 07, 08, 10, 46, 48, 57, 60, 61, 67, 70). Cl. XI. Iliesu Florin (5150, 60, 67, 80, 202, 07, 03, 10, 12, 24, 33, 39, 42, 44, 46).

Şc. elem. nr. 10. Cl. VI. Savarszky Magda (MFL: 729, 81, 82, 84, 89).

BAIA SPRIE. Ş.m. Cl. X. Ferenczy Janos (MFL: 825, 35, 36, 40, 47, 50, E: 780).

BALŞ. Ş.m. Cl. IX. Voiculescu Florin (5160, 95, 224, 31, 39, 42—44, 48, 57, 59, 61, 66, 70).

BEIUŞ. Ş.m. 1. Cl. VIII. Mogu Mihai (5218, 38, 42—44, E: 1816, 18, 22, 23, 26—28, 30, 37). Cl. X. Potlog Constantin (5157, 60, 65, 67, 69, 76, 82, 92, 95).

BISTRIŢA. Absolvent Verveagă T. (5275, 58—62, 67, 74, 84—88, 92, 93).

Ş.m. Cl. X. Buta Adrian (5113, 57, 59, 60, 69, 93, 96, 207, 03, 10, 40, 44—46).

BÎRLAD. Complexul şcolar. Cl. IX. Chirca Gacki (5160, 67, 206, 08, 21, 24, 31, 39, 44, 50). Cl. X. Borş Maria (5109, 10, 13, 15, 16, 18—20, 26, 35, 39, 44), Iordan Dumitru (5095, 130, 49, 61, 83, 96, 207, 08, 10, 12, 14, 16, 18, 24, 31, 37—40, 42—46, 48, 50, 56—61, 66, 81, 83—85). Moisanu Elena (5160, 63, 208, 10, 24, 31, 45, 52, 53, 57). Onofrei Gina (5109, 10, 13. 15, 18—20, 26, 35, 44, 63, 65, 70). Idem: Bercu Leia, Călin Lilica, Irava Gabriela.

Şc. elem. nr. 1. Cl. VII. Iordan Mariana (5073, 103, 20, 83, 214, 48, 57—59, 81, E: 1775, 77, 79, 86, 83, 90, 91, 801—06, 16, 18—23, 26, 35, 37, 42).

BLAJ. Ş.m. Iacob Mureşan. Cl. IX. Simplăceanu Virgil (5160, 63, 65, 67, 70, 71, 80, 86, 93—95, 99, 200, 02, 08, 12, 16, 17, 24, 36, 37, 40—45, 50, 51, 56—62).

BORŞA (Maramureş). Ş.m. Cl. VIII. Juga Mihai (5110, 60, 208, 31, E: 1803, 16—18, 22, 23, 25, P).

BOTOŞANI. Ş.m. 1. Cl. VIII. Asiminoaiei Maria (E: 1801, 03, 06, 07, 10, 24, 30, 35—37).

Ş.m. 2. Cl. VIII. Cohn Nancy (E: 1801—03, 08, 09, 16, 30, 31, 35). Cl. IX. Alterovici Lidia (5110, 16, 30, 39, 57, 60, 67, 70, 208, 10), Segall Livia (5110, 16, 30, 39, 57, 60, 67, 70, 208, 10).

BOZOVICI (Banat). Cl. VIII. Ignea Alimpie (5118, 242, 44, E: 1790, 98, 800, 02, 03, 06—08, 16, 22), Vasilescu Ilie (5193, 242, E: 1802, 03, 06—08, 16, 22, 24, 30, 35, 37).

BRAD (Huneloara). Ş.m. Avram Iancu. Cl. VIII. Serdineanţu Dan (E: 1790, 91, 800, 07, 09, 15, 24, 30, 35, 37).

BRAŞOV. Absolvent Şerban Doina (5164, 65, 95, 207—12, 14, 24—26, 29, 31, 32, 36, 38, 39, 42, 44—46, 48, 50, 57, 59—63, 66, 67, 74, 83, 86, 87).

Ş.m. 1. Cl. VIII. Bătătorescu Cristian (5216, E: 1825, 30, 32, 33, 37—41).

Ş.m. 5. Cl. VIII. Zsido Gyorgy (MFL: E: 781—91, 843). Cl. IX. Munteanu Mihai (5157—60, 63, 67, 69, 70, 75, 80, 86, 88, 89, 93, 95, 98, 200, 02), Muntcanu Mircea (5157—61, 63—65, 67, 69, 70, 74, 75, 80, 86, 88, 89, 95, 96, 98—200, 02, 07, 08, 10—12, 16, 18, 19, 21, 24, 25, 31, 36—39, 42—46), Zsido Laszlo (MFL: 839—52).

Ş.m. 6 seara. Cl. VIII. Balaş Eugen (5116, 80, 224, 57, E: 1801, 02, 08, 09, 20, 30), Băncilă Maria (5149, 60, 65, 75, 200, 16, 24, 36, 38, 39, 42, 44, 57, 61, 66, 70, 85, E: 1810, 16—18, 23—25, 28—31, 35—37). Blasian Mihail (5116, 80, 224, 57, E: 1801, 02, 08, 09, 20, 22), Chiru Niculina (5139, 80, 202, 57, 59, E: 1801, 02, 08, 09, 30, 37, 41). Ciocanu Constantin (E: 1802, 03, 06, 07, 24, 28, 30, 35—37, 59), Despa Grigore (5245, 40, E: 1801, 03, 28—30, 35, 37, 42), Hirsch Dumitru (5160, 208, 42, 57, 59, 66, 86, E: 1801—04, 06—11, 16—18, 23, 24, 29—31, 35—37), Paraschiv Jan (5160, 75, 45, 48, E: 1824, 28—31, 35—37), Sift Dorothea

(5180, 224, 66, E: 1790, 95, 801—03, 07, 09, 16, 18, 30). Cl. IX. Bucşa Ioan (5160, 67, 75, 93, 218, 24, 29, 36, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 70, 86), Cinbancan Augustin (5157, 60, 64, 67, 75, 202, 08, 24, 36, 45, 48, 57, 59, 70), Conciu Marius (5160, 200, 08, 39, 42, 44, 48, 57, 59, 61, 70), Constantin Maria (5160, 75,93, 200, 39, 42, 44, 57, 59, 61, 70). Cl. X. Cristea Ioan (5158, 67, 75, 208—10, 57, 59, 61, 85, 86), Delcea Valeriu (5160, 61, 67, 75, 89, 96, 208, 09, 10, 59), Păslaru Emil (5157, 59, 60, 63, 67, 75, 89, 202, 07—10, 24, 36).

Şc. elem. nr. 4. Cl. VI. Bătătorescu Anton (E: 1801—06, 08, 11).

Şc. elem. nr. 6. Cl. VI. Zsido Agnes (MFL, E: 768, 76, 77, 81, 84, 86, 89—91).

Şc. elem. nr. 7. Cl. VI. Istvan Iren (MFL, E: 782, 84, 87, 89, 91).

BRĂILA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Mihai Ion (5041, 118, 208, 56, 61, 62, E: 1765 69, 72, 73, 75, 78—80, 88, 90, 99, 814, 16, 18, 20, 24, 30, 31, 35—37, 41), Lăzărescu Vasile (5180, 208, 42, 57, E: 1811, 24, 35, 36, 37, 40). Cl. X. Bibicu Ion (5157, 60, 63—65, 67, 69—72, 74, 76, 80, 83, 88, 91, 95, 96, 98, 200, 02, 07, 08, 10, 14, 24, 31, 36, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 57, 58), Gomolca Viorica (5207, 08, 10, 29, 48, 56, 57, 61, 65, 70).

Ş.m. 3. Bibicu Mariana (5180, 83, 95, 231, 38, 42. 48, 56, 53, 62, E: 1801, 02, 05—09, 16, 18, 22, 24, 28—30, 35, 36, 41), Calivi Ion (E: 1801—03, 05—09, 11, 30, 37), Chihaia Constantin (E: 1802, 03, 06—09, 11, 14, 22, 41), Costiu Roxana (E: 1801—03, 06, 07, 09, 18, 29, 30, 35, 37), Drăghicescu Dan (E: 1801—03, 05—07, 09, 11, 30, 37), Ene Valerica (E: 1780, 83, 86, 802, 03, 07, 09—12, 15), Iosif Nicolina (E: 1806, 07, 09, 11, 22, 23, 26, 28, 29, 35), Pagu Steluţa (E: 1806, 07, 09, 11, 22, 24, 28, 29, 35, 87), Papagu Nacu (5193, 200, 38, 42, 43, E: 1801—03, 05—11, 16, 18, 20, 22, 24, 31, 35—37). State Marilena (E: 1802, 03, 06—11, 17, 25, 37). Cl. X. Abramovici Ella (5160, 63, 65, 67, 69, 89, 96, 202, 07, 08, 10, 24, 40, 42, 46), Balter Evi (5160, 69, 70, 75, 80, 202, 07, 08, 10, 40, 45, 52, 72), Haimovici Clara (5170, 80, 202, 07, 08, 40. 45, 57, 61, 72), Mihăilă Eufrosina (5163, 65, 70, 80, 202, 10, 24, 42, 45, 46, 61, 74).

Ş.m. 4. Cl. IX. Stănescu Tudor (5160, 64, 67, 70, 75, 83, 95, 239, 43).

BREAZA. S.m. internat Dimitrie Cantemir. Cl. VIII. Dobre Ion (5160, 65, 80, 83, 93, 200, 02, 31, 38, 42, 49, 57, 61, 62, E: 1816—32, 35—38, 40, 41), Duducă Alexandru (E: 1801—09, 11, 13, 14, 16, 18, 22, 24, 25, 28, 30, 32, 36, 37), Schmidt Ion (E: 1801—09, 11, 13, 16, 22, 24, 26, 28—30, 32, 36, 37, 41). Cl. IX. Bîrză Ilie (5149, 62, 70, 73, 80, 86, 95, 200, 03, 08, 12, 14, 15, 22—24, 29, 31, 34, 36—39, 42, 44, 48—51, 57, 59, 61, 66, 67, 70, 74, 81, 86), Ivan Mircea (5067, 99, 110, 16, 20, 26, 29, 39, 40, 60, 64, 80, 183, 202, 12, 24, 31, 39, 44).

BUCUREŞTI. Absolvent Drăgan Marin (5207—13, 38, 39, 42—45).

Ş.m. 1. Cl. VIII. Ciobanu Nicolae (E: 1816—21, 23—26, 28, 29), Ionescu Liviu (E: 1801—09, 16, 18, 23), Ştefănescu Sabba (5165, 93, 95, 200, 08, 12, 24, 31, 38, 42, 57, 59, 61, 66, E: 1796, 817, 23—26, 28—33, 36, 37), Topală Ion (5145, 52, 93, 95, 200, 08, 12, E: 1819, 23, 29). Cl. IX. Colban Mihai (5208, 12, 16, 21, 24, 31, 38, 39, 42—44, 48, 49—51). Cl. X. Anastasescu Ion (5160, 63, 65—67, 69, 70, 76, 93, 95, 96, 202), Ionescu Barbu (5170, 207, 12, 16, 24, 34, 38—40), Ionescu Mihai (5118—26, 30, 34, 36, 40, 45, 46, 50—55, 63—65, 79, 88, 93, 95, 96, 93, 99, 207, 08, 10, 12, 18, 31), Radovici Paul (5109, 10, 15, 16, 18, 19, 25, 35, 36, 39, 41), Bădună Mihai (5157, 60, 63, 65, 67, 69, 93, 96, 207, 08, 10, 12, 24, 39, 40, 42, 44—46, 48, 49, 52, 57, 59—61, 64, 67, 70, 95). Ş.m. 2. Cl. X. Florescu Ilie (5072, 73, 89, 100, 10, 20, 39, 43, 49, 52, 62, 64, 76, 89), Mihai Grigorian (5157, 59, 60, 62, 67, 69, 70, 75, 76, 79, 86, 88, 202, 06). Ş.m. 3. Ion Neculce. Cl. V. Nicolescu Nicolae (E: 1802, 03, 06, 11, 18, 30, 31, 36). Ş.m. 4. Cl. IX. Oros Justin (5120, 30, 50, 52, 60, 65, 67, 70, 75, 80, 83, 89, 93, 95, 200, 02, 24, 31). Cl. X. Martiş George (5172, 80, 89, 207, 16, 21, 57, 73, 74, 100, 02, 03, 18—20, 22, 25, 34, 45, 52—55, 63), Niţă Alexandru (5216, 21, 23, 24, 48, 49, 61, 74, 79, 81, 83, 86), Răchiţeanu Getta (5207, 08, 24, 29, 48, 57, 59, 61, 62, 66). Ş.m. 8. Cl. VIII. Dobre Gabriela (5180, 224, 08, E: 1802, 03, 06—11), Ilie Justina (5160, 80, 83, E: 1802, 03, 06—11, 27, 28), Mateescu Vornelia (5160, 80, 81, 208, 24, E: 1802, 03, 06—11). Ş.m. 11. Cl. VIII. Cojocaru Radu (E: 1801—03, 05, 06, 08, 09, 11, 16, 18, 20, 24, 27, 30, 31, 36, P), Dumitru Mihai (5249, 75, 59—62, E: 1802, 03, 06—09, 11, 30, 33, 37, 38, 40), Georgescu Cosmin (E: 1801—06, 08, 10, 13, 16, 18—23, 26—28, 30, 32, 39—41), Medaru Doina (5208, E: 1813, 14, 16, 18, 23, 24, 30, 32, 35—37, 39, 40), Ştefan Şerban (E:

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ORSZÁGOS 1883

1801—03, 06—11, 16). Cl. VIII. Tonceanu Dan (5248, 57, 61, 62, E: 1812, 16, 18, 20, 23, 24, 29, 30, 32, 37, 48, 57, 61, 62). Cl. X. Agricistea Mihai (5157, 60, 67, 69, 70, 83, 88, 202), Curatu Eugen (5143, 60, 61, 63, 67, 240, 45, 46, 48—53, 60, 64), Ursulescu Florin (5157, 58, 67, 69, 73, 76, 83, 88, 90, 93, 95, 98, 200, 02). Ş.m. 12. Cl. IX. Cristescu Valentin (5112, 23, 36, 40, 43, 45, 49, 53, 54, 93). Cl. X. Ciobanu Mircea (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 26, 27, 29, 30, 35, 39—41, 44, 46, 49, 57, 60, 67, 70, 71, 75, 76, 83, 90, 93, 202), Deutsch Ştefan (5160, 67, 70, 76, 207, 08, 10, 52, 53, 67), Lazarovici Cristian (5157, 60, 67, 69—71, 75, 76, 83, 93). Cl. XI. Varujan Zahregian (5158, 59, 62, 63, 68, 69, 217, 36, 48, 49, 74, 79, 81, 84—86, 88). Ş.m. 13. Cl. IX. Cristea Valentin (5224, 48—51, 57—62, 74, 86). Cl. X. Aldea Ion (5157, 60, 63, 69, 75, 79, 88, 91, 95, 202), **Guţă Cristian** (5157, 60, 63, 65, 67, 69, 80, 83, 88, 93, 95, 96, 99, 200, 02, 07, 08, 10, 14, 21, 24, 31, 39, 42, 44, 48—50, 53, 56—62, 66, 67, 84), Horhoianu Valentin (5109, 15, 19, 25, 35, 43, 80, 207, 10, 46), Saur Şerban (5157, 60, 67, 80, 83, 89, 202, 14, 50, 74, 86). Ş.m. 16. Cl. X. Ion Constantin (5160, 61, 70, 75, 207, 08, 10, 18, 24, 48, 57—62, 66, 67), **Moscovici Cornel** (5126, 31, 57, 58, 64, 65, 69, 70, 73—76, 80, 83, 86, 88, 90, 95, 98, 207, 10, 12—14, 16, 21, 24, 31, 32, 34, 38—40, 42, 44, 45, 53, 78, 83, 84). Ş.m. 17. Cl. VIII. Almer David (5183, 93, 95, 200, 18, 31, 38, 42—44, E: 1801—11, 16, 30), Kanner Dan (5216, 18, 31, 48, 57, 70, 71, E: 1801—04, 07, 09, 11, 14, 17, 23, 25, 26, 28, 30, 35, 40, 41). Cl. X. **Crainic Emanuel** (5068, 72, 90, 99, 100, 03, 07, 12, 12, 18—23, 25, 26, 30, 40, 43, 49, 50, 52, 53, 61, 63, 64, 69, 70, 93, 207, 08, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 29, 31, 36, 42, 46), Danciu Florin (5157, 59, 62, 65, 67, 69, 75, 95, 96, 98, 200, 02), **Sirocker Iosif** (5067, 69, 73, 74, 79, 80, 82, 86, 90, 96, 99, 100, 03, 07, 10, 12, 13, 16, 18—22, 25, 35, 36, 39, 43, 44, 46, 57, 58, 60, 63, 64, 67, 70, 75, 86, 88, 91, 93, 202, 07, 08, 10, 12, 21, 38—40, 49—53, 57—62, 66, 67, 70, 81, 83, 85, 86). Ş.m. 18. Cl. VIII. Aronovici Jacques (5160, 67, 93, 200, 08, 16, 18, 31, 38, 42, 43, 49, 57, 70, E: 1802, 06, 08, 13, 16—18, 22—24, 30, 36, 37, 41), Iordache Florin (5216, 31, 70, 71, E: 1810, 17, 25, 26, 28—30, 35, 37, 39—41). Ş.m. 19. Cl. X. **Feran Monica** (5110—13, 15—17, 21—25, 30, 35, 41, 43, 50, 57, 60, 63—65, 67, 69, 70, 80, 93, 96, 200, 02). Ş.m. 20. Cl. IX. Teodorescu Raluca (5160, 64, 67, 218, 57, 59, 61, 62, 70, 86), Zarchievici Mihaela (5157, 59, 60, 62, 67, 224, 48, 57, 59, 70). Cl. X. **Buiculescu Mioara** (5157, 60, 63, 64, 67, 92, 96, 202, 07, 08, 10, 12, 18, 36, 39, 40, 42, 44—46, 48—53, 57—67, 70, 71, 84, 86, 95, 98), Negoescu Gh. (5157, 60, 63—67, 69, 70, 83, 92, 93, 95, 97—200), Pitulice Petru (5193, 212, 29, 39, 49, 50—53, 57, 59—61, 67, 74, 81, 84, 85, 95), Rotaru Mircea (5157, 59, 60, 63, 64, 67, 92, 98, 207, 08, 12, 40, 44—46), Rusu Adrian (5160, 63, 67, 70, 93, 96, 207, 08, 10, 16, 24, 31, 40, 45, 46, 52, 53, 57, 59—61, 67, 81, 86). Ş.m. 22. Cl. VIII. Tiron Dan (5216, 31, 38, 42—44, 48, 49, 57, 59, 61, 66). Cl. X. Comănescu Mihai (5109, 57, 69, 83, 91, 202, 07, 08, 10, 14, 21, 48, 50, 52, 53, 57, 59—61, 64, 67, 70, 71, 74, 81, 86), Frankenfeld Corneliu (5067—73, 89, 96, 100, 10, 15, 16, 35, 60, 63, 65, 70, 98, 202), Manolache Nicu (5110, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 39, 50, 60, 63, 67, 202), Popescu Viorel (5110, 15, 16, 18—20, 25, 55, 60, 63, 69, 70, 73, 80, 95, 208, 10, 16). Cl. XI. Buşu Constantin (5152, 59—61, 70, 75, 201, 07, 08, 10, 16, 24, 48, 57—62, 67), **Radu Dan** (5118—25, 27, 29, 31, 45, 50, 52—54, 57—65, 67—70, 72—76, 79—81, 83, 85, 86, 88—91, 93, 98, 206). Ş.m. 23. Cl. IX. Petrescu Sorin (5160, 67, 75, 80, 83, 202, 24, 29, 31, 48—51, 58—62, 66, 81), Moldoveanu Gabriel (5157, 60, 63—65, 67, 69, 80, 95, 98, 202). Ş.m. 32. Cl. VIII. Abramovici Eugen (5248, 49, 57, 30, 35, 37, E: 1802, 03, 08, 11, 14, 15, 23, 26, 27). Ş.m. 37. Sachter Mauriciu (5157, 60, 63, 69, 86, 207, 08, 10, 24, 39, 40). Şc. elem. nr. 7. Cl. VI. Bochiş Vladimir (E: 1802, 06, 08, 18, 26, 30). Şc. elem. nr. 130. Cl. VII. Roşca Constantin (E: 1801—06).

Grupul şcolar c.f.r. Sgăvîrdea Dumitru (5157—62, 69, 70, 75, 80, 88, 89, 202, 08—10, 14, 31, 48—50, 53, 57, 59—61, 72, 75, 81, 83, 84, 86, P), Florea Gh., (5099, 45, 52, 95, E: 1776, 78—80, 86—89, 95, 99, 301, 03—05, 09, 10, 14).

ERATĂ. La — pag. 437 la evidenţiaţi se va adăoga: 57 bis. Drugă M. Gh., elev Breaza.

CATRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Nu se vor separa problemele de matemaică de cele de fizică şi vor fi trimise în acelaşi plic, aşezate în ordinea numerică.

Se primesc lunar cel puţin zece soluţii numai la problemele şi exerciţiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea şi şcoala pe care o urmează rezolvitorul pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme şi a listei celor evidenţiaţi. Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 36 soluţii bune.

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce, să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară şi concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\| =$; $\sim$; $*$ $*$ $*$; $\perp$; $\|$; Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări uşor desfăşurarea unei demonstraţii. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor IX—XI sau studenţii vor trimite soluţii la problemele propuse pentru clase VIII—XI. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.F.—B sau M.F.L. Problemele rezolvate de matematică şi fizică vor fi expediate odată în cursul unei luni într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului.

Elevii claselor V—VII vor fi anunţaţi la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit cel puţin 7 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor VIII—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate.

— *Colaboratorii G.M.F.-B, profesori şi elevi, sînt rugaţi să trimită îndată redacţiei, fişa completată cu activitatea extraşcolară şi în cercurile de elevi pe anul 1961—1962, conform celor publicate în nr. 1, 1962, pag 30. Activitatea rezolvitorilor din nr. 9—12 ale G.M.F.-B se va trece de către redacţie.*

— *Evidenţiaţii de cel puţin 2 ori pot trimite totalizarea problemelor rezolvate şi anunţate în nr. 1—9, G.M.F.-B-1962.*

— *Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.*

In G.M.F.B. nr. 3, pag. 153 s-a publicat: *Un concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică.* Participanţii la acest concurs pot fi: profesori, ingineri, maiştri, studenţi sau elevi. Concursul se încheie la 1.XI.1962.

— *Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B şi altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.*

— *Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poştale locale sau prin factorii poştali.*

Intreprinderea Poligrafică nr. 6. c-da 4642 **Lei 1,50**

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XIII septembrie 1962

9

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 9 — septembrie 1962

SUMARUL

		Pag.
1.	La început de nou an şcolar de Ilie Popa director general în Ministerul Învăţământului	513
2.	Deplasări de Eugen Rusu, Bucureşti	514
3.	Efectul Doppler de Tănase Dumitru, Bucureşti	521
4.	Scurtă privire istorică asupra dezvoltării algebrei de Iacob Crişan, Bucureşti	525
5.	Notă matematică de V. Vodă, Bucureşti	528
6.	Probleme rezolvate (4704, 4711, 4715, 4722, 4724, 4742, 4744, 4752, 4754, 4755; E: 1700—1702; MFL, E: 756—759)	531
7.	Chestiuni de examen (5434—5442)	544
8.	Probleme propuse (5443—5471)	545
9.	Exerciţii şi probleme pentru clasele V—VII (E: 1882—1893)	550
10.	Despre activitatea cercului de matematică al clasei a XI-a, de la şcoala medie nr. 1 „N.Bălcescu", Bucureşti	552
11.	Cărţi noi	554
12.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	555

ANUL XIII **9** SEPTEMBRIE

O parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Bucureşti a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R.

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Cristea I.*, asistent; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Kiss E.*, conf. univ.; *Koch Fr.*, lector; *Kovacs K.*, conf. univ.; *Lévai Şt.*, asistent; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D.*, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 9 septembrie 1962

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

LA ÎNCEPUT DE NOU AN ȘCOLAR

de Prof. univ. ILIE POPA, director general al înv. de cultură generală

Deschiderea fiecărui nou an școlar prilejuiește emoții atît elevilor cît și profesorilor și, adesea, începutul unui nou an școlar marchează adevărată cotitură în viața celor legați de școală.

Vacanța elevilor, chibzuit organizată, contactul nemijlocit cu realitățile de azi ale patriei noastre realizat prin excursiile făcute în lungul și latul țării de sute de mii de elevi, schimbul de experiență efectuat în nenumăratele tabere de pionieri și școlari nu pot să nu trezească dorința de a munci mai mult și mai bine.

Încheierea cu succes, și cu mult înaintea termenului fixat, a colectivizării agriculturii ne dă certitudinea că nu-i departe timpul cînd, conduși de încercatul și înțeleptul nostru partid leninist, vom trece la construirea comunismului, societate cum n-a cunoscut încă omenirea în multimilenara sa istorie. Comunismul se construiește pentru și de către oameni multilateral și armonios dezvoltați, iar grija partidului nostru pentru o astfel de dezvoltare nu cunoaște margini. Iată motiv, nou și puternic, pentru ca tineretul nostru de azi — constructorul societății comuniste de mîine — să învețe mai repede și mai adînc și pentru ca profesorii noștri să-și desăvîrșească măiestria didactică.

Documentele de partid și de stat au subliniat totdeauna rolul important ce revine matematicii în construirea noii societăți; faptul constituie un imbold în plus pentru toți cei ce au îndrăgit această știință — nu prea ușoară dar pasionantă și extrem de utilă.

Matematica e grea pentru cei ce nu au făcut efortul necesar pentru a-i înțelege legăturile interne, pentru cei ce n-au avut răbdare să se exerciteze continuu și îndelungată vreme. E bine să nu uităm că de la Marx ne-au rămas cîteva mii de pagini de exerciții și valoroase observații asupra matematicii.

Matematica are destule elemente pentru a trezi și cultiva sentimente estetice și de a da încredere în forțele proprii. Un strălucit matematician și excelent pedagog spunea că, în rezolvarea prin forțe proprii a unui cît de simplu exercițiu, se poate încerca tensiunea și bucuria descoperirii.

Prin număr și relații, matematica este capabilă să exprime aspecte cantitative și calitative ale fenomenelor naturii, iar, printr-un destul de înalt grad de abstractizare, matematica oferă scheme valabile pentru

fenomene ce, aparent, sînt diferite. Din astfel de calități, izvorăște utilitatea matematicii.

Matematica este din ce în ce mai solicitată în a-și aduce contribuția în diverse domenii de activitate și, în mod cu totul deosebit, în tehnica nouă. Școlii noastre îi revine sarcina de a pregăti cît mai temeinic — în special prin legarea matematicii de viață — și cît mai mulți oameni capabili de a folosi matematica..

În opera de răspîndire a gustului pentru matematică și fizică, ca și în cea de popularizare a metodelor avansate de predare a lor, Societatea de Matematică și Fizică a adus o contribuție remarcabilă. Apariția Gazetei de Matematică și Fizică seria B într-un tiraj de aproximativ 20 000 exemplare ca și numărul de aproape 10 000 elevi rezolvitori de probleme exprimă limpede larga popularitate a Gazetei printre elevii noștri.

Olimpiadele (națională și internațională) au demonstrat rodnicia activității „Societății" în munca cu elevii.

Abordarea mai multor teme didactice și ideologice (la nivelul școlii de cultură generală), o mai largă colaborare a cadrelor didactice ca și mărirea numărului de elevi rezolvitori de probleme, vor face încă mai eficientă activitatea Societății de Matematică și Fizică. În această acțiune, profesorii de matematică și cei de fizică au un larg cîmp de activitate, iar actualii elevi rezolvitori de probleme pot antrena în această activitate încă mulți colegi ai lor.

La începutul anului școlar 1962—1963, urăm spor la muncă iubitorilor de matematică și fizică!

DEPLASĂRI

EUGEN RUSU

1. **Ce este un corp solid.** Se știe că, spre deosebire de corpurile lichide și gazoase, corpul solid nu-și schimbă forma și nici dimensiunile. Care este definiția matematică a corpului solid? În matematică se dau definiții care corespund noțiunilor luate direct din realitate (căci și matematica este o știință a realității), dar care au o astfel de formă încît să putem încadra noțiunea respectivă în modul de lucru specific matematicii: deducții logice, calcule etc. În matematică, un corp solid se definește ca un sistem de puncte care rămîn la distanțe invariabile unul de altul.

2. **Mișcările unui solid.** Cele mai simple mișcări pe care le poate avea un solid sînt:

a. *Translația.* Toate punctele descriu drumuri rectilinii egale, paralele, de același sens. Translația este bine determinată cînd ni se dă un vector (un segment orientat) $\overline{AA'}$ de exemplu, drumul descris de unul din puncte, A. Dacă ni se dă vectorul $\overline{BB'}$ descris de un alt punct, B (vectorul $\overline{BB'}$ fiind egal în mărime, paralel și de același sens cu $\overline{AA'}$), translația definită de el va fi aceeași; de aceea spunem că translația este dată printr-un vector *liber* (oriunde ar fi origina lui, dacă își păstrează mărimea, direcția și sensul, el definește aceeași translație).

b. *Rotația.* Dacă două puncte A și B ale unui solid rămîn fixe, toate punctele dreptei AB vor rămîne fixe, iar solidul nu va putea efectua decît o rotație în jurul dreptei AB; punctele care nu sînt pe axa de protație vor descrie arce de cerc egale (ca număr de grade) și situate în plane perpendiculare pe axă. În general, o rotație este determinată cînd se dă o dreaptă, numită axa de rotație, și un unghi (în mărime și cu un sens față de axă, de exemplu, cu ajutorul arcului descris de unul din puncte).

c. *Deplasarea elicoidală* (mișcarea șurub). Să ne imaginăm un șurub pe care îl înșurubăm într-o scîndură. Cînd am rotit șurubelnița de un anume unghi (care poate fi și mai mare de 360°), șurubul s-a deplasat de-alungul axei lui (raportul dintre distanța cu care a avansat șurubul și unghiul cu care s-a rotit este constant pentru același șurub, dar depinde de „pasul" șurubului, adică de modul cum e făcut filetul de pe margine).

În general, numim deplasare elicoidală a unui solid mișcarea compusă dintr-o rotație în jurul unei axe și o translație paralelă cu acea axă. Deoarece nu ne interesează pozițiile intermediare, ci numai poziția inițială și cea finală, putem să considerăm că solidul a efectuat o rotație dată și apoi o translație dată paralelă cu axa de rotație sau, invers, că a efectuat întîi translația dată și apoi rotația.

Deplasarea elicoidală este bine determinată cînd se dă axa ei, unghiul de rotație și vectorul de translație (paralel cu axa). Translația și rotația sînt cazuri particulare ale deplasării elicoidale. Translația este deplasarea elicoidală care are unghiul de rotație zero, iar rotația este deplasarea elicoidală al cărui vector de translație are mărimea zero. Dacă luăm cazul cu totul particular cînd și unghiul de rotație e nul și vectorul de translație e nul, solidul nu și-a schimbat poziția, rămîne complet pe loc; deplasarea (care în fond nu mai există) se numește în acest caz, *transformare identică.*

Acestea sînt mișcările cele mai simple ale solidului și cele mai obișnuite în tehnică. Dar ne putem închipui un solid care are o mișcare mult mai complicată (un bumerang aruncat în aer, o barcă în voia valurilor agitate etc.). Cum am putea găsi mișcarea de la o poziție la alta a solidului-? Aceasta este o problemă care se studiază în cinematică. Putem considera însă, o problemă mai simplă, de geometrie pură: fiind date două poziții ale aceluiași corp solid, care este mișcarea cea mai simplă prin care corpul poate fi deplasat dintr-o poziție în cealaltă?

Vom arăta mai departe un rezultat greu de prevăzut numai prin intuiție: oricît de complicată ar fi fost mișcarea efectivă prin care un corp solid a ajuns din poziția C_1 într-o altă poziție C_2, se poate ajunge de la poziția C_1 la poziția C_2 printr-o deplasare elicoidală (eventual printr-o translație sau o rotație — cazuri particulare ale deplasării elicoidale).

Pentru a ajunge la acest rezultat, important atît din punct de vedere teoretic și practic, vom folosi o metodă care este și ea importantă, avînd o largă folosire în matematica modernă și anume, compunerea mișcărilor (în general compunerea transformărilor de figuri).

Ca element fundamental vom considera rotația de 180°; aceasta este tot una cu simetria față de o dreaptă.

Fiind dată o dreaptă d, luată ca axă de simetrie, simetricul unui punct A față de d este punctul A' situat pe perpendiculara dusă din A pe d la aceeași distanță de d ca și a punctului dat, A (fig. 1). Este ușor de văzut că A' poate fi obținut din A printr-o rotație de 180° în jurul axei d.

Dacă punctului A îl aplicăm simetria de axă d, iar punctului găsit A_1 îi aplicăm aceeași simetrie, obținem din nou punctul A de la care am plecat. Această observație ne va fi utilă mai departe.

3. **Compunerea simetriilor.** Problema este: fiind date două simetrii S_1 și S_2 de axe d_1 respectiv d_2, aplicăm unei figuri oarecare F simetria

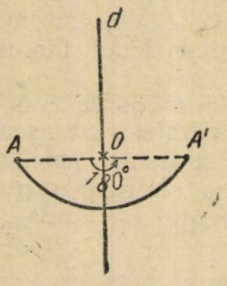


Fig. 1.

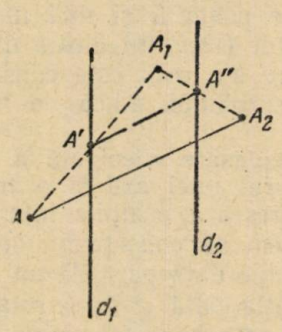


Fig. 2.

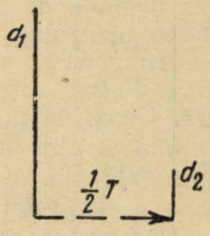


Fig. 3.

S_1 și găsim figura F_1 (de fapt, tot figura F într-o altă poziție), apoi figurii F_1 îi aplicăm simetria S_2; ne întrebăm dacă există o mișcare care aplicată lui F să o ducă direct în F_2. Transformarea sau mișcarea care duce pe F în F_2 o vom numi *produsul* celor două simetrii date.

Pentru a găsi acest produs, vom studia separat diversele cazuri posibile.

a. *Simetrii de axe paralele.* Considerăm un punct oarecare A, simetricul său față de d_1, punctul A_1, simetricul lui A_1, față de d_2, punctul A_2 (fig. 2).

Punctele A, A_1, A_2 sînt situate într-un plan perpendicular pe cele două axe de simetrie. Segmentul $A'A''$ (fig. 2) este situat pe perpendiculara comună a dreptelor d_1 și d_2 și are ca mărime distanța între aceste drepte, fiind orientat de la d_1 spre d_2. Acest segment $A'A''$ este linie mijlocie în triunghiul AA_1A_2; deci, vectorul AA_2 este paralel cu vectorul $A'A''$, are mărimea dublă și același sens. Dacă considerăm un alt punct M și îi aplicăm succesiv simetriile S_1 și S_2 ajungem la un punct M_2 astfel încît vectorul MM_2 este egal cu AA_2 (paralel, de același sens și cu aceiași mărime).

Considerînd toate punctele unei figuri F găsim că aplicarea succesivă a celor două simetrii este echivalentă cu aplicarea unei translații de vector AA_2.

Produsul a două simetrii de axe paralele este egal cu o translație definită de un vector care are mărimea egală cu de două ori distanța celor două axe, direcția paralelă cu perpendiculara comună și sensul dela prima axă spre a doua.

Ne punem acum problema inversă: fiind dată o translație T putem găsi două simetrii de axe paralele al căror produs să fie egal cu translația dată?

Putem, și chiar în mai multe feluri. Trebuie să avem clar în minte compunerea simetriilor. Cele două axe paralele trebuie să fie perpendiculare pe vectorul $\overline{T}$ dat. Una din axe o luăm o perpendiculară *oarecare* pe $\overline{T}$ (fig. 3); dacă am fixat astfel pe d_1, dintr-un punct al ei ducem un vector paralel cu $\overline{T}$, în același sens și egal cu jumătate din el; găsim astfel un punct al axei a doua, d_2. Dacă însă am fi început prin a fixa axa simetriei a doua, d_2, am fi procedat la fel, numai că paralela o

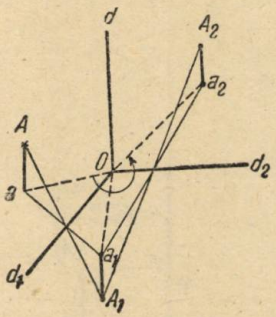


Fig. 4.

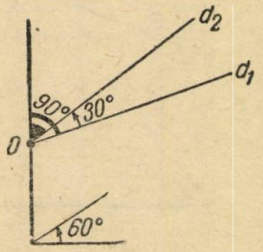


Fig. 5.

ducem în sens contrar. Ca probă, compunînd cele două simetrii găsim translația dată de T.

În cele ce urmează ne va fi utilă atît compunerea simetriilor, cît și descompunerea translației în produs de două simetrii; faptul că descompunerea se poate face în mai multe feluri este utilă pentrucă într-o problemă dată putem *alege* descompunerea cea mai convenabilă.

b. *Simetrii de axe concurente.* Fie d_1 și d_2 axele celor două simetrii date, concurente în punctul O și fie d perpendiculara în O pe planul lor. Să examinăm cu atenție, figura 4; pentru a găsi simetricul A_1 al punctului A față de d_1, am folosit teorema celor trei perpendiculare, tot astfel pentru a găsi simetricul A_2 al punctului A_1 față de d_2. Am notat cu a, a_1, a_2 proiecțiile punctelor A, A_1, A_2 pe planul (d_1, d_2) (în fig. 4, dacă ne imaginăm că A este deasupra planului d_1, d_2, punctul A_1 va fi dedesupt, iar A_2 din nou deasupra). S-au format perechi de triunghiuri dreptunghice egale — cititorul le va găsi ușor — din care deducem $aA = a_1A_1 = a_2A_2$.

Să vedem întîi, cum ajungem de la a la a_2. Din triunghiurile dreptunghice situate în planul d_1, d_2, deducem $Oa = Oa_1 = Oa_2$. Unghiul aOa_2 (sensul din figură) este de două ori cît $\sphericalangle d_1Od_2$ (căci $\sphericalangle aOa_1 = 2\sphericalangle d_1Oa_2$ și $\sphericalangle a_1Oa_2 = 2\sphericalangle a_1Od_2$; pentru mai multă ușurință, cititorul poate desena separat planul (d_1, d_2) cu punctele și dreptele care se află pe el, văzut din față). Rezultă că putem ajunge de la punctul a la punctul a_2 printr-o rotație în jurul lui O de unghi dublu cît $\sphericalangle d_1Od_2$. Dacă punctului A îi dăm o rotație în jurul lui d de unghi $2\sphericalangle (d_1Od_2)$, ajungem în A_2 (căci $aA = a_2A_2$ și în rotație A descrie un arc de cerc

paralel cu cel descris de a). Această rotație nu depinde de punctul A ales ; deci, orice punct al figurii F am fi ales, el ar fi descris aceiași rotație. În concluzie :

Produsul a două simetrii de axe concurente este o rotație având ca axă perpendiculara în punctul comun pe planul celor două axe de simetrie date și ca unghi dublul unghiului celor două axe, cu același sens.

Ca și în cazul precedent, și acum putem rezolva problema inversă : fiind dată o rotație putem găsi două simetrii de axe concurente al căror

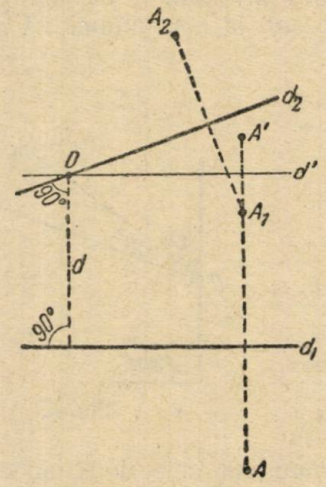


Fig. 6.

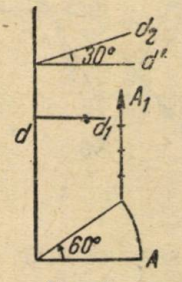


Fig. 7.

produs să fie egal cu rotația dată. Vom alege ca axă d_1 sau d_2 o perpendiculară *oarecare* într-un punct *oarecare* al axei de rotație ; cealaltă axă de simetrie va fi bine determinată ținînd seama de compunerea simetriilor. Exemplu : dacă s-a dat o rotație de axă d și unghi 60° (fig. 5), ducem într-un punct O al ei o perpendiculară pe d pe care o numim d_1 ; d_2 va fi bine determinată prin condițiile : 1) este perpendiculară tot în O pe d și 2) formează cu d_1 unghiul de 30° la fel orientat ca și unghiul de rotație dat.

c. *Simetrii cu axe nesituate în același plan.* Fie d perpendiculara comună a dreptelor d_1 și d_2, cele două axe de simetrie date, (fig. 6). Ducem prin O (fig. 6) dreapta d' paralelă cu d_1 și o luăm ca axă a unei simetrii S'. În loc să aplicăm unui punct oarecare A simetria S_1 (de axă d_1) urmată de simetria S_2 (de axă d_2), îi vom aplica succesiv simetriile S_1, S', S', S_2.

Rezultatul este același ; în adevăr, prin S_1, A trece în A_1 ; prin S', A_1 trece în A' ; din nou prin S', A' trece în A_1 ; prin S_2, A_1 trece în A_2.

Ce rost are introducerea simetriei S' care pentru moment pare a fi o complicație în plus ? După cum vom vedea îndată, în acest fel putem folosi cele două cazuri anterior studiate. Să urmărim atent transformările lui A. Aplicăm S_1', apoi S' ; pînă acum am aplicat deci, o translație (două simetrii de axe paralele), cu care am ajuns din A în A' ;

acum aplicăm lui A' simetria S' urmată de S_2; adică, aplicăm lui A' o rotație. Pe scurt, scriem astfel: $S_1 \cdot S_2 = S_1(S' \cdot S') \cdot S_2$ (căci simetria S' aplicată de două ori nu schimbă punctul).

$$S_1(S' \cdot S') \cdot S_2 = (S_1 \cdot S') \cdot (S' \cdot S_2) = T \cdot R.$$

În loc să aplicăm lui A simetria S_1 urmată de S_2, îi aplicăm S_1, S', S', S_2 ceea ce duce la același rezultat, căci S' este aplicat succesiv de 2 ori. Însă S_1 urmat de S' este o translație (de vector 2d), iar S' urmat de S_2 este o rotație de axă d (și de unghi dublul unghiului d', d_2). Translația fiind în lungul axei rotației avem o deplasare elicoidală. Concluzie:

Produsul a două simetrii cu axe nesituate în același plan este o deplasare elicoidală având ca axă perpendiculara comună celor două axe de simetrie date, mărimea vectorului de translație este 2d, unde d este distanța celor două axe, unghiul de rotație este 2ω, unde ω este unghiul celor două axe.

Invers: o deplasare elicoidală poate fi descompusă (în mai multe feluri) în produs de două simetrii.

Exemplu. Fie o deplasare elicoidală de axă d, cu rotația de 60° și translația de 4 cm (fig. 7). Printr-un punct oarecare al axei d, ducem o perpendiculară pe ea, pe care o luăm ca d_1; din acest punct ne deplasăm pe d cu 2 cm (în sensul translației), luăm o dreaptă d' paralelă cu d_1, apoi luăm d_2 perpendicular pe d și așa ca să facă 30° cu d'. Dreptele d_1 și d_2 determină două simetrii al căror produs este deplasarea elicoidală dată.

4. **Compunerea deplasărilor elicoidale.** Fie date deplasările elicoidale D_1 și D_2 de axe a și b (fig. 8); (pe figură sînt marcate vectorul de translație T și unghiul de rotație ω pentru D_1). Ducem perpendiculara comună d' a dreptelor a și b și o luăm ca axa unei simetrii S'. Dsecompunem pe D_1 într-un produs de două simetrii în care al *doilea* factor să fie S'; luăm d_1 perpendicular pe a, astfel ca $\overline{A_1A} = \frac{1}{2}\overline{T}$ iar unghiul (d_1, d') să fie $\frac{1}{2}\omega$. Avem $D_1 = S_1 \cdot S'$ unde S_1 este simetria de axă d_1. Descompunem și pe D_2 într-un produs de două simetrii în care *primul* factor să fie S'; $D = S' \cdot S_2$.

În loc să aplicăm unui punct M deplasarea D_1 urmată de D_2, îi vom aplica simetria S_1 urmată de S' (pînă acum am obținut deplasarea D_1), iar punctului găsit îi aplicăm simetria S' urmată de S_2 (adică îi aplicăm D_2). Simetria S' fiind aplicată de două ori la rînd, e tot una dacă punctului M îi aplicăm simetria S_1 și punctului găsit simetria S_2. (Dela M trecem la M_1, de la M_1 la M'', de la M' înapoi la M_1 și de la M_1 la M_2). Prescurtat scriem: $D_1 \cdot D_2 = (S_1 \cdot S')(S' \cdot S_2) =$
$S_1 (S' \cdot S') S_2 = S_1 \cdot S_2$.

Însă $S_1 \cdot S_2$ conform punctului precedent, este o deplasare elicoidală. Așa dar:

Produsul a două deplasări elicoidale este tot o deplasare elicoidală.

Acest rezultat este important și ar fi fost greu să-l bănuim numai cu ajutorul imaginației. Dăm unui corp solid o deplasare elicoidală

ajungînd din C în C_1 ; apoi din poziția C_1 îi dăm o altă deplasare elicoidală (cu altă direcție, alt unghi etc.) pînă în C_2. Există o deplasare elicoidală cu care putem aduce direct pe C în C_2 ; imaginația nu ne arată acest lucru, dar raționamentul făcut mai sus ne arată si cum se pot găsi exact elementele ei.

Demonstrația făcută este valabilă și în cazul cînd una sau ambele deplasări sînt mișcări particulare (translație sau rotație). Astfel : produsul unei translații cu o rotație oarecare (avînd axul neparalel cu vectorul translației) este o deplasare elicoidală (adică o translație com-

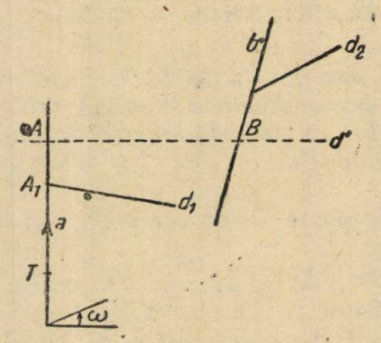


Fig. 8.

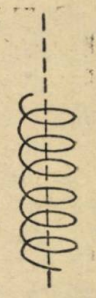


Fig. 9.

pusă cu o rotație avînd axa dealungul translației) ; produsul a două rotații de axe concurente este o rotație, cu axa trecînd prin același punct, fapt ce poate fi stabilit refăcînd demonstrația generală în acest caz particular (ceea ce e bine să se facă ca exercițiu) sau gîndindu-ne că punctul de concurență rămîne pe loc și o deplasare în care un punct rămîne pe loc nu poate fi decît rotație.

5. **Cum putem aduce în coincidență două poziții distincte ale unui corp solid.** Să considerăm trei puncte A, B, C necolineare ale corpului în poziția inițială și notăm cu A', B', C' pozițiile acestor puncte în corpul deplasat. Putem aduce cele două poziții S și S' în coincidență în modul următor : 1) dăm corpului S o translație determinată de vectorul $\overline{AA'}$; punctul A vine în A', B în B_1, C în C_1, punctele B_1 și C_1 fiind în general diferite de B' și C' ceea ce ne arată că încă nu este realizată coincidența ; corpul are acum o poziție S_1 care are comun cu poziția căutată S' numai punctul A. Să urmărim acum punctul B. 2) Ducem o perpendiculară în punctul A' pe planul $A'B'B_1$ și dăm corpului S_1 o rotație în jurul ei astfel încît B_1 să ajungă în B'. Corpul a ajuns acum cu 2 puncte A și B în pozițiile cerute, dar cu C într-o poziție C_2 în generală diferită de C'. 3) Dăm acum noii poziții S_2 o rotație în jurul axei $A'B'$ astfel încît punctul C_2 să ajungă în C'.

Prin cele 3 mișcări succesive : translație, rotație, rotație, punctele A, B, C au ajuns în A', B', C'.

În momentul cînd fixăm cele trei puncte ale solidului, acesta nu mai poate avea nici o mișcare, poziția lui este bine determinată, deci : două poziții diferite ale unui corp solid pot fi aduse în coincidență printr-o translație urmată de o rotație și de încă o rotație. Conform

teoremei generale, aplicarea succesivă a acestor deplasări echivalează cu o singură deplasare elicoidală (în cazuri particulare ea putînd fi o translație sau o rotație, de exemplu, dacă prin translația care aduce pe A în A' se întîmplă că și B vine în B' și C vine în C', coincidența s-a realizat printr-o singură translație; cînd spunem deplasare elicoidală includem, așa cum am mai spus, și cazurile ei particulare translația și rotația).

În concluzie, două poziții ale unui corp solid pot fi aduse în coincidență printr-o deplasare elicoidală.

Rezultat important. Este interesant a adînci atît rezultatul în sine și aplicațiile lui, cît și metoda care ne-a condus la el. Ne mărginim numai să enunțăm perspectivele deschise.

A. *Mișcarea generală a solidului.* Un corp solid poate avea o mișcare-șurub *uniformă*; axa deplasării fixă, în intervale de timp egale, unghiul de rotație în jurul axei același, translația paralelă cu axa aceiași. (Într-o astfel de mișcare fiecare punct descrie o *elice*, curbă asemănătoare cu un resort, fig. 9).

Mișcarea generală a soldului poate fi mult mai complicată. Dar pentrucă două poziții inifinit vecine pot fi aduse în coincidență printr-o deplasare elicoidală, vitezele diferitelor puncte *la un moment dat* se distribuie la fel ca în mișcarea șurub uniformă. În alt moment al mișcării, ea va apare tot ca o mișcare-șurub însă cu altă poziție a axei, cu altă viteză de rotație și cu altă viteză de translție.

Deci în studiul mișcării generale, elementul de bază este mișcarea-șurub; mișcara generală ar putea fi privită ca o succesiune rapidă de diverse mișcări-șurub, analog cu găsirea lungimii unei *curbe* prin însumarea unor segmente *de dreaptă* infinit mici, laturile unui poligon înscris în curbă.

B. Am folosit mai sus, compunerea și descompunerea deplasărilor. Teoria compunerii transformărilor de figuri — a transformărilor mai generale, nu numai a deplasărilor — ocupă un loc central în matematica modernă. Cu ajutorul ei se *clasifică* proprietățile geometrice; ele nu mai apar ca în geometria elementară, într-o înșiruire neorganizată, ci se grupează în categorii cu ajutorul transformărilor care le mențin. Deplasările sînt transformări care mențin egalitatea figurilor; alte transformări mențin forma, nu și mărimea, altele mențin numai caractere mai generale.

EFECTUL DOPPLER

de prof. *TĂNASE DUMITRU*, șc. medie 18, București

Cînd o locomotivă care fluieră sau un automobil de curse se apropie, se constată că după trecerea prin fața observatorului înălțimea sunetului se schimbă și anume scade cu o anumită cantitate. De altfel Doppler în 1842, în urma unor cercetări de astrofizică a ajuns la concluzia că frecvența unei vibrații determinată de un observator, trebuie să varieze, cînd izvorul de vibrație, observatorul, sau amîndoi sînt în mișcare față de mediul în care se propagă vibrația. Cercetarea experimentală a fenomenu-

lui în domeniul acusticii a fost făcută de Boys-Ballot în 1845. Ceva mai tîrziu Fizeau (1859), studiază influența deplasării mediului făcînd să interfere două raze luminoase, după ce se propagaseră una în sensul de curgere al unui curent de apă, iar cealaltă în sens opus — fenomen bazat pe mișcarea relativă a sursei față de observator.

Pentru stabilirea fenomenului Doppler trebuie ca sursa sonoră și aparatul (observatorul) să se afle într-un mediu continuu elastic.

Admitem că sursa emite oscilații (vibrații) cu perioada T, deci într-o secundă va emite un număr de oscilații: $\nu = \frac{1}{T}$ Numărul de oscilații înregistrate de aparat (observator) îl vom nota cu ν'. Mai departe se va stabili relația dintre ν și ν' în diferite cazuri de deplasare, precum și între λ și λ'.

Se notează cu „u" viteza sursei în raport cu mediul, cu „v" viteza observatorului în raport tot cu mediul și cu „V" viteza de deplasare a

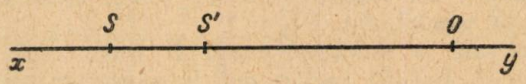


Fig. 1

oscilațiilor în mediul considerat. Se deosebesc următoarele cazuri:

I. Observatorul O și sursa S sînt în repaus față de mediu, de unde $u = 0$ și $v = 0$. Atunci la trecerea continuă a oscilațiilor pe lîngă observator, acesta va înregistra atîtea oscilații în unitatea de timp, cîte unde vor trece pe lîngă el în acest interval. Știind că unda se propagă uniform (mediu elasic omogen), distanța parcursă de undă în unitatea de timp este: $d = V.1 =$ atunci numărul de oscilații înregistrate de observator va fi:

$$\nu' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{VT} = \frac{1}{T} = \nu,$$

deoarece:

$$\lambda = VT.$$

Deci numărul de oscilații înregistrate de observator în unitatea de timp, este egal cu numărul oscilațiilor emise de sursă în același timp.

II. Sursa de deplasare cu viteza u și observatorul stă nemișcat, de unde $v = 0$. Se va urmări fenomenul în cazul propagării după o direcție $x\,y$ (fig. 1).

Sursa se găsește în S la momentul t, cînd pornește prima oscilație. Oscilația următoare pornește după T secunde, adică la momentul $t + T$. Oscilația propagîndu-se cu viteza V, atunci prima oscilație va ajunge în O la momentul $t + \frac{So}{V}$, iar a doua oscilație ce va pleca din S', noua poziție a sursei după T secunde, care a pornit la momentul $t + T$, va ajunge în O la momentul

$$t + T + \frac{So - SS'}{V}.$$

Distanța parcursă de sursă în T secunde cu viteza u este SS' și este dată de relația: $SS' = uT$. Atunci se poate calcula timpul scurs de la sosirea celei de a doua oscilații pînă la observatorul O care este tocmai perioada T', adică:

$$T' = t + T + \frac{So}{V} - \frac{uT}{V} - \left(t + \frac{So}{V}\right) - T - \frac{uT}{V}$$

sau:

$$T' = T\left(1 - \frac{u}{V}\right) = T\left(\frac{V-u}{V}\right) \qquad (1)$$

Folosindu-se de relațiile cunoscute: $\lambda = VT$, $\lambda' = VT'$ și $\nu = \frac{1}{T}$

rezultă: $\lambda' = \lambda \frac{V-u}{V}$ și $\nu' = \nu \frac{V}{V-u}$. (1')

Rezultă deci că, atunci cînd sursa se apropie de observator, perioada de oscilație ca și lungimea de undă scade (fig. 2), iar frecvența crește.

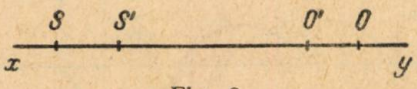


Fig. 2

Micșorarea lungimii de unde are loc la mișcarea sursei cu viteza u în sensul propagării undelor cu viteza V.

În adevăr: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = uT$,

sau:

$$\lambda' = \lambda - uT = VT - uT = T(V-u).$$

Numărul de oscilații înregistrate de observator este:

$$\nu' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{(V-u)T} = \nu \frac{V}{V+u}$$ așa cum s-a arătat și mai sus.

Dacă sursa se îndepărtează de observator (aparat), îi atribuim vitezei u semnul minus, astfel că va rezulta o creștere $\Delta\lambda$ a lungimii de undă, adică $\Delta\lambda = uT$ și deci:

$$\lambda' = \lambda + uT = VT + uT = T(V+u)$$

sau:

$$\frac{V}{\nu'} = \frac{1}{\nu}(V+u) \text{ respectiv } \nu' = \nu \frac{V}{V+u} \qquad (2)$$

Deci frecvența înregistrată de observator va fi micșorată, adică recepționează un ton cu frecvența mai joasă.

Dacă sursa se apropie de observator cu o viteză egală cu a undei (sunetului) va rezulta: $\nu' = \nu \frac{V}{V-V} = \infty$, adică va rezulta un sunet cu frecvența infinit de înaltă.

Dacă sursa se depărtează de observator cu o viteză V, atunci conform relației (2) rezultă $\nu' = \nu \frac{V}{V+V} = \frac{\nu}{2}$.

III. Observatorul se mișcă spre sursă ($v > o$).

Atunci pe lîngă observator va trece în unitatea de timp un număr mai mare de unde, decît în starea de repaus a observatorului. Creșterea numărului de unde va fi:

$$\Delta\nu = \frac{v}{\lambda} \text{ și } \nu' = \nu + \Delta\nu = \frac{V}{\lambda} + \frac{v}{\lambda} = \frac{V+v}{\lambda} = \nu \frac{V+v}{V} \qquad (3)$$

Dacă observatorul se depărtează de sursă, v va fi considerat cu semnul minus și relația va deveni:

$$\nu' = \nu \frac{V-v}{V}, \qquad (3')$$

adică numărul de oscilații înregistrate de observator va fi mai mic.

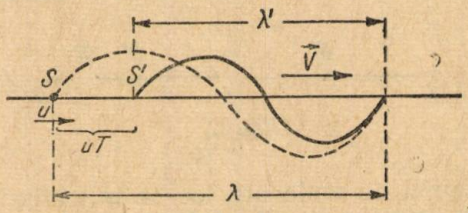


Fig. 3.

Dacă observatorul se depărtează de sursă cu viteză egală cu a undei (sunetului) $v = V$, atunci conform relației (3')

$$\nu' = \nu \frac{V-V}{V} = 0. \qquad (3')$$

Observatorul va merge în pas cu sunetul și nu va percepe nimic (aparatul nici o oscilație).

În schimb, dacă observatorul se apropie de sursă cu viteza de propagare a oscilațiilor, pentru el frecvența va fi conform relației (3)

$$\nu' = \nu \frac{V+V}{V} = 2\,\nu, \text{ adică dublă.}$$

IV. Sursa și observatorul se deplasează cu vitezele $u \neq 0$ și $v \neq 0$, pe direcția $x\,y$ (fig. 3). Vom deosebi două cazuri.

1. Să admitem că S și O se apropie unul de altul. Prima emisiune pleacă din S la momentul t și ajunge în O la momentul $t + \frac{So}{V}$.

În timpul unei perioade sursa s-a deplasat în S' la momentul $t+T$. A doua emisiune va ajunge la observator ce se găsește în O' la momentul: $t+T + \frac{SO - SS' - OO'}{V}$.

Diferența de timp între sosirile celor două emisiuni este:

$$T' = t + T + \frac{So}{V} - \frac{SS'}{V} - \frac{OO'}{V} - t - \frac{So}{V},$$

adică:

$$T' = T - \frac{SS'}{V} - \frac{OO'}{V}, \text{ însă } SS' = uT \text{ și } OO' = vT'$$

deci:

$$T' = T - \frac{uT}{V} - \frac{vT'}{V}; \text{ sau } T'\left(1 + \frac{v}{V}\right) = T\left(1 - \frac{u}{V}\right)$$

$$T' = T\frac{V-u}{V+v}.$$

Pentru lungimea de undă λ' și pentru frecvența ν' vom avea valorile:

$$\lambda' = \lambda\frac{V-u}{V+v} \text{ și } \nu' = \nu\frac{V+v}{V-u}. \qquad (4)$$

2. În cazul cînd sursa și observatorul se îndepărtează cu vitezele u și v, acestea se vor considera cu semnul minus și se vor obține formulele:

$$T' = T\frac{V+u}{V-v}; \quad \lambda' = \lambda\frac{V+u}{V-v}; \quad \nu' = \nu\frac{V-v}{V+u} \qquad (5)$$

SCURTĂ PRIVIRE ISTORICĂ ASUPRA DEZVOLTĂRII ALGEBREI

IACOB CRIȘAN, profesor, București

Noțiuni de algebră găsim în matematica babiloniană și mai tîrziu în matematica clasică grecească, de exemplu în lucrările lui Euclid.

În „Elementele" lui *Euclid* și mai ales în problemele puse la sfîrșitul acestor Elemente, sub numele de „Data", găsim probleme de construcție geometrică a căror rezolvare reprezintă soluția unei ecuații de gradul al doilea. De exemplu: să se construiască media geometrică între două mărimi date, ceea ce revine să aflăm soluția ecuației de forma: $x^2 = ab$.

De asemenea în cartea a II-a a lui *Euclid* găsim soluția geometrică a ecuațiilor de forma: $x^2 - ab = 0$ și $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Soluțiile geometrice ale ecuațiilor $ax^2 - bx + c = 0$, $ax^2 + bx - c = 0$, le găsim în cartea a VI-a.

Metoda întrebuințată de *Euclid* era metoda grafică, care constă în a reprezenta numerele prin lungimi de segmente de dreaptă și în felul acesta demonstrațiile se aplică atît numerelor raționale cît și celor iraționale. Cei mai vechi algebriști: arabi, indieni, persani și italieni, folo-

sesc o algebră retorică, înlocuind raționamentul algebric prin fraze, iar uneori chiar prin versuri, fără să întrebuințeze vreun simbol.

O lucrare în care sînt întrebuințate metodele algebrei este: *Aritmetica lui Diophante din Alexandria* (III e.n.).

În această lucrare se întrebuințează semnele de operații și necunoscutele se notează prin simboluri; lucrarea conține rezolvări de probleme care ne conduc la ecuații de gr. II și ne dă reguli pentru rezolvarea ecuației de gr. I și a ecuației binome de gradul II. De asemenea, el rezolvă ecuația generală de gradul II:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

înmulțind ambii termeni prin a și apoi completează trinomul pentru a forma un patrat perfect, metodă analogă cu cea pe care o folosim azi. Cînd rădăcinile erau negative sau iraționale, se spunea că rezolvarea este imposibil. Cînd se obțineau două rădăcini pozitive, se lua o singură rădăcină, punînd înaintea radicalului numai semnul plus. *Diophante* a rezolvat și ecuația de gradul III:

$$x^2 + x = 4x^2 + 4.$$

Cea mai mare parte a lucrării se ocupă cu ecuațiile neterminate cu două sau trei necunoscute. Cele mai multe ecuații sînt de forma:

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C$$

Dăm un exemplu din problemele propuse și rezolvate în această lucrare. Să se afle două pătrate astfel că adăugînd la produsul lor, fie pe unul, fie pe celălalt, să obținem un nou pătrat. Notînd cu z^2 și y^2 numerele căutate, problema revine la condițiile ca:

$x^2y^2 + x^2$ sau $x^2y^2 + y^2$ să fie pătrate perfecte.

Diophante rezolvă problema și află patratele căutate: $\frac{9}{16}$ și $\frac{49}{576}$.

Se crede că, avînd în vedere colecția mare de probleme și varietatea lor, această lucrare nu este opera unui singur om, ci reprezintă contribuția tuturor matematicienilor greci din timpul său. Această lucrare, prin intermediul arabilor ajunge în Europa și astfel marele *Fermat* a putut să studieze în adîncime opera lui *Diophante*.

Contribuția indiană și arabă la dezvoltarea algebrei. Cunoștințele matematice ale arabilor erau determinate de două influențe, de-o parte marea influență a școlilor grecești, iar pe de altă parte, prin legăturile comerciale cu India, țara cu o veche cultură, arabii s-au inițiat în problemele de aritmetică și algebră cunoscute de indieni.

Trebuie să amintim că pe la sfîrșitul secolului al 9-lea, arabii aveau traducerile operelor lui *Euclid, Arhimede, Apollonius* și *Ptolomeu*, iar noi am luat cunoștință de foarte multe din aceste lucrări prin traducerea arabă.

Dar, în același timp, tot prin intermediul arab, am luat legătură și cu vechiul tezaur științific indian. Sînt unii care susțin că începuturile algebrei trebuie să le căutăm în India.

Amintim aici pe cei mai de seamă matematicieni, care au contribuit prin lucrările lor la dezvoltarea algebrei.

Arya-Bhata, născut în 476, în lucrarea sa *Aryabhathya* se ocupă de astronomie trigonometrie sferică, aritmetică, algebră și trigonometrie plană. În ceea ce privește noțiunile de algebră, dă soluția generală a unei ecuații de gradul al doilea și soluția în numere întregi, a ecuațiilor nedeterminate de gradul I. Din soluțiile ecuațiilor numerice se poate deduce că el cunoaște sistemul zecimal de numerație.

Brahmagupta, născut în 598, a scris o lucrare în versuri intitulată Brahma-Sphute-Siddhanta. În două capitole din această lucrare se ocupă cu aritmetica, algebra și geometria.

În algebră studiază proprietățile progresiei aritmetice și rezolvă ecuația de gradul al doilea. Ca și alți predecesori el consideră radicalul numai cu semnul plus.

Brahmagupta găsește soluția mai multor ecuații nedeterminate de gradul al doilea, prin metode asemănătoare celor de azi. Rezolvă ecuația nedeterminată de gradul II:

$$nx^2 + 1 = y^2$$

și dă soluțiile:

$$x = \frac{2t}{t^2 - n} \text{ și } y = \frac{t^2 + n}{t^2 - n}$$

pe care le deduce dintr-o soluție particulară. De altfel această ecuație a fost propusă în veacul al 17-lea de *Fermat* lui *Wallis* și lordului Brouckner spre rezolvare. Ei au dat aceiași soluție ca și Brahmagupta. Lucrările lui sînt influențate de Arya-Bhata și probabil chiar de Diophante, dar în orice caz, în probleme de geometrie a împrumutat din lucrările lui *Heron*. El a stabilit formula pentru aflarea suprafeței unui patrulater oarecare.

Un alt matematician indian, *Baskara*, născut în 1114, continuă lucrările predecesorilor săi. El publică o lucrare în versuri cu note explicative în proză „Silvati", referitoare la aritmetică și alta cu titlul Biya-Ga îta, în legătură cu algebra. Se pare că aceste lucrări nu sînt altceva decît o expunere a problemelor cunoscute în timpul său în India. El cunoștea lucrările arabe și avea cunoștință de rezultatele matematicienilor greci.

Din tabla de materii se vede că el tratează ecuațiile simultane de gradul I cu aplicații, regula de trei simplă și compusă, progresia aritmetică și geometrică, ecuații nedeterminate și la sfîrșitul lucrării, probleme referitoare la combinări. Este cea mai veche lucrare în care se expune în mod metodic sistemul de numerație zecimal.

Din lucrările matematicienilor indieni, prin problemele propuse se desprind interesante informații relativ la condițiile sociale și economice ale timpului.

Revenind la contribuția arabă în dezvoltarea algebrei, nu trebuie să scăpăm din vedere că lucrările matematicienilor arabi, alături de traducerile în limba arabă a lucrărilor matematicienilor greci, au avut o influență deosebită în dezvoltarea științei în Europa.

Primul și poate cel mai ilustru matematician arab a fost *Mohamed ihn Musa Abu Djefar Al-Khwarismi.*

În calitate de bibliotecar al califului Al Mamoun, face o călătorie în Afganistan și India, iar la reîntoarcere, prin 830, scrie o algebră după aceea a lui Brahmagupta, în care demonstrațiile sînt făcute prin metoda

greacă. Datorăm lui *Alkwarismi* pătrunderea în Europa a scrierii numerelor în sistemul indian (deci prin introducerea lui zero). Lucrarea sa intitulată *Al-Gebr we'l mukabala* (care înseamnă trecerea unui termen dintr-un membru în altul, respectiv reducerea termenilor asemenea) a avut o influență deosebită asupra dezvoltării algebrei. Lucrarea conține cinci părți. În prima parte, fără nici o demonstrație, dă regula pentru rezolvarea ecuației de gradul al doilea, pe care o prezintă sub șase forme:

$ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$ și $ax^2 = bx + c$; a, b, c, sînt numere pozitive și în toate aplicațiile consideră $a = 1$. El ia numai rădăcinile reale și pozitive, deși își dă seama că ecuația are două rădăcini. În partea ultimă a lucrării dă cîteva probleme. De exemplu: Să se afle două numere a căror sumă este egală cu 10 și diferența patratelor lor este 40. În această lucrare ca și în toate celelalte lucrări, nu se face nici o distincție între aritmetică și algebră. Această lucrare pe lîngă noțiunile de algebră, dă matematicienilor italieni și primele noțiuni de aritmetică în sistemul zecimal. Din acest motiv mult timp a fost cunoscută sub numele de Algoritm, sau arta lui *Alkwarismi*.

Opera lui *Alkwarismi* a fost continuată de Tabiz ibn Korra (836—901), care publică traducerea principalelor lucrări ale lui *Euclid, Appollonius, Arhimede și Ptolomeu*. El se ocupă de rezolvarea ecuației de gradul al treilea prin metoda geometrică. Cu această problemă s-a mai ocupat și Omar Alkayamu, care a obținut rădăcina ecuației de gradul al treilea de forma $x^3 + ax^2 = c^3$. El ajunge la ea căutînd să rezolve sistemul $xy = c^2$ și $y^2 = c(x + a)$. El ajunge la ecuația de gradul al patrulea: $(100 - x^2)(10 - x)^2 = 8100$, a cărei rădăcină este determinată de sistemul de ecuații: $(10 - x)y = 90$ și $x^2 + y^2 = 100$.

Alkarki un alt matematician arab al acestei epoci dă expresia sumei primelor n numere întregi la puterea întîia, a doua și a treia, rezolvă diverse ecuații de forma:

$$ax^{2p} + bx^p + c = 0$$

și se ocupă cu cantitățile iraționale, arătînd de exemplu că:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}.$$

NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR CEVIENE

Fie ABC un triunghi oarecare. Din vîrful A să considerăm o ceviană care întîlnește latura opusă în D. Numim AD ceviană (n) dacă determină relația:

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^n \qquad (1)$$

unde b, c, a sînt laturile triunghiului dat. Analog să considerăm că dreptele BE și CF sînt ceviene (n). Atunci:

$$\frac{CE}{EA} = \left(\frac{a}{c}\right)^n \quad (2) \quad \text{și} \quad \frac{AF}{FB} = \left(\right)\frac{b}{a}^n \qquad (3)$$

Înmulțim relațiile (1), (2), (3) și avem:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1 \qquad (4)$$

ceea ce conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că AD, BE, CF sînt concurente. Așadar, avem propoziția: „În orice triunghi trei ceviene (n) de același rang sînt concurente". Numim rang al unei ceviene (n) valoarea pe care o poate lua (n).

a) Medienele sînt ceviene de rangul 0, $(n=0)$. Într-adevăr, $\frac{BD}{DC}=\left(\frac{c}{b}\right)^0=1$, adică $BD=DC$.

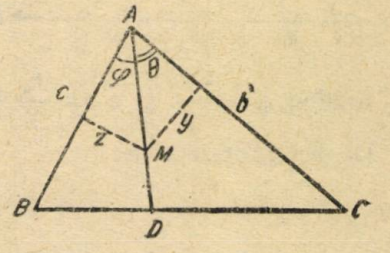
b) Bisectoarele sînt ceviene de rangul 1, $(n=1)$; astfel $\frac{BD}{DC}=\left(\frac{c}{b}\right)^1=\frac{c}{b}$ ceea ce reprezintă teorema bisectoarei.

c) Antibisectoarele sînt ceviene de rangul -1, $(n=-1)$ astfel $\frac{BD}{DC}=\left(\frac{c}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{c}$ cunoscuta proprietate a antibisectoarei.

Proprietăți ale cevienelor (n)

Dacă φ și θ sînt unghiurile care le face o ceviană (n) cu laturile ce pornesc din același vîrf avem:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\left(\frac{c}{b}\right)^{n-1} \qquad (5)$$



Vom arăta aceasta prin considerații de arii. Avem:

$$\frac{S_{BAD}}{S_{DAC}}=\frac{BD}{DC} \qquad (6)$$

însă:

$$\frac{S_{BAD}}{S_{DAC}}=\frac{AD\cdot c\sin\varphi}{AD\cdot b\sin\theta}=\frac{c}{b}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \qquad (7)$$

Egalînd relațiile (6) și (7) avem

$$\left(\frac{c}{b}\right)^n=\frac{c}{b}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\ \text{sau}\ \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\left(\frac{c}{b}\right)^{n-1}$$

Să considerăm punctul M pe ceviana (n) AD și fie z și y distanțele acestui punct la laturile c și b ale triunghiului. Avem:

$$\sin\varphi=\frac{z}{AM}\ \text{și}\ \sin\theta=\frac{y}{AM},\ \text{deci}\ \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\frac{z}{y}.$$

Ținînd seama de relația (5) avem:

$$\frac{z}{y}=\left(\frac{c}{b}\right)^{n-1}\ \text{sau}\ \frac{z}{c^{n-1}}=\frac{y}{b^{n-1}}$$

De aici rezultă următoarea proprietate: Orice ceviană (n) este locul geometric al punctelor pentru care distanțele la două laturi ale triunghiului sînt proporționale cu acele laturi la puterea $(n-1)$.

Dacă M este punctul de intersecție a trei ceviene (n) avem:

$$\frac{x}{a^{n-1}}=\frac{y}{b^{n-1}}=\frac{z}{c^{n-1}}$$

unde x, y, z sînt distanțele lui M la laturile a, b, c.

Din relațiile (8) deducem:

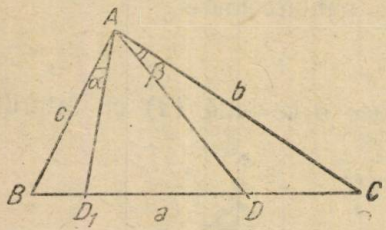
$$\frac{ax}{a^n}=\frac{by}{b^n}=\frac{cy}{c^n},$$

de unde:

$$x=\frac{ax+by+cz}{a^n+b^n+c^n}\cdot a^{n-1}=\frac{2\,S\,a^{n-1}}{a^n+b^n+c^n}$$

unde S este suprafața triunghiului $(2S=ax+by+cz)$.

Cazuri particulare. a) Pentru cevienele de rang 0, $(n=0)$, medianele, avem:



$$x=\frac{2S}{a(1+1+1)}=$$

$$=\frac{2S}{3a}=\frac{h_a}{3}$$

Analog, $y=\frac{h_b}{3}$ și $z=\frac{h_c}{3}$ unde h_a, h_b, h_c sînt înălțimile triunghiului.

De aci proprietatea:

$$x+y+z=\frac{1}{3}(h_a+h_b+h_c)$$

Insă: $h_a+h_b+h_c\geqslant 9r$. (vezi G.M.F.-B, nr. 11/1957, pag. 565).

Deci, obținem inegalitatea interesantă $x+y+z\geqslant 3r$, unde r este raza cercului înscris.

b) Pentru cevienele de rang 1, $(n=1)$, bisectoarele, avem:

$$x=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S}{2p}=r.$$ Analog, $x=y=z=r$.

c) Pentru $n=2$ sîntem în cazul simedianelor, M fiind punctul lui Lemoine. Avem: $x=\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$; $y=\frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}$; $z=\frac{2cS}{a^2+b^2+c^2}$.

Observație. Dacă facem suma patratelor distanțelor x, y, z obținem:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4S^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ceviene izotomice și izogonale cu cevienele n. Proprietăți. a) Ceviana izotomică unei ceviene (n) este ceviana $(-n)$. Fie AD ceviana (n). Atunci $b^n\cdot BD=c^n\cdot DC$.

Izotomica AD' împarte pe BC astfel ca să avem:

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{DC}{BD}=\left(\frac{b}{c}\right)^n=\left(\frac{c}{b}\right)^{-n}$$

b) Ceviana izogonală unei ceviene (n) este ceviana ($2-n$). Fie AD_1 izogonala lui AD iar α și β unghiurile caracteristice. Avem deci, proprietatea izogonalei:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \left(\frac{c}{b}\right)^{1-n}$$

Comparînd cu relația (5) se observă imediat că dacă $D_1 \equiv D$ obținem pentru $n \to 2-n$ relația (5).

Viorel Ch. Vodă, elev București

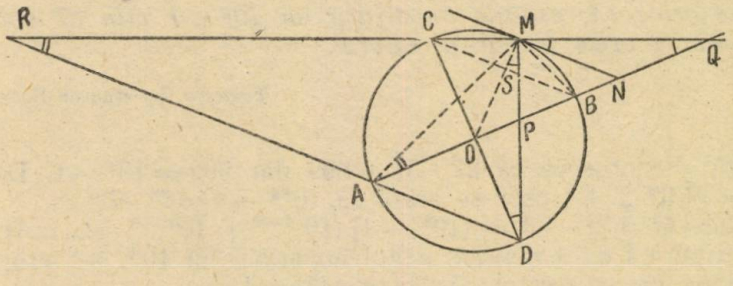
PROBLEME REZOLVATE

Problema 4704

Un punct M se află pe un cerc în care se dau doi diametri AB și CD perpendiculari: Dreptele DM și CM taie pe AB în P Q. Fie N mijlocul lui PQ. Să se arate că MN este tangentă la cerc. Dacă R este intersecția dreptelor CM și AD, să se arate că cercul AMR este tangent la AB.

C. Menciu, profesor Craiova

Soluție. Se duce raza OM. Apoi $\sphericalangle OMD = \sphericalangle ODM = \sphericalangle OQM$, MN fiind mediană în triunghiul dreptunghic PMQ, rezultă $\sphericalangle OQM = \sphericalangle MNQ$.



Deci $\sphericalangle OMD = \sphericalangle NMQ$, iar NM este perpendiculară pe raza OM. Este deci tangentă la cerc.

Se vede apoi că $\sphericalangle DRM + \sphericalangle RDM = 90°$.

Dar $\sphericalangle RDM = \sphericalangle ABM$, și $\sphericalangle ABM + \sphericalangle MAB = 90°$.

Rezultă $\sphericalangle DRM = \sphericalangle MAB$, adică cercul MAR este tangent în A la AB.

Observație. Dacă S este intersecția dreptelor DM și BC, cercul MSB este tangent în B la AB. În adevăr:

$$\sphericalangle BMS = \sphericalangle SBA = 45°.$$

Problema 4711

Un reostat cu rezistența $R = 20\,\Omega$ este legat în serie cu trei lămpi care sînt legate între ele în paralel și au rezistențele: $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 240\,\Omega$ și $R_3 = 300\,\Omega$. Rețeaua de iluminat are tensiunea de 150 V. Să se determine: a) intensitatea curentului care trece prin reostat; b) inten-

sitatea curentului care trece prin fiecare lampă; c) costul total al energiei consumate timp de 10 ore, dacă 1 kWh costă 0,60 lei.

Coriolan Rusu, Oradea

Soluție dată de *Nicolae Popa*, elev Focșani.

a) Rezistența echivalentă a becurilor este $\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} =$

$\frac{1}{200} + \frac{1}{240} + \frac{1}{300} = \frac{6+5+4}{1200} = \frac{1}{80}$. Deci $R_4 = 80\ \Omega$.

Rezistența totală este $20 + 80 = 100\ \Omega$.

Deci $I = \frac{U}{R} = \frac{150}{100} = 1{,}5\ A$.

b) Tensiunea la bornele fiecărei lămpi este $U_1 = 80 \cdot 1{,}5 = 120$ V.

$$I_1 = \frac{120}{200} = 0{,}6\ A,\ I_2 = \frac{120}{240} = 0{,}5\ A,\ I_3 = \frac{120}{300} = 0{,}4\ A.$$

c) $P = U \cdot I = 225\ W$, și $W = Pt = 225\ k$ Wh.
Costul ei este: 2,25 . 0,6 = 1,35 lei.

Problema 4715

Să se arate că resturile împărțirii lui $10^n - 1$ prin 37 sînt patrate perfecte pentru orice număr n natural.

Tomescu I., student București

Soluție. Se observă că $27 \cdot 37 = 999$ dar $999 = 10^3 - 1$. Deci $10^3 - 1 = \mathfrak{M}\ 37$ și tot ușor se arată că $10^{3k} - 1 = \mathfrak{M}\ 37$.

Într-adevăr $10^{3k} - 1 = (10^3 - 1)(10^{3k-3} + 10^{3k-4} + \ldots . 1) = \mathfrak{M}\ 37$. De aci rezultă că dacă $n = 3k$, restul împărțirii lui $10^n - 1$ prin 37 va fi zero, deci un patrat perfect. Da că $n = 3k + 1$:

Avem $10^{3k+1} - 1 = \underbrace{999\ldots.99}_{3k} = \mathfrak{M}\ 37 + 9$.

Deci restul împărțirii uli $10^n - 1$ prin 37 este, în acest caz 9, un pătrat perfect.

Cînd $n = 3k + 2$, avem $10^{3k+2} - 1 = \underbrace{999\ldots.999}_{3k} = \mathfrak{M}\ 37 + 99 =$

$= \mathfrak{M}\ 37 + 25$.

Deci în acest caz restul este 25, tot pătrat perfect.

Astfel în toate cazurile resturile împărțirii lui $10^n - 1$ prin 37 sînt pătrate perfecte.

Soluții bune a dat *Popa Nicolae*, elev Focșani.

Problema 4722

a) *Să se calculeze* $S = \sum_{1}^{n} n^3 + an^2 + (a-1)n$.

b) *Să se arate că expresia* $E = \dfrac{12S}{n(n+1)(n+2)}$ *este un număr întreg, dacă a este întreg*

c) Ce condiții *trebuie să îndeplinească numărul a pentru ca să avem* $E = a^2$.

(Clasa X, Olimpiada 1961) O. Sacter

Soluție dată de *Nicolae Scarlat*, Timișoara.

$$\text{Avem: } S = \sum_{1}^{n} n^3 + \sum_{1}^{n} an^2 + \sum_{1}^{n} (a-1)n =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + a\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (a-1)\,\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[3n(n+1) + 2a(2n+1) + 6(a-1)\right] =$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\cdot(n+2)(4a+3n-3) = \frac{n(n+1)(n+2)(4a+3n-3)}{12}$$

b) Avem: $E = \dfrac{12n(n+1)(n+2)(4a+3n-3)}{12n(n+1)(n+2)} = 4a + 3n - 3$, evident număr întreg dacă a e întreg sau $a = \dfrac{m}{4}$ unde m este întreg.

c) Se dă:

$$E = 4a + 3n - 3 = a^2 \text{ sau}$$

$$a^2 - 4a + 3 = 3n,\ (a-2)^2 - 1 = 3n, \text{ sau}$$

$n = \dfrac{(a-3)(a-1)}{3}$, și cum n trebuie să fie natural, trebuie să avem $a < 1$ sau $a > 3$; $a = \mathfrak{M}\,3$ sau $a = \mathfrak{M}\,3 + 1$.

Problema 4724

Să se arate că dacă $\sin 2(a+c) = n \sin 2b$, *atunci* $tg(a+b+c) = \dfrac{n+1}{n-1}\,tg(a-b+c)$

Kiss Elemer și Simon Petru, Tg. Mureș

Soluție. Relația de condiție se mai scrie: $\dfrac{\sin 2(a+c)}{\sin 2b} = n$ și aplicînd o proprietate rapoartelor egale obținem:

$$\frac{\sin 2(a+c) + \sin 2b}{\sin 2(a+c) - \sin 2b} = \frac{n+1}{n-1}$$

sau

$$\frac{2\sin(a+b+c)\cos(a-b+c)}{2\cos(a+b+c)\sin(a-b+c)} = \frac{n+1}{n-1}$$

de unde

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{n+1}{n-1} \cdot \operatorname{tg}(a-b+c).$$

Soluție bună au dat: *Cupcea Nicolae*, absolvent Buzău, *Bluoss Hans*, elev București și *Nicolae Scarlat* absolvent Timișoara.

Problema 4742

Fie M un punct pe parabolă, iar N intersecția normalei în M la parabolă cu axa parabolei. Notăm cu N' proiecțiile lui N și OM, O fiind vîrful parabolei, și cu M' proiecția lui M pe axa parabolei. Să se găsească locul geometric al punctului P de intersecție a dreptelor MM', NN'.

Mircea Rădulescu, elev Constanța.

Soluție. Fie Ox, Oy un sistem de axe rectangulare și Ox axa parabolei $y^2 = 2px$, iar $M(x_0, y_0)$. Ecuația dreptei MN: $\frac{x-x_0}{p} = -\frac{y-y_0}{y_0}$.

Făcînd $y = 0$, găsim cordonatele lui $N(x_0 + p, 0)$.

Ecuația dreptei NN': $y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0 - p)$ iar a dreptei MM' este $x = x_0$.

Intersectăm pe MM' cu NN' și aflăm coordonatele lui P: $x = x_0$, $y = \frac{x_0 p}{y_0}$. Intrucît $y_0^2 = 2px_0$, rezultă:

$$y^2 = \frac{x_0^2 p^2}{y_0^2} = \frac{x_0^2 p^2}{2px_0} = \frac{p}{2} x_0 = \frac{p}{2} x.$$

Locul geometric căutat e parabola:

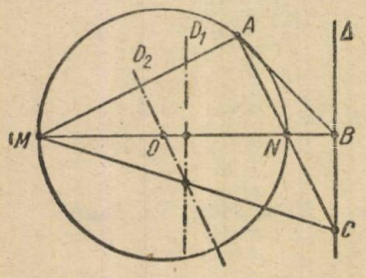
$$y^2 = \frac{p}{2} x.$$

Problema 4744

Se dă cercul O, punctul A pe cerc, diametrul NM și dreapta Δ perpendiculară pe MN în B. Dreapta AN taie pe Δ în C. Se cere locul geometric al centrului cercului ABC:

a) cînd A este mobil pe cerc iar Δ este fixă.

b) cînd A este fix iar Δ se deplasează paralel cu ea însăși.



Tudor Zamfirescu, elev București

Soluție. a) Se observă că patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil și deci cînd A variază, MB, coardă în cercul ABC, rămîne fixă. Prin urmare centrul cercului ABC este mobil pe mediatoarea lui MB.

b) În cazul cînd A este fix, coarda AM din cercul ABC rămîne fixă și locul centrului este mediatoarea lui AM.

Problema 4752

În tetraedrul ABCD se consideră un punct M interior. Dreptele MA, MB, MC și MD intersectează fețele opuse respectiv în punctele M_A, M_B, M_C și M_D.

Să se demonstreze că

$$\frac{MA}{MM_A}\cdot\frac{MB}{MM_B}\cdot\frac{MC}{MM_C}\cdot\frac{MD}{MM_D}\geqslant 3^4.$$

Aurel P. Stoicescu, student București

Soluția autorului. Fie tetraedrul *ABCD* și punctul interior *M*.

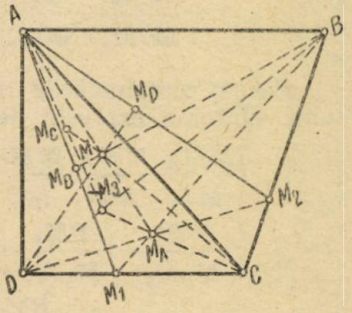
Considerăm planul format de dreptele *MA* și *MB*. Acest plan intersectează latura *DC* în punctul M_1.

Evident, MB intersctează fața *ACD* în punctul M_B situat pe AM_1. Analog cu M_A.

Considerînd planele analoage obținem punctele M_2 și M_3 care au fost notate pe figură. Aceleași condiții pentru M_C și M_D.

În triunghiul M_1BM_B, tăiat de transversala AM_A, avem:

$$\frac{M_1A}{M_BA}\cdot\frac{MM_B}{MB}\cdot\frac{M_AB}{M_AM_1}=1. \qquad (1)$$



În triunghiul M_2DM_D, tăiat de transversala AM_A, avem:

$$\frac{M_2A}{M_DA}\cdot\frac{MM_D}{MD}\cdot\frac{M_AD}{M_AM_2}=1. \qquad (2)$$

În triunghiul M_3CM_C, tăiat de transversala AM_A, avem:

$$\frac{M_3A}{M_CA}\cdot\frac{MM_C}{MC}\cdot\frac{MC}{M_AM_3}=1. \qquad (3)$$

Fie punctele M_4, M_5 și M_6 respectiv pe laturile *AC*, *AD* și *AB*. Aceste puncte sînt analoage cu M_1, M_2 și M_3. (Nu le-am însemnat pe figură a nu o încărca).

Ținînd seama de cele precedente, observăm că mai putem scrie încă 3 grupuri de relații analaoge cu cele pe care le-am scris.

Considerînd transversala DM_D:

$$\frac{M_2D}{M_AD}\cdot\frac{MM_A}{MA}\cdot\frac{M_DA}{m_DM_2}=1,\quad \frac{M_6D}{M_CD}\cdot\frac{MM_C}{MC}\cdot\frac{M_DC}{M_DM_G}=1,$$

$$\frac{M_4D}{M_BD}\cdot\frac{MM_B}{MB}\cdot\frac{M_DB}{M_DM_4}=1.$$

Considerînd transversala BM_B:

$$\frac{M_1B}{M_AB}\cdot\frac{MM_A}{MA}\cdot\frac{M_BA}{M_BM_1}=1,\quad \frac{M_4B}{M_DB}\cdot\frac{MM_D}{MD}\cdot\frac{M_BD}{M_BM_4}=1,$$

$$\frac{M_5B}{M_CB}\cdot\frac{MM_C}{MC}\cdot\frac{M_BC}{M_BM_5}=1.$$

Considerînd transversala CM_C avem:

$$\frac{M_3C}{M_AC}\cdot\frac{MM_A}{MA}\cdot\frac{M_CA}{M_CM_3}=1,\quad \frac{M_5C}{M_BC}\cdot\frac{MM_B}{MB}\cdot\frac{M_CB}{M_CM_5}=1,$$

$$\frac{M_6C}{M_DC}\cdot\frac{MM_D}{MD}\cdot\frac{M_CD}{M_CM_6}=1.$$

Înmulțind membru cu membru relațiile scrise avem:

$$\left(\frac{MM_A}{MA}\cdot\frac{MM_B}{MB}\cdot\frac{MM_C}{MC}\cdot\frac{MM_D}{MD}\right)^3\cdot\frac{M_1A}{M_BA}\cdot\frac{M_AB}{M_AM_1}\cdot\frac{M_2A}{M_DA}\cdot\frac{M_AD}{M_AM_2}\cdot$$
$$\cdot\frac{M_3A}{M_CA}\cdot\frac{M_AC}{M_AM_3}\cdot\frac{M_2D}{M_AD}\cdot\frac{M_DA}{M_AD}\cdot\frac{M_DA}{M_DM_2}\cdot\frac{M_6D}{M_CD}\cdot\frac{M_DC}{M_DM_6}\cdot\frac{M_4D}{M_BD}\cdot \tag{4}$$
$$\cdot\frac{M_DB}{M_2M_4}\cdot\frac{M_1B}{M_AB}\cdot\frac{M_BA}{M_BM_1}\cdot\frac{M_4B}{M_DB}\cdot\frac{M_BD}{M_BM_4}\cdot\frac{M_5B}{M_CB}\cdot\frac{M_BC}{M_BM_5}\cdot\frac{M_3C}{M_4C}\cdot$$
$$\cdot\frac{M_CA}{M_CM_3}\cdot\frac{M_5C}{M_BC}\cdot\frac{M_CB}{M_CM_5}\cdot\frac{M_6C}{M_DC}\cdot\frac{M_CD}{M_CM_6}=1.$$

Facem simplificările respective și grupăm convenabil factorii produsului, obținînd expresia de mai jos:

$$\left(\frac{MM_A}{MA}\cdot\frac{MM_B}{MB}\cdot\frac{MM_C}{MC}\cdot\frac{MM_D}{MD}\right)^3\cdot\left(\frac{M_1B}{M_1M_A}\cdot\frac{M_3C}{M_3M_A}\cdot\frac{M_2D}{M_2M_A}\right)\cdot$$
$$\left(\frac{AM_2}{M_DM_2}\cdot\frac{BM_4}{M_DM_4}\cdot\frac{CM_6}{M_DM_6}\right)\cdot\left(\frac{AM_1}{M_BM_1}\cdot\frac{CM_5}{M_BM_5}\cdot\frac{DM_4}{M_BD_4}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{BM_5}{M_CM_5}\cdot\frac{AM_3}{M_CM_3}\cdot\frac{DM_6}{M_CM_6}\right)=1.$$

Considerăm triunghiul BCD și cevienele BM_1, DM_2 și CM_3.

Vom însemna suprafețele triunghiurilor considerate cu S și ca indici notațiile triunghiurilor respective.

Avem:

$$\frac{M_1B}{M_1M_A}=\frac{S_{BCD}}{S_{CDM_A}};\quad \frac{M_3C}{M_3M_A}=\frac{S_{BCD}}{S_{DBM_A}};\quad \frac{M_2D}{M_2M_A}=\frac{S_{BCD}}{S_{BCM_A}}.$$

Făcînd produsul relațiilor de mai sus, obținem:

$$\frac{M_1B}{M_1M_A}\cdot\frac{M_3C}{M_3M_A}\cdot\frac{M_2D}{M_2M_A}=\frac{S^3_{BCD}}{S_{CDM_A}\cdot S_{DMB_A}\cdot S_{BCM_A}}$$

Însă $S_{CDM_A}+S_{DBM_A}+S_{BCM_A}=S_{BCD}=\text{constant}$.

Conform unei teoreme cunoscute, avem:

$$S_{CDM_A}\cdot S_{DBM_A}\cdot S_{BCM_A}\leqslant\left(\frac{S_{BCD}}{3}\right)^3$$

sau încă

$$\frac{S^3_{BCD}}{S_{CDM_A}\cdot S_{DBM_A}\cdot S_{BCM_A}}\geqslant 3^3.$$

Deci

$$\pi_1 = \frac{M_1B}{M_1M_A}\cdot\frac{M_3C}{M_3M_A}\cdot\frac{M_2D}{M_2M_A} \geqslant 3^3,$$ însemnînd cu π_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ aceste produse, ca și π_1, avem evident:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \pi_4 \geqslant (3^3)^4.$$

Pe de altă parte, din (5) obținem:

$$\left(\frac{MA}{MM_A}\cdot\frac{MB}{MM_B}\cdot\frac{MC}{MM_C}\cdot\frac{MD}{MM_D}\right)^3 = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$$ și în baza relației (6) obținem

$$\frac{MA}{MM_A}\cdot\frac{MB}{MM_B}\cdot\frac{MC}{MM_C}\cdot\frac{MD}{MM_D} \geqslant 3^4,$$ adică relația cerută.

Problema 4754

Să se demonstreze că oricare ar fi numerele a_1, a_2, $a_3 \ldots, a_n$ astfel încît satisfac relația:

$$a_1^2 + a^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = s$$

atunci avem și:

$$-\sqrt{n \cdot s} \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{n \cdot s}.$$

(În legătură cu problemele 2384 și 3400).

D. Bătinețu, Zimnicea

Soluția I-a dată de autor. Considerăm trinomul de gradul III în x:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)\,x^2 + 2\,(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)\,x + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2$$

care se mai scrie:

$$a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2 + a_2^2x^2 + 2a_2b_2x + b_2^2 + a_3^2x^2 + 2a_3b_3x + b_3^2 + \ldots + a_n^3x^2 + 2a_nb_nx + b_n^2$$

sau

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2 + \ldots + (a_{nx} + b_n)^2.$$

Acest trinom fiind o sumă de patrate este întotdeauna pozitiv ($a_1 \ldots a_n$ real) și prin urmare discriminantul lui este întotdeauna negativ.

Deci:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) \leqslant 0 \qquad (1)$$

adică inegalitatea Cauchy-Buniakovski

Dacă în inegalitatea (1) facem:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 1$$

Obținem:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n^2) \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) \qquad (2)$$

și ținînd seama că :

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=s \text{ relația (2) devine :}$$

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_n)^2\leqslant n\cdot s$$

sau extrăgînd rădăcina avem :

$$-\sqrt{n\,s}\leqslant a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_n\leqslant\sqrt{n\cdot s}.$$

Dacă în inegalitatea (3) facem $s=1$ și $n=3$ obținem :

$$-\sqrt{3}\leqslant a_1+a_2+a_3\leqslant\sqrt{3}$$

adică relația din problema 2384.

— Dacă în relația (2) facem $a_1=1$, $a_2=x$, $a_3=x^2$ și $n=3$ obținem :

$$(1+x+x^2)^2\leqslant 3(1+x^2+x^4)$$

adică inegalitatea din problema 3400.

Soluția a II-a. Pornim de la identitatea lui *Lagrange :*

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)^2+\sum_{p=q-1}^{n}(a_qb_p-a_pb_q)^2.$$

Dacă suprimăm suma pozitivă :

$$\sum_{p\neq q=1}^{n}(a_qb_p-a_pb_q)^2\geqslant 0,$$

semnul egalității fiind considerat cînd concomitent sumele de forma

$$(a_qb_p-a_pb_q)^2=0,\quad (p\neq q=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

obținem :

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)^2$$

adică tot relația (1) de la soluția I-a. Mai departe ca la soluția I-a.

Observare. Inegalitatea (1) *Cauchy-Buniakovski* se poate stabili și prin inducție completă (Algebra clasa a X-a reală).

Problema 4755

Într-un triunghi dreptunghic ABC se duce mediana din B. Să se arate că unghiul α *făcut de această mediană cu ipotenuza BC este dat de :*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}B}{2+\operatorname{tg}^2B}$$

Să se demonstreze apoi reciprocele acestei proprietăți.

C. Menciu, profesor Craiova

Soluție. Fie u unghiul făcut de mediana din B cu cateta BA: $\alpha=B-u$. Avem $tg\alpha=tg(B-u)=\dfrac{\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}u}{1+\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}u}$.

Dar $\operatorname{tg} u = \frac{b}{2c} = \frac{\operatorname{tg} B}{2}$. Rezultă $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B}$.

Reciprocele. Putem formula două reciproce:

1. O dreaptă BB' dusă prin vîrful B al triunghiului dreptunghic ABC, face cu ipotenuza unghiul α, astfel că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B}.$$

Să se arate că BB' este mediană.

Pentru a demonstra aceasta, se notează $AB' = x$, și cu u unghiul făcut de BB' cu cateta AC.

Avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(B - u) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} u} = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B}.$$

Se găsește

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{2} \operatorname{tg} B$$

deci

$$x = \frac{1}{2} AC.$$

2. Mediana BB' într-un triunghi ABC face latura BC unghiul α așa că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B}.$$

Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

Pentru demonstrație să calculăm unghiul α făcut de mediana BB' cu latura BC în triunghiul oarecare ABC.

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul $BB'C$ dă

$$\frac{b}{2\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha + C)} \quad \text{adică} \quad \frac{\sin B}{2\sin\alpha} = \frac{\sin A}{\sin(\alpha + C)}$$

care dă $\sin B \sin(\alpha + C) = 2 \sin A \sin\alpha$.

$$\text{deci} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin B \sin C}{2\sin A - \sin B \cos C}$$

care se scrie:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin B \sin C}{\sin B \cos C + 2\sin C \cos B} = \frac{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + 2\operatorname{tg} C}.$$

Avem deci

$$\frac{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + 2\operatorname{tg} C} = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B},$$ de oare ce $\operatorname{tg} B \neq 0$, obținem:

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 1, \text{ adică } B + C = 90°.$$

Problema E : 1700

Un drumeț a parcurs distanța din localitățile A și B în trei etape, astfel : 1/5 din distanță și încă 500 m cu viteză de 6 km/oră, după care s-a odihnit 1/2 oră ; din rest și încă 3,500 km cu viteză de 5 km oră, după care s-a odihnit 36 minute și apoi restul de 13 km, cu viteză de 5 1/5 km pe oră. Să se calculeze distanța AB și la ce oră a ajuns în B, dacă a plecat din A la ora 7.

Victor Florescu, Rm. Vîlcea

Soluție. Distanța $AB = x$ km.

Distanța parcursă în prima etapă $= x \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2x+5}{10}$ km.

Distanța rămasă după prima etapă : $x - \frac{2x+5}{10} = \frac{8x-5}{10}$ km.

Distanța parcursă în a II-a etapă :

$$\frac{8x-5}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{7}{2} = \frac{16x+165}{50} \text{ km.}$$

Se formează ecuația

$x = \frac{2x+5}{10} + \frac{16x+165}{50} + 13$ cu soluția $x = 35$ km.

Timpul făcut pe drum, împreună și cu timpul de odihnă, între etape

$$= \left(35 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) : 6 + \frac{1}{2} = \left\{\left[35 - \left(35 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)\right] \cdot \frac{2}{5} + 3\frac{1}{2}\right\}$$

$$: 5 + \frac{3}{5} + 13 : 5\frac{1}{5} = 7\frac{3}{4} \text{ ore.}$$

Ora sosirii în $B = 7 + 7\frac{3}{4} = 14\frac{3}{4}$ ore (ora două și trei sferturi după amiază).

Problema E : 1701

Printr-un bec al unei lanterne de buzunar s-au scurs 5 coulombi de electricitate și bateria a consumat o energie electrică de 20 jouli. Să se determine : a) Ce tensiune dă o baterie a unei lanterne de buzunar, b) Cantitatea de căldură degajată, c) Știind că bateria funcționează timp de 12 ore să se calculeze energia bateriei.

Pavel N. Radu,, elev Craiova

Soluția autorului. a) Știm că amperul este intensitatea unui curent care într-o secundă transportă un coulomb printr-o secțiune transversală a conductorului.

Din textul problemei rezultă : $I = 5A$.

Dar $W = UIt = 20$ jouli. De unde:

$U = \frac{20}{5} = 4\,V.$

b) $Q = 0{,}24\ UIt = 0{,}24.20 = 4{,}8$ cal.

c) $W = UIT_1 = 20.12\ Wh = 240\ Wh = 0{,}24\ kWh.$

Problema E: 1702

Se introduce în 600 g apă la temperatura de 14°C, o bucată de metal cu o masă de 300 g, încălzită la 100°C. Temperatura finală a apei din calorimetru este 22°C. Să se afle căldura specifică a metalului respectiv.

Pavel N. Radu, elev Craiova

Soluția autorului. 600 grame de apă s-au încălzit cu 8°C, pentru care sînt necesare $1\,600(22-14) = 4800$ cal.

Înseamnă că metalul a cedat tot atîtea calorii și s-a răcit cu 78°C. În timpul răcirii pentru fiecare grad, metalul a pierdut $\frac{4800}{78}$ cal, iar fiecare gram prin răcire cu 1°C, a pierdut $\frac{4800}{78 \cdot 300} = 0{,}2$ cal. Prin urmare căldura specifică a metalului respectiv este $0{,}2\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}$

Problema E. 756 (MFL)

Poate să-l atingă pe cineva trăsnetul, fără a-l atinge fulgerul? Răspunsul să fie pe baza interacțiunii dintre sarcinile electrice.

Soluția elevului *Szász Pál*, cl. VII-a — Aiud. Se poate întîmpla, ca pe cineva să-l trăsnească fără a-l fulgera. Acest fenomen se poate explica cu ajutorul interacțiunii dintre sarcinile electrice. Presupunem, că deasupra individului se află un nor încărcat pozitiv. Prin influență electronii liber din pămînt vor trece în corpul omului, care astfel va fi electrizat negativ. Se produce fulgerul (între nor și pămînt sau între doi nori). Prin aceasta norul își pierde sarcina electrică pozitivă, deci dispare cauza care a produs electrizarea prin influență, electronii se retrag înapoi în pămînt. Sub influența curentului care a trecut prin corp, individul are senzația că a fost trăsnit. Se spune că l-a atins „vîntul" fulgerului.

Problema E. 757 (MFL)

Un tren care pleacă din Cluj la ora 6 și 30 de minute sosește la Vatra Dornei la ora 13. Un tren care pleacă în aceeași zi de la Vatra Dornei la ora 8 sosește la Cluj la ora 14.

Știind că distanța Cluj — Vatra Dornei este 207 km, să se calculeze la cîți km depărtare de la Cluj se întîlnesc cele două trenuri și la ce oră are loc întîlnirea?

Rusu Ioan, Cluj

Soluția dată de eleva *Zsidó Ágnes*, școala de 7 ani Nr. 6 din Brașov. Distanța de 207 km a fost parcursă de trenul care pleacă din Cluj în 6.5 ore, iar de trenul care pleacă din Vatra Dornei în 6 ore, deci viteza medie a trenului care pleacă din Cluj este $v_1 = \frac{207}{6,5}$ km/oră $= 31\frac{11}{13}$ km/oră, iar viteza medie a trenului care pleacă din Vatra Dornei este $v_2 = \frac{207}{6}$ km/oră $= 34\frac{1}{2}$ km/oră.

Trenul a plecat din Cluj mai devreme cu 1,5 oră, deci în momentul plecării trenului de la Vatra Dornei s-a aflat la o distanță de $31\frac{11}{13} \cdot \frac{3}{2}$ km $= \frac{621}{13}$ km de la Cluj. În consecință de la ora 8 cele două trenuri împreună au mai parcurs pînă la întîlnire un drum de 207 km — $-\frac{621}{13}$ km $= \frac{2070}{13}$ km.

Viteza totală a celor două trenuri, deci viteza cu care cele două trenuri se apropie este $v_1 + v_2 = 34\frac{1}{2}$ km/oră $+ 31\frac{11}{13}$ km/oră $=$ $= \frac{1725}{26}$ km/ore.

Calculăm timpul care mai este necesar pînă la întîlnirea trenurilor. Pentru aceasta împărțim spațiul de $\frac{2070}{13}$ km la viteza totală de $\frac{1725}{26}$ km/oră:

$$t = \frac{2070}{13} : \frac{1725}{26} \text{ ore} = \frac{414}{1} \cdot \frac{2}{345} \text{ ore} = \frac{12}{5} \text{ ore}.$$

Cele două trenuri se întîlnesc la $\frac{621}{13}$ km $+ 31\frac{11}{13} \cdot \frac{12}{5}$ km $= 124\frac{1}{5}$ km $=$ $= 124,2$ km de la Cluj la ora $6\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{12}{5} = 7\frac{34}{10} = 8\frac{12}{5}$, adică la ora 10 și 24 min.

Problema E. 758 (MFL)

Să se determine pe baza proprietăților operațiilor valoarea lui x în așa fel încît să aibă loc egalitatea:

$$\left[3\frac{9}{16} : \left(\frac{2,75}{x : \frac{2}{7} - 45} - \frac{7}{24}\right) + 6,2\right] : 12\frac{2}{3} = 1,2.$$

* * *

Soluția dată de elevul *Horváth Huba*, școala medie din Dej.

Inmulțind ambii membrii ai egalității cu $12\frac{2}{3}$ și scăzînd pe urmă din fiecare membru 6, 2, obținem;

$$3\frac{9}{16}:\left(\frac{2,75}{x:\frac{2}{7}-45}-\frac{7}{24}\right)=9, \text{ sau } \frac{\frac{2,75}{x:\frac{2}{7}-45}-\frac{7}{24}}{3\frac{9}{16}}=\frac{1}{9}.$$

Inmulțim ambii membrii cu $3\frac{9}{16}$; vom avea

$$\frac{2,75}{x:\frac{2}{7}-45}-\frac{7}{24}=\frac{19}{48},$$

de unde, dacă la fiecare membru se adaugă $\frac{7}{24}$, rezultă egalitatea:

$$\frac{2,75}{x:\frac{2}{7}-45}=\frac{33}{48}.$$

Inversînd obținem egalitatea:

$$\frac{x:\frac{2}{7}-45}{2,75}=\frac{48}{33},$$

de unde putem scrie

$$x:\frac{2}{7}-45=\frac{48}{33}\cdot\frac{11}{4} \text{ sau } x:\frac{2}{7}-45=4.$$

De aici $x:\frac{2}{7}=49$, și $x=49\cdot\frac{2}{7}=14$.

Problema E. 759 (MFL)

Să se determine în ce sens și cu cît la sută se schimbă aria dreptunghiului dacă una din laturile se mărește cu 20%, iar a doua se micșorează cu 20%.

Cu cît la sută ar trebui să micșorăm latura mărită și cu cît să mărim latura micșorată ca să obținem aria inițială?

Soluția dată de eleva *Balássy Erika*, școala medie „Bolyai Farkas" din Tîrgu-Mureș. Să notăm laturile dreptunghiului cu *a* și cu *b*. Dacă

latura a este mărită cu 20%, iar latura b este micșorată cu 20%, lungimile laturilor vor fi

$$a + \frac{20}{100}\, a = \left(1 + \frac{1}{5}\right) a = \frac{6}{5}\, a,$$

respectiv

$$b - \frac{20}{100} \cdot b = \left(1 - \frac{1}{5}\right) b = \frac{4}{5}\, b.$$

Aria dreptunghiului va fi $\frac{24}{25}\, ab = \frac{96}{100}\, ab$, ceea ce arată că aria dreptunghiului s-a micșorat cu 4%.

Pentru a răspunde la a doua întrebare, calculăm cît la sută fac laturile dreptunghiului dat din laturile corespunzătoare ale noului dreptunghi.

Dacă socotim că

$$\text{la } \frac{6a}{5} \text{ corespund } 100\%, \text{ iar la } a \text{ corespund } x\%$$

atunci $x = \frac{100a}{\frac{6a}{5}} = \frac{250}{3}$, adică latura a face $\frac{250}{3}\%$ din latura respectivă mărită. În consecință pentru a regăsi latura dată, trebuie să micșorăm latura mărită cu $100\% - \frac{250}{3}\% = \frac{50}{3}\% = 16\frac{2}{3}\%$.

În mod analog ajungem la concluzia că pentru a regăsi latura inițială din latura micșorată, aceasta din urmă trebuie să fie mărită cu 25%.

CHESTIUNI DE EXAMEN

5434. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația $mx^2 - 4x + 3m + 1 = 0$, are două rădăcini cuprinse între 1 și 9.

(Bacalaureat, 1961, Franța)

5435. Să se determine perioada funcției $y = \sin^2 3x - \cos 4x$.

(Bacalaureat, 1960, Montevideo)

5436. Să se studieze funcția $y = \frac{(x+1)^2}{x^2}$. Variația și graficul.

(Bacalaureat, 1961, Laos)

5437. Să se studieze și să se reprezinte graficul și tabloul de variație al funcției

$$y = \frac{3x^2 - 5x + 7}{2x - 7}.$$

(Bacalaureat, 1961, Vietnam)

5438. Pentru un loc situat la 53°27' latitudine nordică să se calculeze lungimea umbrei pe sol a unui pilon vertical de înălțime h, cînd Soarele trece la meridian, în ziua solstițiului de vară.

(Bacalaureat, 1960, Tunis)

5439. Să se afle restul împărțirii prin 8 a lui 19^{52}.

(Bacalaureat, 1961, Antile)

5440. Să se studieze mișcarea rectilinie definită de ecuația $x = \cos 2t + 2\cos(2t - \frac{2\pi}{3})$, unde x este abscisa în centimetri și t timpul în secunde, iar mobilul pleacă din origină.

(Bacalaureat, 1960, Montevideo)

5441. Să se rezolve și să se discute ecuația $\sin 4x = m \operatorname{tg} x$. Să se afle efectiv toate soluțiile acestei ecuații cînd $m = 1{,}5$.

(Bacalaureat, subiect tip, 1961, Franța)

5442. Se dau două funcții de x:

$$y_1 = (x-1)^2 ; \quad y_2 = mx^2 - (3m - 1)\, x + 1$$

unde m este un parametru, $m = -1$.

a) Să se arate că curbele reprezentative ale acestor funcții trec prin două puncte fixe.

b) unitatea de lungime fiind centimetrul să se afle aria porțiunii din plan cuprinsă între cele două curbe. Se va considera două cazuri, după cum m este inferior sau superior lui 1 și se va desemna cîte o figură pentru fiecare caz.

c) Să se reprezinte graficul variației acestei arii în funcție de m. Pentru care valoare a lui m această arie este egală cu 4,5 cm?

(Bacalaureat, 1961, Vietnam)

PROBLEME PROPUSE*)

5443. Pe parabola $y^2 - 2px = 0$ se iau punctele mobile M, N. Normalele la parabolă în aceste puncte se intersectează în punctul P.

a) Să se arate că dacă dreapta MN trece printr-un punct fix I situat pe axa parabolei, atunci locul geometric al punctului P este o parabolă.

b) Cum trebuie luat punctul I pe axa parabolei pentru ca parabola loc geometric să treacă prin focarul primei parabole?

C. Coșniță

5444. Să se rezolve ecuațiile:

$$\frac{\sin 6x - \cos(60° - 8x) - 2}{\cos(90° - 6x) \cdot \sin(8x + 30°) + 1} = 0$$

---

*) VII (5456, 5460, 5466); IX 5445, 5447, 5452, 5454, 5459, 5461, 5463, 5467, 5470); X (5444, 5446, 5448, 5453, 5455, 5457, 5468); XI (5443, 5449, 5450, 5451, 5458, 5462, 5464, 5465, 5469, 5471).

$$\frac{\sin 18x \cdot \cos(24x-60^\circ)+1}{\sin 18x-\cos(24x-60^\circ)-2} = 0$$

$$\frac{\sin 15x \cdot \cos(20x+60^\circ)+1}{\sin 15x-\cos(20x+60^\circ)-2} = 0.$$

C. Ionescu-Țiu

5445. Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABF, ACE, BDE și CDF formate de laturile patrulaterului complet $ABCDEF$. Să se demonstreze că ortocentrele triunghiurilor cu vîrfurile în O_1, O_2, O_3 și O_4 se află pe laturile patrulaterului complet dat.

Gh. Buicliu

5446. Să se arate că:

$$1 \cdot p+2(p+1)+3(p+2)+\ldots+n(n+p-1) = \frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{6}$$

unde n și p sînt numere naturale.

A. Leonte, București

5447. Pe laturile AC și AB ale unui triunghi ABC se iau respectiv punctele mobile M și N astfel ca: $\frac{MC}{MA} = \frac{NA}{NB}$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului MN.

* * *

5448. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 8x \cdot \cos 6x+\sin 9x \cdot \cos 3x+\sin 11x \cdot \cos 7x+\sin 12x \cdot \cos 4x=0.$$

* * *

5449. Considerînd triunghiul oarecare ABC și punctele A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA, AB, astfel ca $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = -k$ să se demonstreze că putem construi cu AA_1, BB_1, CC_1 întotdeauna un triunghi. Generalizare.

Săbăilă Aurel, etev București

5450. Într-un punct M variabil de pe o elipsă se consideră o tangentă oarecare (Δ). Fie M_1 proiecția lui M pe axa mare. Să se afle locul geometric al intersecției lui OM cu paralela dusă prin M_1 la (Δ) cînd M descrie elipsa. Același caz cînd M'_1 este proiecția lui M pe axa mică. Discuție.

Vodă Gh Viorel, București

5451. Se consideră funcția

$$f(x) = \frac{x^4+x^3+2}{x^3+2x^2+2x+2}$$

și se notează prin N mulțimea numerelor naturale, iar prin I mulțimea numerelor întregi.

Notîndu-se prin A mulțimea valorilor funcției f(x) pentru $x \in I$ să se demonstreze că:

$$A \cap N = \{1 ; 2\}.$$

Traian Cohal, profesor, Iași

5452. Pe un cerc se iau punctele fixe A, B și punctul mobil M. Pe dreapta MA se ia punctul N, astfel că $MN : MB = \text{constant}$. Să se găsească locul geometric al punctului N.

* * *

5453. Pentru care valori ale lui x avem:

$$\sqrt{1-\sin 2x} + \sqrt{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x - 2} = \sin x - |\cos x + \operatorname{cotg}x| + \operatorname{tg}x$$
$$|\sin x - \cos x| - |\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x| = |\sin x - \cos x - \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x|$$

C. Ionescu-Țiu

5454. Fie x, y, z lungimile medianelor unui triunghi oarecare ale cărui laturi sînt a, b, c. Să se arate că

$$\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$
$$\frac{x^6(y^2-z^2)+y^6(z^2-x^2)+z^6(x^2-y^2)}{a^6(b^2-c^2)+b^6(c^2-a^2)+c^6(a^2-b^2)} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

* * *

5455. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin nx \cdot \sin x + \sin(k-1)x \cdot \sin(n-k)x = \sin kx \cdot \sin(n-k+1)x$$

unde n, k sînt numere naturale, și $n \geqslant k$.

* * *

5456. Să se arate că: într-un trapez dreptunghi ortodiagonal:
a) Segmentul de dreaptă care unește mijloacele bazelor este media aritmetică a bazelor, b) Înălțimea este media geometrică a bazelor, c) Diagonala mică este media geometrică între baza mică și suma bazelor, d) Diagonala mare este media geometrică între baza mare și suma bazelor.

Z. Bogdanov, profesor, București

5457. Să se arate că expresia:

$$E = (a_1+c)^n b_1 + a_1^n (c-b_1) + (a_2+c)^n b_2 + a_2^n (c-b_2)$$

este divizibilă cu c, n fiind număr natural, iar a_1, b_1, c, a_2, b_2 fiind întregi.
(În legătură cu problema 4520).

L. Pîrșan, student București

5458. Prin focarul parabolei $y^2 - 2px = 0$ se duce coarda AB, care face unghiul α cu axa Ox.

a) Să se demonstreze relația : $AB \sin^2\alpha = 2p$,

b) Dacă prin focar se mai duce și coarda CD, perpendiculară pe AB să se arate că $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2p}$.

C. Coșniță

5459. Fie (Γ) un cerc concentric cu cercul deschis în triunghiul oarecare ABC, iar l_a, l_b, l_c distanțele unui punct M din interiorul triunghiului ABC și situat pe (Γ) (în ipoteza că există asemenea puncte), la punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului să se arate că valoarea expresiei $E = al_a^2 + bl_b^2 + cl_c^2$ este constantă, oricare ar fi poziția lui M din interiorul triunghiului și situat pe (Γ).

Toma Albu, student București

5460. Dacă $a + b + c = 0$ să se arate că :

$$\frac{ab(a-b)}{(1+a)(1+b)(1-c)} + \frac{bc(b-c)}{(1+b)(1+c)(1-a)} + \frac{ca(c-a)}{(1+c)(1+a)(1-b)} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 0.$$

C. N. Tudor, București

5461. Să se discute rădăcinile ecuației $mx^2-(m-1)x + 2m-1 = 0$ și să se determine m cînd $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

(Bacalaureat, Franța, 1961)

5462. Să se reprezinte grafic funcția

$$y = \frac{4x - 5}{x^2 - 1}.$$

(Bacalaureat, Camerun, iunie 1961)

5463. Să se rezolve și să se discute sistemul liniar

$$m^2x + y = m\,;\; m(x + y) = 1$$

unde m este un parametru.

(Bacalaureat, Mexico, octombrie 1961)

5464. Să se reprezinte grafic funcția $y = (x + 1)(2x-1)^2$. Să se arate că punctul ω (0, 1) este centru de simetrie. Să se afle aria cuprinsă între xx' axa yy' și arcul de curbă cu extremitățile de abscise 0 și 0,5.

(Bacalaureat, Antile, iunie 1961)

5465. Se consideră funcția $y = a\cos^2x + b\cos x + c$.

a) Să se calculeze derivata acestei funcții, a, b, c fiind constante.

b) Să se afle a, b, c știind că funcția y trece printr-un maxim egal cu 4 pentru $x = \pi$ se ia valoarea 2 pentru $x = \frac{\pi}{2}$.

c) Să se reprezinte grafic funcția y, cînd a, b, c au valorile găsite, să se determine punctele de inflexiune și să se precizeze caracterele de simetrie ale curbei.

d) Să se afle aria cuprinsă între tangenta la curbă în punctul de abscisă $x = \pi$ între curbă și dreptele paralele cu Oy duse prin punctele de inflexiune.

(Chestiuni de examen, Franța, 1961)

5466. Dintr-un bazin cilindric cu suprafața bazei de 30 m² se scoate apă. Știind că adîncimea apei din bazin este de 1 m, iar distanța de la nivelul apei pînă la locul unde trebuie ridicată apa este de 4 m, se cere: a) Lucrul mecanic consumat pentru scoaterea apei cu ajutorul unei pompe care are randamentul de 80%. b) Puterea pompei dacă evacuează 10 l apă pe secundă.

(Olimpiada de fizică 1962, etapa finală, clasa VIII-a)

5467. Un balon umplut cu Heliu trebuie să aibă forța ascensională de 3000 kgf la înălțimea de 8000 m, unde presiunea atmosferică este de 0,35 at iar temperatura de —40°C.

Se întreabă: a) Care este volumul pe care îl are balonul la această înălțime și care este masa heliului necesară pentru încărcarea balonului? b) Care este volumul și forța ascensională la sol,, cînd presiunea atmosferică este de 1 at, iar temperatura aerului de 15°C. $M_{aer} = 28{,}9$; $M_{heliu} = 4$.

(Olimpiada de fizică 1962, etapa finală, clasa IX-a)

5468. Tensiunea produsă la bornele alternatorului unei hidrocentrale este de 4000 V. Această tensiune este ridicată de un transformator care are în secundar de 40 ori mai mult spire decît în primar. Puterea activă produsă este transportată la distanța de 200 km printr-o linie formată din două fire de cupru, secțiunea firului fiind de 11 mm². Știind că instalația hidraulică are randamentul de 80%, că alternatorul are randamentul de 90%, transformatorul tot 90%, că factorul de putere al rețelei este de 0,8, iar debitul căderii de apă de 20 m³/s, să se calculeze: a) înălțimea de la care cade apa; b) tensiunea efectivă la bornele secundarului; c) tensiunea efectivă la locul de utilizare.

(Olimpiada de fizică, 1962, etapa finală, clasa X-a)

5469. 1. Într-un tub Röntgen electronii sînt accelerați de o tensiune de 30 000 V și formează un curent de 5 mA. Să se calculeze: a) viteza electronilor în momentul cînd întîlnesc anticatodul; b) numărul electronilor care ies din catod într-o secundă; c) lungimea de undă a radiațiilor Röntgen care iau naștere în tub. Se dă $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg.s.

2) Raza primului nivel energetic din modelul atomic al lui Bohr este de 0,53 Å. Se cere: a) viteza liniară a electronului care se mișcă pe acest nivel; b) de cîte ori este mai mare această viteză decît prima viteză cosmică; c) de cîte ori e mai mare frecvența de rotație a acestui electron decît frecvența de rotație a rotorului unei turbine care face 12 000 rotații pe minut.

(Olimpiada de fizică 1962, etapa finală, clasa XI-a)

5470. Un vas umplut cu un gaz este pus în legătură cu un manometru cu tlb deschis în care se află alcool cu densitatea $=0{,}85$ g/cm$_6$. Nivelul lichidului în ramura liberă este cu 27,2 cm mai ridicat față de ramura racordată. Să se afle presiunea din vas știind că presiunea atmosferică este de 760 mm col.Hg. Se va calcula în atmosfere (atm), torr.at.H/m^2, barye și bar.

(Olimpiada de fizică, 1962, etapa finală, școli pedagogice)

5471. Se dă funcția

$$z = \frac{675x^2 - 2520xy + 2352y^2 - 90x + 168y + 41}{225x^2 - 840xy + 784y^2 - 30x + 56y + 10}$$

în care x și y iau numai valori naturale (1, 2, 3,...).

1. Să se afle valoarea maximă a lui z și la ce valori x, y corespunde ea.

2. Excluzînd punctele (x, y) în care z este maxim, să se afle maximum lui z în domeniul rămas.

3. Dacă x și y variază în domeniul $1 \leqslant x \leqslant 28$, $1 \leqslant y \leqslant 15$, să se afle cîte valori distincte între ele ia z în acest domeniu.

4. Considerînd funcția z definită de aceiași expresie unde x și y iau orice valori reale, să se afle x și y pentru care z este maxim și totodată $x^2 + y^2$ este minim.

E. Rusu

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VII *)

E. 1882: G.A.C. Zăpodeni a desfundat o tarla în formă de trapez isoscel pentru a pune vie. Știind că tarlaua are baza mică de 200 m, înălțimea de 360 m și perimetrul de 2020 m; să se calculeze cîte fire de viță de vie sînt necesare dacă drumurile de acces ocupă 3% din suprafața tarlalei și este necesar să-i se asigure fiecărui butuc de vie, o suprafață de hrănire de 3 m^2.

I. Munteanu

E. 1883: Să se arate că

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1-a}{1+a}\right) = \left(x - \frac{1-a}{1+a}\right) : \left(x + \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1+a}{1-a}\right) = \left(a - \frac{1+a}{1-a}\right) \left(a + \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = 1.$$

C. Ionescu-Țiu

*) (E: 1888, 1890, 1892); VI (E: 1882, 1885); VII (E: 1883, 1886, 1887, 1889, 1891, 1893).

E. 1884: Programul P.C.U.S. prevede ca producția industrială extractivă să crească în 1980 față de 1960 astfel:

— cărbune de la 513 000 000 la 1,2 miliarde tone,

— țiței de la 148 000 000 la 690 000 000—710 000 000 tone,

— oțel de la 65 000 000 la 250 000 000 tone.

Să se exprime în procente aceste creșteri.

D. M. Bătinețu, student București

E. 1885: Programul P.C.U.S. prevede ca producția de îngrășăminte minerale să crească în 1980 la 125 000 000—135 000 000 tone față de 14 000 000 tone în 1960, iar terenurile irigate de la 9 000 000 ha la 28 000 000 ha. Să se exprime aceste creșteri în procente.

D. M. Bătinețu, student, București

E. 1886: Un trapez dreptunghic cu diagonalele perpendiculare între ele, are AB baza mică, DC baza mare și AD latura neparalelă perpendiculară pe baze. Să se arate că:

$$\left(\frac{BD}{AC}\right)^2 = \frac{AB}{DC}.$$

Stelian Lambă, Constanța

E. 1887: Să se arate că:

$$2 : \left(\frac{1-a}{1+a} - \frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}\right) = 1;$$

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} = 4 + \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}};$$

$$\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-z} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} - \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}.$$

C. Ionescu-Țiu

E. 1888: Să se afle 2 numere știind că raportul lor este 2/3 iar cel mai mare divizor comun al lor este 24.

I. Popescu

E. 1889.: Să se descompună în produs de factori expdesia:

$$E=2(a+b)(b+c)(a+3b+2c)+2(b+c)(c+a)(b+3c+2a)+$$
$$+2(c+a)(a+b)(c+3a+2b)+9(a+b)(b+c)(c+a).$$

I. Pîrșan

E. 1890: Un casier fiind întrebat cît a încasat într-o zi, a răspuns: dacă aşi mai fi încasat încă un sfert din cît am încasat şi încă 500 lei, atunci aşi fi încasat 55100 lei. Cît a încasat casierul în ziua respectivă?

C. Dobrescu, Călăraşi

E. 1891: Să se arate că dacă $\frac{ab+cd}{ac+bd}=ad+bc$, atunci

$$\frac{ab}{cd}+\frac{a^2+b^2-1}{c^2+a^2-1}=0.$$

Liviu Pirşan, student Bucureşti

E. 1892: Un troleibuz pleacă de la Parcul de cultură şi odihnă cu un număr oarecare de persoane, taxatorul încasînd 10 lei. Presupunînd că la fiecare staţie se dau jos 3 persoane şi se urcă 4 şi că preţul biletului este acelaşi pentru tot traseul, să se calculeze cîte persoane au călătorit cu troleibuzul ştiind că acesta a sosit cu 28 persoane în staţia „Patria", iar taxatorul a încasat 26 lei.

V. Vodă, elev Bucureşti

E. 1893: Să se arate că:

$$\frac{4(x^2+4x+2)^2-(3x^2+5x+4)^2}{6x+x-x^3}:\frac{5x^2+13x+8}{x+2}=1.$$

Joandrea Adriana, elevă Iaşi

DESPRE ACTIVITATEA CERCULUI DE MATEMATICĂ AL CLASEI A XI-A DE LA ŞCOALA MEDIE NR. 1 „N. BĂLCESCU"

Răspunzînd chemării la întrecere între cercurile de matematică şi fizică din şcolile medii pe anul 1962, membrii cercului de matematică al clasei a XI-a de la şcoala medie nr. 1 „N. Bălcescu" şi-au intensificat activitatea.

Lucrările cercului au fost urmărite cu viu interes de către elevii clasei astfel că în prezent la şedinţele cercului care se ţin bilunar, participă aproximativ 55 de elevi.

Succesul activităţii cercului se datoreşte faptului că aceştia au înţeles de la început sarcinile ce le stau în faţă. Pentru noi elevii, lucrările cercului au o mare importanţă deoarece materialul prezentat contribuie din plin la adîncirea cunoştinţelor predate la orele de curs, la lărgirea orizontului matematic, dezvoltă gîndirea, stimulează pe cei ce participă ca rezolvitori la „Gazeta matematică şi fizică" seria B.

În cadrul cercului de matematică au fost prezentate referate interesante, diferite note şi teoreme generalizate, recenzii ale unor cărţi de specialitate. Astfel, elevul Stoenescu Dan a prezentat referatele: „Figuri de matematicieni romîni", „Puncte şi drepte remarcabile", eleva Frimu Nadia: „Inegalităţi şi inecuaţii", Dorin Alexandru: „A şaptea operaţie matematică" (despre logaritmi şi aplicaţiile lor), Vasilescu Andrei: „Construcţii grafice", Weiss Manuel: „Transformări geometrice" (despre

asemănare, inversiune și omotetie), Chivu Gheorghe: „Probleme de loc geometric", Soare Marin: „Demonstrații trigonometrice a unor teoreme de geometrie", Crăciunescu Ion: „Probleme de maxim și minim".

Expunerile au avut drept scop nu numai să precizeze, să reîmprospăteze și să fixeze cunoștințele disparate și nesigure, dar și să trezească în fiecare dorința de a-și completa independent cu ajutorul manualelor de specialitate, golurile existente în pregătirea lor. Totodată au scos în evidență (acolo unde a fost cazul) faptul că matematica nu este o știință ruptă de viață, ci dimpotrivă strîns legată de practică, cercetările ei fiind folosite în toate domeniile de activitate.

În sarcina participanților la ședințele cercului intră și sprijinirea elevilor mai puțin avansați, precum și rezolvarea cît mai multor probleme din cele mai variate, pentru adîncirea programei analitice.

În cadrul ședințelor de cerc s-a rezolvat și propus probleme diferite. În cadrul uneia dintre acestea s-a propus problema:

Să se afle limita expresiei:

$$E = \left(\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\operatorname{cosec}\alpha$$

pentru $\alpha \to 0$.

Elevul Vasilescu Andrei a dat soluția următoare:

Expresia căpătată pentru $\alpha = 0$ forma fără sens 1^{∞}. Pentru a-i afla limita o mai putem scrie:

$$E = \left[\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right]^{\operatorname{cosec}\alpha} = \left(\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\right)^{\operatorname{cosec}\alpha} =$$

$$= \left(1+\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-1\right)^{\operatorname{cosec}\alpha} = \left[\left(1+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cosec}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}}$$

Notînd $n = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, $m = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$

și trecînd la limită pentru $\alpha \to 0$ obținem

$$\lim_{\alpha\to 0} E = \left[\lim(1+n)^{\frac{1}{n}}\right]^{\lim_{\alpha\to 0} m} \qquad \lim_{\alpha\to 0} n = e,$$

$$\text{dar} \quad \lim_{\alpha\to 0} \frac{2}{\cos\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2}{1(1-0)} = 2$$

deci $\lim E = e^2$

La problema propusă de elevul Dorin Alexandru:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4\cos 2x - 1 = 2\cos x\cos y\cos(x+y) - \cos^2 y - \cos^2(x+y), \\ 3^4\cos x\cos 3y - \sin 6y = 1 \end{cases}$$

elevul Crăciuneanu Ion a dat următoarea rezolvare.

Intrucît $4 = 2^2$ și $1 = 3^0$, sistemul dat se poate scrie astfel

$$2\cos^2 x - 2 = 2\cos x \cos y \cos(x+y) - \cos^2 y - \cos^2(x+y),$$
$$4\cos x \cos 3y - \sin 6y = 0.$$

Prima ecuație devine:

$$2\cos^2 \alpha - 2 = (\cos x \cos y - \sin x \sin y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y) - \cos^2 y$$

sau

$$2\cos x - 2 = \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 y - \cos^2 y,$$
$$2\sos^2 x - 2 = \cos^2 y(\cos^2 x - 1) - \sin^2 x \sin^2 y,$$
$$2\cos^2 x - 2 = \cos^2 y \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y,$$

sau:

$$2\cos^2 x - \sin^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) = 0$$

adică

$$2\cos^2 x - 2 + \sin^2 x = 0, \text{ sau } 2\cos^2 x - 2 + 1 - \cos^2 x = 0$$

Obținem:

$$\cos^2 x - 1 = 0$$

ale cărei rădăcini sînt $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = (2k+1)\pi$.

A doua ecuație devine:

$$4\cos y \cos 3y - \sin 2(3y) = 4\cos x \cos 3y - 2\sin 3y \cos 3y = 0,$$

sau:

$$\cos 3y(2\cos x - \sin 3y) = 0$$

Obținem deci,

$$\cos 3y = 0, \rightarrow y_1 = (2k+1)\frac{\pi}{6} \text{ sau } 2\cos x - \sin 3y = 0,$$

Dar $\cos x = \pm 1$

Vom avea: $2 - \sin 3y = 0$. $\sin 3y = 2$

Pentru $2 + \sin 3y = 0$, $\sin 3y = -2$, de unde rezultă: nici o soluție deoarece: $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

Sperăm că activitatea cercului va stimula activitatea extrașcolară la matematică a elevilor, ca să aducă un aport prețios școlii în obținerea unor rezultate cît mai bune în întrecerea pe țară între școlile medii.

Dorin Alexandru

Cărți noi

O. Sacter: „Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente", Biblioteca Societății de științe, matematice și fizice din R.P.R., nr. 48, Editura tehnică 1962.

Lucrarea cuprinde elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente, accesibile în cea mai mare parte celor care au o cultură matematică medie. Prin numeroase aplicații se stabilește o legătură strînsă între problemele teoretice expuse și practică. Metodele de separare a rădăcinilor reale, de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente, mijloacele de eliminare a unei variabile între relații algebrice care au loc simultan și teoria rădăcinilor multiple vor putea fi utilizate atît de către elevi și studenți din anul I, cît și de cadrele didactice din învățămîntul elementar și mediu.

Materialul cuprins în această carte este grupat astfel: I. *Polinoame:* A. Expresia dezvoltării unui polinom după formula Taylor; B. Calculul diferențelor și aplicarea lui în aflarea valorilor numerice ale unui polinom.

II. *Ecuații algebrice cu o singură necunoscută*: A. Teorema fundamentală; B. Consecințe ale teoremei fundamentale; C. Ecuații cu coeficienți reali; D. Semnul unei funcții de două variabile; E. Relații între rădăcinile și coeficienții unei ecuații algebrice; F. Funcții simetrice de rădăcinile unei ecuații; G. Rădăcini comune a două ecuații algebrice; H. Transformarea ecuațiilor; I. Rădăcini multiple; J. Rezolvarea ecuațiilor care au rădăcini multiple.

III. *Sisteme de ecuații cu mai multe necunoscute:* A. Eliminarea unei variabile între două polinoame; B. Eliminarea prin funcții simetrice; C. Proprietăți ale rezultantului; D. Alte metode de eliminare; E. Sisteme de două ecuații algebrice cu două necunoscute.

IV. *Separarea rădăcinilor ecuațiilor cu coeficienți numerici:* A. Teorema lui Descartes; B. Teorema lui Rolle; C. Teorema lui Sturm.

V. *Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți numerici:* A. Margini ale rădăcinilor; B. Calculul unei margini superioare a rădăcinilor pozitive; C. Aflarea rădăcinilor raționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi; D. Rădăcini iraționale; E. Metode de aproximare a rădăcinilor iraționale; F. Calculul aproximativ al rădăcinilor complexe.

VI. *Rezolvarea ecuațiilor de gradul al treilea și al patrulea.*

VII. *Ecuații transcendente.*

VIII. *Metode de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente*: A. Revolzarea grafică a ecuațiilor; B. Dispozitive mecanice de rezolvat ecuații.

IX. *Aplicații diverse ale teoriei ecuațiilor.* A. Descompunerea fracțiilor raționale în elemente simple.

Exercitii. Bibliografie.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții primite până la 15.07.1962

(urmare)

BUZĂU. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Avram Didi (5157, 95, 42, E: 1902, 03, 06—11, 15—18, 23, 24, 29, 30). Cl. IX. Constantinescu Cristian (5157, 59, 60, 65, 67, 69, 75, 80, 95, 208, 24, 39, 49, 57, 61, 66, 81). Cl. X. Costea Ion (5110, 15, 16, 35, 39, 60, 69, 70, 76, 91, 93, 95, 202, 07, 10, 14, 42, 44, 52, 53, 57, 61, 74, 86), Dragomir Sergiu (5163, 70, 207, 08, 31, 40, 45, 57, 59, 61, 83), Toader Gh. (5160, 67, 75, 207, 08, 10, 24, 31, 48, 57, 59—61). **Ş.m. 2.** Cl. VIII. **Ciocoiu Virgil** (5096, 159, 60, 62, 80, 83, 89, 93, 208, 24, 34, 42, 48, 49, 57, 59—61, 63, 67, E: 1801—11, 14—24, 29—32, 36, 37), **Cojanu Marius** (5141, 67, 208, 24, 31, 49, 50, 57—62, E: 1801, 07, 13, 16—18, 22, 23, 29—33, 35—38, 41).

CARACAL. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Rădulescu Sever (E: 1816, 18, 24, 29—31, 35—37, 41). Cl. X. Bădescu Pantelie (5099, 107, 18—22, 25, 49, 52).

CARANSEBEŞ. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Crețu Mihaela (5160, E: 1801—04, 06—09, 23), Ienea Aurel (5238, 42, 44, E: 1811, 13, 16—18, 20, 21, 23, 28), Lungu Corina (5242, 48, E: 1801—06, 08, 11, 16, 19, 23, 26, 29—31, 37, 41). Cl. X. Englender Alexandru (5110, 16, 19, 21, 25, 35, 41, 60, 69, 204, 32), Titel Ligia (5202, 13, 14, 18, 21, 24, 29, 36, 40, 42, 44, 48—50, 52, 53, 57—62).

CĂLĂRAŞI. Cl. VII. Lozneanu Gabriel (5193, 208, 56, 66, E: 1809, 11, 13, 16, 18, 19, 23, 30, 32, 33, 35—37, 41). **Ş.m.** Cl. IX. Apostol Dan (5110, 16, 18, 20, 21, 35, 45, 50, 60, 64, 95, 212, 39, 42, 44), Negreanu Mircea (5110, 16, 18, 20, 21, 39, 44, 52, 60, 65, 67, 75, 93, 95, 208, 42, 44), Petruș Valentin (5179, 224, 48—51, 56, 57, 67, 70, 74, 86). Cl. X. Georgescu Dan (5157, 60, 63, 93, 208, 07, 10, 21, 24, 42, 57, 59, 61, 84), Niculescu Valerica (5207, 08, 10, 17, 18, 57—59, 61, 62, 67).

CIMPIA TURZII. **Ş.m.** Cl. X. Bogdan Mihaela (5109, 10, 13, 16, 26, 30, 35, 41, 202, 07).

CIMPINA (Ploiești). **Ş.m. Nicolae Grigorescu.** Cl. IX. Popescu Florin (5160, 70, 93, 216, 17, 21, 24, 57, 61, 70), Sverjinski Eugen (5160, 70, 80, 93, 216, 24, 48, 57, 61, 70, 86).

CIMPULUNG MOLDOVENESC. **Liceul Dimitrie Cantemir.** Cl. VIII. Șchiopu Paul (5193, 200, 38, 42, 61, E: 1802, 08, 09, 23, 93). Cl. IX. Țintoiu Ion (5216, 21, 24, 29, 31, 36, 39, 42, 48, 50, 57, 58, 61, 62, 68, 74, 81). Cl. XI. Puiu

Ioan (5158, 60, 207, 08, 10, 11, 25, 26, 50, 60, 61, 74, 85—88), Vlad Emil (5157—61, 67, 207, 10, 11, 24, 27, 48, 59—61, 63, 67, 81, 84, 85, 88, 89).

CIMPULUNG MUSCEL. Ş.m. Cl. XI. Poştoacă Moise (5068—70, 72, 86, 94, 98, 107, 09—11, 13—17, 21, 35, 39, 49).

CLUJ. Desenator Ciomocaş Doina (5110, 11, 15—17, 59—63, 65, 67, 68, 81, 207, 09, 10, 12, 27, 60, 87, 88). Studentă Stoica Emilia (5158—62, 67, 207—11, 24, 36, 50, 57, 59—61). Ş.m. 1 Emil Racoviţă. Cl. IX. Hadnagy Vasile (5221, 31, 36, 38, 51, 57, 61, 66, 86). Cl. X. Bodea Ecaterina (5207, 08, 10, 24, 42, 57, 59, 61, 70), Pop Ioan (5207, 08, 10, 42, 46, 48, 50, 53, 57, 59, 61), Radu Valeria (5068, 72, 96, 110, 16, 39, 208, 61, 66, 67), Tăpălugă Livia (5207, 08, 10, 24, 42, 48, 57, 59, 61, 66, 70). Cl. XI. Peteanu Lelia (5157, 60, 67, 69, 70, 76, 206, 07, 10, 17, 21, 24). Ş.m. 2 Gh. Bariţiu. Cl. IX. Mai Eugenia (5157, 60, 64, 67, 69, 70, 75, 86, 93, 208, 16, 21, 24, 29, 36, 38, 48, 50, 57, 59, 62, 64, 66), Marian Iuliu (5109—13, 15—17, 30, 30, 41). Ş.m. 3 Nicolae Bălcescu. Cl. VIII. Coroiu Ion (E: 1802, 03, 06—10, 16, 30, 39). Ş.m. 4. Ady Şincai. Cl. VIII. Füstös Attila (MFL, E: 782, 84, 85, 87, 90—92). Şc. Elem. 15. Cl. VI. Cseke Agnes (MFL, E: 757, 63, 77, 79, 82, 89, 91). Şc. elem. 18. Cl. VII. Frajko Laszlo (FML, E: 781, 83, 84, 86, 87, 89, 91, 92), Jakab Ferenc (MFL, E: 781—84, 86, 87, 89, 91).

CONSTANŢA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Ciurtin Cătălin (5180, 83, 93, 200, 02, 42—44, 48, 49, 57—59, 61, 70, E: 1802, 03, 07, 09, 10, 14, 15, 17, 23—26, 28—31, 33—37, 42). Cl. X. Brînzănescu Vasile (5165, 66, 76, 77, 79, 80, 83, 85, 86, 89—91, 93, 95, 96, 98, 200, 02, 06—08, 10, 12, 13, 16—18, 23, 24, 31, 32, 34, 36, 38—40, 42—46, 48—53, 56—62, 64—66). Ş.m. 4. Cl. IX. Luca Ion (5157, 70, 93, 200, 08, 12, 24, 31, 34, 38, 39, 42—44, 48, 50, 51, 56, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 70, 74).

CORABIA. Absolvent Moruzi Mihai (5157—61, 63, 207—12, 41, 57, 60, 84, 88, 95). Ş.m. Cl. VIII. Delu Maria (5248, 49, 57, 61, E: 1822, 23, 28, 33, 35, 37).

COSTEŞTI (Argeş). Ş.m. Cl. VIII. Depărăţeanu Dan (5189, 95, 218, 24, 42, 44, 48, 57, 59, 61, 62, 66, 70, E: 1801—11, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 24, 26, 29—32, 35—37, 41). Cl. X. Nedea Constantin (5195, 202, 08, 24, 39, 42, 44, 48, 57, 60).

CRAIOVA. Absolvent Băluţescu Mihail (5157—60, 63, 68, 86, 87, 97, 214, 18, 29, 32, 37, 41, 46, 48, 50, 57, 58, 60—63, 66, 70, 73, 74, 78, 81, 84—88, 94). Ş.m. 1. Cl. VIII. Florea Cristian (5239, E: 1790, 91, 99, 804—11, 14, 16), Popescu Felicia (5193, 95, 212, 24, 42, 44, E: 1801, 04, 05, 09, 11, 16—19, 24, 26, 29, 30, 37). Cl. XI. Florică Emilian (5158, 60, 61, 67, 80, 257, 59, 61, 75, 85—88), Potcovaru Gh. (5157—62, 67, 71, 88, 91, 93, 207—11, 14, 16, 21, 24, 48, 49—54, 57—64, 66, 67, 70, 81, 83—88), Stuparu Alexandru (5158—61, 67, 80, 257, 59, 61, 75, 85—87). Ş.m. 2. Cl. VIII. Rusu Aureliaa (5275, E: 1802, 03, 06, 07, 09, 10, 16, 24, 29, 30, 35, 37). Cl. IX. Gropper Mircea (5224, 29, 48, 57, 59, 61, 66, 70, 81, 83), Paulon Constantin (5160, 67, 75, 221, 24, 36, 50, 51, 74, 86). Cl. X. Vasile Cornel (5157, 60, 67, 69, 70, 74—76, 80, 83, 89, 91, 202, 06—08, 10, 14, 21, 29, 31, 34). Ş.m. 3. Cl. VIII. Răduinea Nicolae (E: 1802, 03, 06, 09, 11—13, 16, 18—24, 26, 28, 30—32, 35—37). Cl. IX. Săvescu D. (5157, 60, 67, 75, 80, 88, 216, 17, 21, 24, 31). Cl. XI. Popescu St. Mariana (5170, 75, 76, 85, 86, 91, 95, 212, 21, 23—25, 29, 36, 42, 44). Ş.m. 4. Cl. VIII. Ţăndăreanu Nicolae (E: 1780, 86, 97, 803, 06—10, 18). Şc. elem. nr. 8. Cl. V. Aprodu Viorica (E: 1802, 06, 08, 18, 20, 22, 30, 31, 37).

CURTEA DE ARGEŞ. Ş.m. Cl. VIII. Cîrlea Filip (5248, 57, 59, 61, 66, E: 1830, 32, 35—37), Florescu Nicolae (5248, 57, 61, 66, E: 1817, 18, 23, 24, 28—30, 32, 35—37, 39).

DEJ. Liceul unificat. Cl. VIII. Horvath Huba (MFL, E: 769, 71, 75, 77, 87, 89, 91). Cl. X. Kerekes Gyula (MFL, 774, E: 752, 93, 840, 47), Mihalfyalvi Geza (MFL, E: 793, 809, 17, 40, 42, 47, 52).

DEVA. Ş.m. Decebal. Cl. X. Bunea Bănică (5185, 61, 71, 72, 76, 207—12, 14, 16, 21, 24, 25, 29, 31, 44—46, 48—50, 52, 53, 57—61, 63—67, 70, 74, 75, 81, 85).

DITRĂU. Ş.m. Cl. VII. Benedek Irma (MFL, E: 763, 71, 80, 82, 89), Fülöp Laszlo (MFL, E: 771, 77, 79, 81, 82, 89). Cl. VIII. Ambruş Andra (MFL, E: 781, 82, 84, 89—92), Albert Anna (MFL, E: 769, 76, 77, 79, 89, 92), Lecseti Ida (MFL, E: 769, 76, 77, 79, 89, 91, 92), Küsmödi Ildiko (MFL, E: 769, 76, 77, 79, 89, 91, 92), Laczko Maria (MFL, E: 769, 76, 77, 79, 89, 91, 92), Portik Erzsebet (MFL, E: 769, 76, 77, 79, 89, 91, 92), Szabo Arpad (MFL, E: 781, 82, 84, 89—92).

DOROHOI. Ş.m. 1. Cl. XI. David Sumer (5110, 16, 26, 39, 41, 44, 60, 67, 217,

24), Sechter Isabella (5110, 16, 20, 39, 53, 54, 60, 64, 67).

DRĂGĂȘANI. Ș.m. Cl. VIII. Duță Marin (5116, 20, 83, E: 1802, 07, 10, 16, 18, 23).

FĂGĂRAȘ. Ș.m. 1. Cl. VIII. Cosma Bucur (5160, 208, 23, 49, 61, E: 1801—03, 06—11, 13, 16, 23, 24, 29, 30, 36, 37). Cl. X. Früstök Ștefan (5160, 75, 77, 83, 85, 90, 202, 06, 16, 70).

FĂLTICENI. Ș.m. 2. Cl. XI. Rabinovici Silviu (5207—14, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 32, 34, 36, 38—53, 57—62, 65—71, 75, 78, 81, 83—86, 90, 95).

FETEȘTI (gară). Ș.m. Cl. XI. Nicolai Sergiu (5135, 39, 60, 63, 207, 08, 24, 26, 31, 42, 44, 57—59, 61, 67).

FOCȘANI. Ș.m. 1. Al. I. Cuza. Cl. X. Mendelsohn Rozica (5157, 63, 96, 207, 08, 10, 24, 40, 42, 44, 45, 48, 52, 57, 59).

Ș.m. 2. Unirea. Cl. IX. Mendelsohn Zeppy (5195, 99, 202—05, 08, 24, 31, 37, 42, 44, 48—51, 57—62, 64, 71, 74, 77, 81, 84, 86, 92, 93). Cl. XI. Pantelimon Anton (5067—72, 76, 80, 82—84, 86, 88, 92, 93, 96, 98, 109—17, 26, 28, 29, 31, 32, 35, 36, 39—41, 44, 46, 49, 57—62, 67—70, 72, 75, 85, 88).

GALAȚI. Institutul Pedagogic de învățători. Anul V. Mocanu Lenuța (5248, 49, 56—59, 61, 66, 67, 70). Ș.m. 1. Cl. VIII. Bulai Maria (5149, 83, E: 1791, 93, 94, 99, 800, 02, 03, 06, 07, 11). Cl. IX. Ionescu Mircea (5160, 64, 75, 88, 237, 48, 49, 51, 57—59, 61, 66, 81, 92). Pană Horia (5164, 86, 248, 50, 57, 58, 60—62, 74, 81, 84, 86, 92). Cl. X. Cahane Mendi (5158, 59, 61, 71, 88, 89, 202, 48, 52, 57, 58, 59—62). Gheorghe Doina (5112, 38, 40, 42, 56, 57, 59, 61, 66, 67, 70), Mihailovici Marcel (5198, 231, 36, 48, 50, 56, 57, 59—62, 66, 81, 83), Nichita Cornelia (5224, 38, 40, 42, 56, 57, 59, 61, 66, 67, 70), Pintilie Angela (5115, 35, 37, 59, 60, 63, 67, 59, 80, 89, 96, 207, 08, 42, 44—46). Ș.m. 2. Cl. VIII. Pantici Georgeta (5118, 20, 21, E: 1790, 91, 93, 809, 11, 12, 14, 16, 28), Pușcașu Eugenia (E: 1816—18, 26, 28—30, 36, 37, 41). Cl. X. Constantinescu Elena (5160, 67, 70, 73, 207, 08, 10, 16, 48, 53, 57, 59, 70), Dodu Mariana (5163—65, 73, 88, 95, 207, 08, 10, 21, 31, 40, 45, 46, 48, 52), Grigore Elena (5109, 15, 16, 26, 29, 41, 44, 75, 80, 207). Cl. XI. Gîță Maria (5114, 26, 29, 42, 44, 97, 207—11, 24, 36, 37). Ș.m. 3. Cl. VIII. Diaconescu Liliana (5165, 242, 48, 57, 62, E: 1802, 03, 06—10, 16, 18, 24, 29, 30, 35—37), Selinger Silvia (5231, 42, 44, 49, 57, 61, E: 1801—13, 16, 18, 23, 24, 29, 32, 37, 41). Cl. IX. Damascan Mihai (5118, 20, 21, 49, 50, 52—54, 64, 65, 95, 212, 39, 44), Krausser Dan (5160—65, 70, 93, 208, 12, 23, 36, 38, 39, 42—44, 48, 50, 51, 66, 70, 74). Cl. XI. Ivănescu Alexandru (5067, 69, 71—73, 79, 80, 84, 86, 92, 94, 96), Natan Solm Daniela (5159, 63, 64, 69, 96, 207, 08, 24, 40, 46, 48, 57, 59, 61, 66, 70, 95), Palic Teodor (5122, 23, 29, 46, 49, 61, 67, 75, 80, 93, 202, 07, 08, 10, 16, 21, 24, 31, 32, 42, 44, 48, 50, 57, 59, 61, 66, 67, 70, 74, 86, 92). Ș.m. 5. Cl. VIII. Andreieș Nicolae (5107, 80, 93, 200, 08, 12, 21, 24, 42—44, 48, 49, 57, 58, 61, 70, 77, E: 1801—11, 14, 15, 20, 22, 36, 37), Blaga Jenica (E: 1802—04, 07, 09, 11, 12, 14, 16, 28), Coblaș Angelica (5257, 59, 61, 70, E: 1829, 30, 32, 35, 36—38), Costea Margareta (5119, 20, E: 1790, 91, 93, 95, 802, 04, 06, 11, 12, 14), Dimache Anișoara (5248, E: 1805, 10, 24, 28, 30, 32, 35—38), Elisei Dumitru (5242, E: 1801—03, 07, 09, 10, 13, 16, 18, 27), Ene Stan (idem), Găitan Marcela (5025, 104, 07, 231, E: 1807, 09, 15, 16, 37), Hainăroșie Cornelia (5248, E: 1800, 30, 32, 33, 36—40), Jipirescu Otilia (E: 1802—04, 06—09, 11, 12, 14, 28), Lucaci Pompiliu (5170, 80, 93, 200, 21, 24, 44, 48, 49, 58, 61, 70, 77, E: 1801—11, 14, 15, 20, 22, 30, 31, 35—37), Nedelea Elena (5118, E: 1790, 93, 95, 802, 04, 06, 11, 12, 18), Paiu Tincuța (5248, E: 1829, 30, 32, 33, 36—38, 40), Sarivan Ioan (E: 1813, 18, 23, 24, 30, 32, 33, 35—38), Susai Amalia (5249, 59, 61, 62, 66, 71, E: 1804, 05, 11, 13—15, 30—33, 35—37, 39—41), Voicu Stela (5231, 38, E: 1827, 31, 32, 35—38). Cl. IX. Pavel Aurelia (5175, 24, 48, 56, 57, 61, 66, 70, 7, 844), Vizureanu Lidia (5175, 224, 50, 56, 57, 66, 70, 74, 86). Cl. X. Cultuclu Elena (5126, 41, 44, 60, 61, 67, 74, 76, 80, 86, 88, 202, 61), Iacobovici Sorin (5163, 88, 91, 95, 200, 02, 07, 08, 10, 12, 14, 18, 21, 24, 31, 36, 37, 42, 44, 45, 48, 50, 53, 56—62, 66, 67, 70, 74, 81, 85, 92, 95), Lucaci Nicolae (5112, 13, 18, 22, 41, 44, 45, 49, 52, 53, 55, 57—59, 61, 64, 67, 69—71, 75, 80, 89, 90, 93, 95, 96, 98, 200, 07, 08, 12, 21, 24, 31, 39, 39, 42—46, 48, 49, 52, 56—61, 66, 67, 70, 77, 81, 83, 85, 86), Scobici Elena (5118, 19, 21, 35, 41, 46, 60, 81, 83, 202, 97, 08, 10, 32, 37, 48, 61, 72, 84, 86), Solomon Ludvig (5158, 59, 61, 80, 86, 89, 95, 96, 98, 200, 12, 21, 30, 43, 46, 48, 49, 52, 56—61, 66, 67, 70,

77, 81, 83, 85), Tănase Paul (5160, 61, 63, 67, 261, 70, 77, 83, 86, 89), Tuchel Gabriel (5158, 61, 80, 89, 96, 98, 200, 07, 39, 43, 48, 57, 59—61, 66, 70, 77, 83, 85). Ş.m. 6. Cl. VIII. Calimachi Corneliu (5180, 200, E: 1801—11, 14, 15). Şc. elem. 20. Cl. VI. Horceag Ecaterina (E: 1802—04, 06, 08, 16, 28), Istrate Iftimiţa (E: 1802—04, 06, 08, 16, 28). Cl. VII. Bojin Gheorghe (E: 1803, 07—09, 30, 36), Chihaia Doru (E: 1801—04, 06, 11, 14, 16, 20, 24).

GIURGIU. Ş.m. 1. Cl. VIII. Ivanov Ilie (5110, 16, 24, 60, 67, 70, 95, 81, E: 1811, 9—22), Răbuică Nicolae (5112, 18, 20, 21, 52, E: 1790, 93, 95—97, 800). Cl. IX. Gheorghe Anton (5157, 70, 200, 08, 38, 43, 51, 57, 58, 61, 86), Palade Romulus (5218, 24, 38, 42, 44, 48—51, 57, 59, 61, 70, 71, 86), Scraba Dumitru (5218, 31, 48, 57, 61, 62, 66, 70, 74, 86).

GURA HUMORULUI. Ş.m. Cl. X. Grosu Gheorghe (5207, 10, 24, 36, 40, 52, 53, 58, 60—62, 67, 81).

HAŢEG. Ş.m. Cl. VI. Maftei Nicolaie (E: 1816, 18, 22, 26, 28, 30, 31, 43, 45).

HOREZU (Argeş). Ş.m. Cl. IX. Costescu Ion (5144, 52, 55, 95, 212, 21, 31, 42, 44, 48, 49—51, 56, 57, 59, 61, 70, 74, 86). Cl. X. Iliescu Mihai (5157—59, 62, 69, 257, 59, 61, 67, 70, 72, 81, 85, 86).

HUNEDOARA. Ş.m. Cl. X. Hajos Ladislau (5163, 64, 65, 69, 71, 80, 88, 93, 202, 07, 08, 10, 12, 21, 24, 31, 38, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 70, 74, 85, 86). Cl. XI. Vaida Victor (5157, 60, 65, 67, 71, 80, 88, 93, 95, 200, 07, 08, 10, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 57, 59, 60, 62, 66, 67, 70, 83).

HUŞI. Ş.m. M. Kogălniceanu. Cl. XI. Chetraru Mihai (5157, 63—65, 69, 70, 75, 80, 83, 88, 93, 95, 96, 282, 07, 08, 12, 14, 24, 29, 31, 38, 40, 42, 44—46).

IAŞI. Şc. elem. nr. 14. Cl. VII. Gînbuţă Aurel (E: 1807, 09, 16, 18, 22 ,27, 28). Ş.m. 1. Cl. IX. Stus Carmen (5224, 31, 39, 48, 49, 51, 57, 70, 71, 95, 96, 97, 327). Cl. X. Goldemberg Daniel (5157, 60, 63—65, 67, 69, 70, 75, 83, 88, 91, 93, 95, 96, 98, 200, 02—05), Haim Marcel (5207, 08, 12, 14, 21, 24, 29, 31, 38—46, 48, 57—62, 66, 67, 70, 81, 83, 95, 96, 302, 12, 13, 15, 31, 40, 44, 45, 49). Cl. XI. Iţicescu Lazarony (5207, 08, 10, 17, 23, 24, 29, 39, 40, 42, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 57, 58, 59, 61, 62, 66, 70). Ş.m. 2. Cl. VI. Leiser Marica (E: 1802, 03, 06, 16, 19, 21, 22). Cl. VIII. Segal Gizi (E: 1802, 03, 09, 10, 11, 18; 5193, 95, 200, 38, 42, 43). Cl. X. Pasecna Valeria (5169, 93, 96, 97, 98, 200, 04, 08, 12, 23, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 47, 56, 57, 59, 67, 94, 95). Ş.m. 3. Cl. VI. Şerban Elena (E: 1816, 18, 19, 30, 31, 34, 43, 55). Cl. VII. Baraboi Adrian (E: 1816, 24, 30, 37, 43, 45, 48). Cl. IX. Avădanei Ştefan (5248—51, 56—61), Ciornei Aurel (5248, 50, 51, 56, 57—60, 70, 74, 86), Faiver Sayan (5224, 39, 48, 50, 56—59, 61, 86), Feraru Strul (5239, 48—51, 57—61, 86), Găburea Aurel (5248—51, 56—61, 70, 74, 86), Ionescu Gheorghe (5239, 48, 50, 51, 57—61, 74, 86), Marcovici Florin (5224, 39, 48, 50, 56—59, 61, 86), Pîrvu Sorin (5248—51, 56—61, 70, 74, 84, 86), Topa Paul (5224, 39, 48, 50, 57—61, 74, 84, 86). Cl. X. Bulgaru Viorel (5109, 16, 35, 39, 80, 202, 07, 08, 10, 24, 29), Carasevici Eugen (5157, 60, 67, 69, 75, 76, 80, 83, 86, 88), Cichi Carol (5109, 10, 12, 15, 26, 29, 39, 60, 67, 75, 80, 202, 07, 08, 10, 21, 29), Istrate Sergiu (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 29, 57, 207, 08, 10), Ivanovici Emil (5109, 10, 15, 16, 26, 27, 29, 35, 39, 44, 80, 86, 202, 10, 24), Largu Mihai (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 25, 26, 29, 35, 39, 40, 41, 44, 60, 65, 67, 69, 75, 80, 86, 88, 202, 07, 08, 10, 21, 24, 29, 31, 39, 40, 44, 45, 46), Nichita Vasile (5116, 39, 60, 75, 207, 08, 10, 24, 29, 31, 41, 44), Niculescu Victor (5109, 10, 16, 26, 29, 35, 39, 41, 44, 45, 60, 80, 81, 202, 21, 24), Mihalache Ioan (5109, 10, 15, 16, 26, 29, 35, 39, 44, 60, 67, 75, 80, 207, 08, 10, 24, 39, 45, 46), Stoleru Gheorghe (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 26, 27, 29, 30, 45, 39, 41, 44, 62, 80, 202, 07, 10). Cl. XI. Antonescu Mihai (5109—17, 57—62, 67—69, 207—11), Boboc Emil (5109—12, 14, 16, 57, 58, 60, 61, 207—11), Chelaru Vasile (5110, 15—17, 29, 39, 60—62, 67, 69, 80, 202, 07—11, 21, 25, 27, 31, 36), Iordache Gheorghe (5110, 15—17, 29, 35, 39, 60, 61, 67, 207, 09, 11, 21, 25, 27, 31, 37), Moise Adrian (5110, 12—16, 58—62, 67, 207—11, 25, 26), Popovici Anton (5110, 15—17, 29, 35, 39, 60, 61, 207—09, 11, 27, 31), Salichi Gheorghe (5110, 13, 16, 29, 35, 39, 60, 75, 80, 207, 08, 31). Trupcea George (5116, 39, 60, 61, 67, 207, 08, 09, 10, 11, 36). Ş.m. 4. Cl. V. Linde Radu (E: 1818, 20, 22, 26, 27, 30, 31, 36). Cl. VI. Benchea Nicolae (E: 1818, 20, 22, 26, 27, 30, 35, 43, 44, 45, 54). Cl. VIII. Benchea Elena (E: 1816, 17, 19, 21, 23, 24, 28, 29, 41, 50). Cl. X.

Cozma Rodica (5157, 60, 69, 207, 08, 10, 21, 24, 29, 32, 51, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 66, 67, 83).

Ş.m. 6. Cl. VIII. Spaier Edmond (E: 1816, 18, 19, 20, 22, 24, 23, 31, 35, 36, 37, 238, 42, 44). Cl. IX. Brull Adonel (5157, 60, 67, 75, 202, 08, 24, 39, 42, 49, 57, 59, 61, 62), Chniger Azy (5160, 67, 217, 24, 31, 49, 50, 57, 69, 65, 86), **Thirer Nonel** (5208, 12, 16—18, 21, 24, 31, 36, 38, 39, 42, 44, 48—51, 56—62, 66, 70, 74, 86, 96, 99, 305, 13, 14, 27, 28, 32, 40, 45, 49, 50). Cl. X. Bolocan Mihai (5073, 74, 100, 03, 60, 63, 65, 71, 93, 95, 96, 98, 200, 07, 08, 10, 12, 24, 39, 40, 42—46, 62, 64, 66, 67, 86), Cogan Hary (5160, 63, 65, 71, 93, 95, 96, 98, 200, 07, 12, 24, 39, 40, 42—46, 48, 57, 59, 61, 94). Cl. XI. Bradu Brîndușa (5157, 60, 63, 67, 71, 207—09, 40, 48, 52, 60), Goleru Constantin (5133, 43, 52, 94, 96, 08, 306, 09, 11, 15, 39, 41, 43—45). Ş.m. 7. Cl. VI. Burduja Gheorghe (E: 1816, 18, 20, 22, 24, 30, 31, 36, 52, 58, 66). Cl. VIII. Işoveanu Eugenia (E: 1816, 18, 30, 31, 34—37, 41, 248, 57, 67), Medaru Lizeta (E: 1816, 18, 24, 30, 35—37, 43, 45, 47, 248, 57). Cl. IX. Apetrei Aurică (5160, 67, 216, 24, 31, 48—50, 57, 59, 61, 67, 86), Joandrea Adrian (5160, 67, 202, 08, 24, 36, 48, 50, 57, 59, 61, 67, 70, 86), Melinte Elena (5160, 67, 89, 216, 21, 36, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 66, 70, 86), Markonski Geta (5160, 67, 208, 16, 24, 48, 50, 57, 59, 61, 66, 70, 74, 86), Golzstein Solo (5224, 31, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 70, 83, 86, 96). Cl. X. Sulimovici Solo (5238—51, 57, 59—61, 67, 70, 74, 83, 86). Absolvent **Rusu Constantin** (5162, 64, 65, 67—69, 81, 86, 203—05, 07—14, 21, 31, 36, 37, 39, 40, 44, 45, 47, 50, 81, 92—94).

INEU. Absolvent Alexe Ioan (5157—62, 67, 69, 89, 260).

LIPOVA. Ş.m. Cl. X. Vieru Dan (5207, 08, 12, 44, 46, 56, 57, 59, 67). Cl. XI. Pătrugan Victor (5163, 67, 76, 96, 98, 206, 07, 24, 46).

LONEA. Ş.m. Cl. X. Teleancă Pavel (5157, 60, 67, 69, 70, 75, 76, 86, 91, 202).

LUGOJ. Şc. de 8 ani nr. 3. Cl. VI. Orbulov Petru (E: 1816, 18, 20, 27, 28, 43, 48, 51). Cl. VII. Frenți Elena (E: 1816, 18, 20, 27, 28, 43, 46, 48, 49, 51). Ş.m. 1. Cl. VI. Ripan Iosif (E: 1816, 30, 31, 41, 43, 45, 55). Cl. VIII. Ambruș Mircea (E: 1802, 06, 07, 09—11, 14, 17, 24, 28, 29, 160, 65, 67, 74), Drinda Rodica (E: 1816—18, 24, 29, 30, 37, 103, 10, 210, 31, 36, 43, 48, 57, 61), **Jurca Ioan** (E: 1827, 30—32, 34—37, 40—43, 45, 47, 207, 10, 29, 31, 48—50, 56—62, 66, 67, 70, 74, 81, 83, 86, 92—94, 339, 43), **Popovici Cornel** (E: 1825, 27, 30—49, 51—53, 55, 56, 113, 57, 207, 08, 10, 12, 14, 29, 34, 38, 45, 48—50, 56—62, 64, 66, 67, 70, 74, 75, 81, 83, 86, 94, 96, 97—99, 305—07, 09, 11, 13, 14, 19, 27, 28, 32, 35, 39, 40—45, 48—51), Şerb Ioan (E: 1801—11, 13, 157, 60, 70, 74, 80, 83, 93, 95, 200, 02), Virog Ion (E: 1802—04, 06, 07, 09, 11, 30, 32, 37, 248, 57, 61, 62). Cl. IX. Popovici Mariana (5136, 216, 21, 24, 36, 48, 57, 59, 61, 62, 66). Cl. X. Boldea Bujor (5293, 302, 14, 15, 18, 19, 32, 35, 37, 43—45), Galenschi Ghlorghe (5247—53, 56—62, 64—68, 74, 81, 94—302, 05—09, 12—15, 17, 28, 32, 35—37, 39—41, 43—47, 49, 51). Absolvent Pupăzan Nicolae (5257, 60, 61, 67, 75, 89, 207, 09—11, 21, 24, 29, 31, 48—51, 57, 59—62, 66, 67, 70, 71, 81, 83, 85, 86, 96—98, 302, 12—15, 21). Cl. XI. **Boldea Ioan** (5214, 25, 27, 30—32, 39, 96—304, 06—21, 23—25, 27—52).

MĂRĂȘEȘTI. Ş.m. Cl. X. **Mincinopschi Gheorghe** (5193, 96, 99, 200, 07, 08, 10, 12, 14, 21, 24, 37—40, 42—46, 48—50, 56, 63, 64, 81, 84—86, 89, 92, 94—96, 98, 302, 05—08, 11—15, 19, 32, 34, 35, 37, 39, 41, 44—50). Cl. XI. **Anghel Vasile** (5193, 96, 214, 21, 45, 49, 50, 56, 61—63, 74, 81, 84—90, 95, 98, 302, 03, 05, 07, 08, 11—15, 19—32, 34, 35, 37, 41, 44, 47—50).

MĂGURENI. Şc. de 8 ani. Cl. VI. Habal Geza (E: 1843—45, 48, 49, 54, 55), Kovacs Hildegard (E: 1816, 20, 22, 30, 31, 36, 41), Raab Johanna (E: 1816, 20, 22, 30, 31, 36, 41).

MEDIAȘ. Ş.m. Cl. IX. Drăghici Horia (5160, 80, 216, 24, 31, 48, 51, 56, 57, 61).

MIERCUREA CIUC. Ş.m. Cl. VIII. Kolumban Imre (781, 83, 85, 87, 89), Kiss Gyorgy (781, 83, 85, 87, 89), Sandor Maria (769—72, 81, 83, 86—89), Szekely Sandor (781, 83, 86—89). Cl. X. Rabolt Erzsebet (796, 824, 27, 36, 40, 41, 44).

MIHĂIEȘTI (București). Absolvent Elian Codru (5207, 08, 10, 12, 14, 21, 23, 24, 29, 50, 57—61, 66, 69, 71, 81, 83, 85, 96, 97, 302, 12, 13, 17, 19, 21, 27, 34, 35, 43—45, 48), **Popa Ioan** (5248—51, 53, 54, 57—68, 70, 71, 73—75, 77, 81, 83, 85—89, 94—97, 300—02, 05—07, 09, 12—21, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 34, 35, 37—40, 42—51).

MIOARELE. Şc. de 8 ani. Cl. VI. Ştefănescu Petre (E: 1816, 18, 26, 28, 30, 31, 36, 41, 43, 45, 48).

MORENI (Ploieşti). Ş.m. Cl. VIII. Danciu Adrian (E: 1830, 31, 36, 43, 45, 47, 242, 57, 59, 61, 62, 66), Popescu Lucian (E: 1816, 22—24, 28, 29, 36, 37; 5212, 38, 42, 44, 57), Stiopu Cătălin (E: 1790, 801—11; 5193, 200), Tocan Gabriel (E: 1802, 03, 06—11, 16, 18, 30; 5257, 59).

NĂSĂUD. Ş.m. Cl. VIII. Soridonesi Valer (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 14, 24, 29, 30, 37; 5157, 59, 61). Cl. IX. Peleş Gheorghe (5207, 08, 21, 24, 29, 31, 36, 42, 48, 50, 59, 61, 67). Cl. X. Acu Dumitru (5189, 91—93, 95, 200, 07, 08, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 24, 29, 31, 32, 36, 40, 42, 44, 46, 48, 52, 53, 57—62, 64, 66, 67, 70, 74, 78, 81, 83, 86, 95). Cl. XI. Zăgreanu Marius (5207—12, 14, 21, 24, 26, 31, 32, 36, 48, 50—52, 57—66, 70, 75, 76, 78, 81, 83—86, 88, 89, 94, 96, 301—03, 05, 13, 19, 22, 34, 45, 49, 51).

NOVACI (Oltenia). Cl. IX. Anghel Petre (5212, 17, 21, 23, 24, 31, 38, 48—51, 57, 59, 61, 62, 74, 86); Costreie Doru (5212, 17, 21, 23, 24, 31, 38, 39, 42, 44, 48, 50, 51, 57—62, 66, 70, 74, 77, 86, 96, 97, 305, 13, 17, 27, 32, 39, 43, 45). Cl. X. Bejancu Aurel (5157, 60, 63—65, 67, 69, 70, 96, 202, 07, 08, 10, 12, 17, 18, 21, 23, 24, 31, 38—40, 42, 44—46, 48, 52, 56—62, 64, 66—68, 70, 71, 74, 81, 84—86, 95), Filiş Nicolae (5160, 63, 64, 69, 70, 77, 91, 93, 95, 207, 08, 10, 13, 17, 38, 42, 44—46, 56, 315, 44, 45). Absolvent Chiriac Ion (5207—11, 17, 18, 21, 24—26, 28, 30, 31, 36, 38, 39, 42, 45, 47, 53, 57—64, 67, 70, 74, 80—82, 85—88, 94, 302, 12, 15, 22, 34—36, 5742, 45, 50, 52).

OCNA MUREŞ. Ş.m. Cl. X. Oprea Ovidiu (5163, 65, 69, 70, 95, 98, 202, 07, 08, 10, 18, 42, 44, 57—60, 62).

ODOBEŞTI. Ş.m. Cl. VIII. Lupu Stela (E: 1801—03, 06—10, 14, 16—18, 20, 22—24, 29—31, 35—37, 41, 43, 45—48, 51, 83, 95, 231, 38, 42, 48, 49, 56, 57, 61, 62, 70, 96, 327, 45), Păncescu Adriana (E: 1809, 16, 24, 29, 30, 36, 37, 43, 45—47, 50—52, 248, 56, 57, 96, 328, 43, 45, 49).

ODORHEI. Ş.m. Cl. VIII. Kovacs Karolina (MFL: 765, 66, 83, 89, 90, 92).

ONEŞTI. Ş.m. Cl. X. Andrei Paul (5157, 63, 67, 69, 75, 76, 78, 83, 88, 89, 91, 93, 202, 06—08, 10, 14, 17, 18, 24, 29, 31, 34, 48—50, 52, 53, 56, 59—62, 66, 67, 70, 71, 74, 80, 83, 86).

ORADEA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Gabriş Traian (E: 1801, 02, 04—11, 15, 17; 5160, 74, 79, 93, 95, 200, 12, 16, 18, 31, 38, 42, 43, 70), Negruţiu Vasile (E: 1816, 18—25, 27—31, 35—37, 39—41, 43—45, 47, 49; 5160, 64, 66, 207, 08, 12, 24, 38, 39, 42—44, 48, 49, 57, 59, 61, 64, 70, 77, 344, 45), Popescu Dumitru (E: 1801—03, 06, 07, 09—11, 14, 15, 18, 24, 27, 29, 30, 36, 37; 5157, 65, 80, 93, 208, 38, 42, 43, 45), Tripa Ioan (E: 1816, 18, 19, 22, 23, 30, 39—41, 212, 38, 39, 42—44, 48). Cl. X. Toma Dragomir (5068, 81, 83, 86, 107, 08, 13, 17, 36, 46, 52, 53, 57, 60, 61, 63—65, 69—71, 75, 77, 80, 83, 85, 88—91, 93, 95, 98, 202, 07, 10, 14, 16—18, 21, 24, 31, 32, 36, 40, 42, 44, 48, 49, 52, 53, 57—62, 67, 70—72, 77, 78, 81, 83, 84). Ş.m. 4. Cl. VIII. Bălan Ion (E: 1801—03, 06—09, 11—15, 32; 5188), Fleischer Gheorghe (E: 1816, 18, 26, 28—30, 32, 35—37; 5216, 42—44, 48, 49, 57, 59, 61, 66). Cl. XI. Kiss Lajos (MFL: 840, 41, 43, 45, 47, 49, 50). Absolvent Abrudan Viorel (5158, 60, 61, 67, 207, 10, 48, 57, 59, 61, 70, 85, 86).

ORAVIŢA. Ş.m. Cl. VII. Florescu Florian (E: 1816, 18—20, 23, 24, 28, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 39—41).

ORAŞTIE. Ş.m. Cl. IX. Ştefan Aurel (5175, 93, 95, 212, 18, 36, 56, 59, 61, 62, 70, 74, 86), Ursu Ioan (5160, 64, 67, 75, 93, 95, 200, 08, 12, 16, 21, 24, 36, 39, 42—44, 48, 49, 57, 59, 61, 62, 64, 67, 70, 74, 81, 83, 86). Cl. X. Borza Ioan (5163—65, 75, 76, 86, 88, 90, 93, 95, 96, 98—200, 02, 07, 08, 10, 12, 14, 16—18, 21, 24, 29, 36, 38—40, 42—46, 48—53, 57, 59—62, 64, 64, 66, 67, 70, 74, 82, 83, 86, 95), Ionaşcu Miron (5160, 63, 64, 75, 93, 96, 200, 07, 08, 10, 12, 29, 39, 40, 42, 44—46, 48, 57), Şandru Victor (5160, 63—65, 90, 93, 96, 207, 08, 10, 12, 14, 16, 18, 29, 36, 39, 40, 42—46, 48, 50, 56, 57, 59, 61, 66, 67, 70, 86, 95, 302, 12—14, 41, 45), Viorel Costea (5186, 90, 96, 97, 212, 14, 16—18, 23, 24, 29, 31, 32, 34, 36—39, 43, 44, 46—52, 57—62, 64—68, 70, 71, 74, 77, 81—83, 86, 92—97, 301, 02, 05, 06, 08—13, 15, 18, 19, 27, 35, 37, 41, 43—45, 47, 49), Voiculescu Dan (5162—66, 93, 95, 96, 207, 08, 10, 12, 39, 40, 42—46).

OŢELUL ROŞU. Ş.m. Cl. VII. Biriş Laurenţiu (E: 1801—03, 06—09, 11, 16, 24, 30, 36), Fiat Mircea (E: 1829, 30, 32, 36, 44, 49, 55; 5231, 44, 318, 45, 49), Stănescu Dan (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 11, 14, 5157, 93, 95). Cl. X. Miklos

Gheorghe (5070, 96, 110, 63, 67, 69, 70, 95, 98, 208, 48, 53).

PANCIU. Ş.m. Cl. VI. Minculescu Mihai (E: 1801—06, 08), Purice Valeriu (E: 1802—04, 11, 20, 26, 35). Cl. X. **Zamfir Ion** (5157—61, 63—65, 67—70, 72—76, 78, 80, 81, 83—86, 88—93, 95, 96, 98, 200, 03, 07, 08, 10—14, 17—28, 30—32, 36, 38—40, 42—45, 48—54, 56—64, 66—75, 78—91, 65, 96, 98—300, 02, 05, 07—09, 12—15, 18, 19, 31, 32, 34—37, 39—41, 43—45, 49, 51, 52).

Absolvent Matei Mihai (4986, 90, 5024, 27, 32, 51, 63, 207—10, 85, 86, 302, 13, 15, 34, 37, 44).

PAŞCANI. Ş.m. Cl. X. Marcu Lidia (5167, 248, 51, 57, 59, 61, 62, 67, 70, 86), Pavel Iuliana (5167, 202, 18, 44, 48, 49, 51, 58, 59, 61, 62, 67, 70, 86).

PĂUNEŞTI (Adjud). Şc. de 7 ani. Cl. VI. Berbece Ana (E: 1811, 16, 18, 30, 32; 5214), Cantiş Gheorghe (E: 1801, 06, 12, 21, 30, 32), Popa Elena (E: 1804, 06, 20, 26, 28, 32). Cl. VII. Anghel Costel (E: 1807, 18, 28, 30, 32, 36, 37; 5193, 202, 14), Anghel Lenuţa (E: 1790, 92, 93, 98, 807, 06, 16, 20, 26), Berbece Maria (E: 1801, 05, 08, 09, 11, 122, 26, 28, 5180, 202), Cantiş Vasile (E: 1807, 10, 24, 30, 32, 36, 37, 39; 5180, 257), Mania Tatiana (E: 1809, 10, 24, 30, 32, 35—37, 39—41), Mocanu Aurora (E: 1807, 09, 10, 23, 30, 32, 36, 37, 40, 41, 5180), Nica Costică (E: 1811, 13, 14, 16, 26, 32, 36, 37, 40, 5193, 202), Sandu Viorica (E: 1801, 08, 11—13, 16, 20, 26, 28).

PECINEAGA. Absolvent Moldovanu Tudor (5175, 80, 85, 86, 202, 07—11, 16, 24).

PETROŞENI. Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. VII. Popa Lucia (E: 1816, 18—24, 26—31, 34, 36—38, 40, 43—47, 49—53, 56). Şc. de 7 ani nr. 4. Cl. VII. Erdely Klara (MFL: 781—91). Ş.m. Cl. IX. Goldstein Beniamin (5189, 91, 202, 14, 34, 48—51, 57—59, 61, 62, 66, 70, 71, 74), Lepădatu Ioan (5110, 12, 16, 36, 39, 60, 67, 80, 5208, 24), Manea Dinel (5160, 65, 67, 5221, 24, 44, 70, 71, 74, 88), Orlov Zinaida (5221, 24, 39, 42—44, 48, 70, 71, 74, 86, 317, 27, 45), **Popa Radu** (5068, 69, 71, 109, 12, 13, 23, 35, 39, 41—43, 50, 52—55, 57—65, 67, 69, 75, 88, 93, 95, 96, 200, 03, 07—10, 12, 17, 18, 39, 40, 42, 44—46, 48, 50, 51). Cl. X. Hîndorean Viorel (5157, 60, 63, 65, 67, 69, 71, 85, 88, 93, 95, 99, 200, 02, 07, 08, 10, 12, 14, 21, 24, 31, 36, 37, 39, 40, 42—45), Precul Maria (5207, 08, 10, 24, 48, 56, 57, 59, 61, 67, 83).

PIATRA NEAMŢ. Ş.m. 1. Cl. IX. Gaşparic Călin (5248—51, 57, 59, 61, 70, 71, 81, 83, 86, 98, 99). Ş.m. 2. Cl. X. Teodorescu Voltaire (5160, 63, 64, 98, 207, 10, 16, 48, 55, 95). Cl. XI. Breişter Ştefan (5157, 67, 69, 207, 08, 21, 24, 31, 40, 42, 44—46, 48, 60—62, 67, 70, 95).

PITEŞTI. Ş.m. 1. Cl. V. Cernătescu Carmen (E: 1811, 20, 22, 30, 31, 36). Cl. VII. Drăghici Miron (E: 1816, 18, 20, 24, 27, 30, 36, 37, 41, 207), Neagoe Victor (E: 1801—13, 16—25, 28, 29, 5160, 67, 80, 83, 89—93, 95, 202, 24, 31, 38, 42, 44). Cl. IX. Constantinescu Adrian (5110, 12, 16, 18, 20, 21, 26, 29, 30, 40, 41, 44, 49, 50, 53, 60, 64), Dobrescu Dumitru (5103, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 39, 41, 52, 55, 60, 67, 75, 93, 95, 5138, 39, 42, 44, 57, 59, 62, 70, 85), Păunescu Gheorghe (5160, 70, 208, 24, 31, 39, 44, 48, 50, 51, 57, 59, 61, 70, 86), Ştefănescu Mircea (5160, 67, 70, 83, 208, 18, 24, 31, 48—51, 56—62, 70, 71, 74, 86, 96, 97, 343). Cl. X. **Mărgineanu Doru** (5207, 08, 10—12, 16—18, 31, 32, 36—40, 42—46, 48—50, 52, 53, 56—62, 64—67, 70, 71, 81, 82, 86, 92, 93, 95, 96, 98, 313, 15, 18, 28, 32, 37, 39, 40, 43—46, 47). Ş.m. 2. Cl. X. **Andreescu Marian** (5207, 08, 10, 17, 21, 24, 31, 48, 50, 56—62, 64, 67, 70, 81, 83, 86, 96, 98, 302, 06, 07, 10—13, 15, 18, 28, 32, 35, 37, 49, 51), **Petrescu Margareta** (5162, 76, 80, 86, 96, 207—10, 14, 16, 17, 21, 23, 24, 29, 31, 36, 44—46, 48—53, 57, 59—62, 64, 66, 67, 70, 74, 81, 83, 86). Cl. XI. **Ianeu Ion** (5218, 35, 36, 49, 50, 53, 56—62, 64, 67, 70, 71, 77, 79, 86, 95, 96, 98, 301, 02, 05, 07, 12, 13, 15, 32, 37, 43, 44). Ş.m. 3. Cl. IX. Grigorescu Ionel (5157, 60, 64, 67, 69, 93, 95, 200, 08, 12, 16, 17, 21, 24, 31, 36, 38, 39, 42—44). Cl. X. **Diaconu Nicolae** (5157—60, 63—65, 67, 69, 70, 76, 88, 93, 95, 98, 202, 07, 10, 12, 16, 21, 24, 29, 31, 36, 40, 42—46, 48, 49, 53, 58—62, 67, 70, 77, 81—83, 86, 90, 95). Cl. XI. **Zamfir D. Corneliu** (5157—60, 62, 65, 67, 68, 81, 88, 90, 94, 95, 97, 207—12, 14, 17, 23, 27, 31, 32, 36, 37, 40—48, 50, 51, 55, 57—59, 61—63, 66, 67, 70, 71, 74, 78, 81, 83, 85—87, 94, 95), **Stancu M. Ion** (5208, 14, 17, 18, 20, 21, 25, 29, 30, 37, 39—41, 44—52, 54, 55, 57—67, 70, 73—75, 81, 83—88, 92—95). **Absolvent Stancu Ion** (5213, 15, 19, 23, 27, 28, 32, 33, 35, 38, 43, 53,

56, 68, 71, 76, 78, 83, 89, 91, 96, 98, 302, 03, 05, 07, 08, 11—16, 19, 24, 30, 31, 38, 40, 42, 44, 45, 49, 52).

PLOIEŞTI. Şc. elem. nr. 1. Cl. V. Brener Mircea (E: 1802, 06, 08, 11, 18, 22, 27). Şc. de 7 ani nr. 4. Cl. VII. Andreescu Ioan (E: 1836, 37, 40, 42, 43, 46, 47, 50). Ş.m. 1. Cl. VIII. Dăscălescu Adrian (E: 1816—18, 23—29; 5208, 26, 31), Vasilescu Ion (E: 1833, 35, 37, 40; 5248, 49, 57—62, 64, 67, 70, 71, 77, 79), Zosa Dan (E: 1816—19, 22—24, 26, 28—30, 32, 35—37, 39, 41, 43—47, 51—53, 56, 224, 31, 42, 44, 48, 49, 57—59, 61, 66, 70, 71, 305, 39, 45). Cl. IX. Enescu Sorin (5130, 36, 50, 55, 64, 65, 77, 86, 89, 93, 95, 204, 12, 18, 21, 24, 31, 36—38, 42—44, 48, 50, 51, 56, 57, 59, 61, 63, 64, 74, 83, 86, 92), Leonte Filip (5207, 17, 24, 28, 48, 50, 51, 57, 61, 70, 86, 343). Cl. X. Apostoleanu Anca (5161, 64—66, 69, 70, 75, 77, 83, 88, 207, 08, 10, 21), Aisner Sergiu (5158, 59, 61, 62, 64, 72, 74, 76, 77, 85, 86, 90, 92, 95, 96, 98—200, 03—05, 10, 14, 16, 18, 35, 38, 40, 43, 45—53, 56—62, 64—67, 70—72, 74, 77, 79, 81, 83—86, 89, 92—94, 96—209, 05—09, 11—15, 17—19, 27, 32, 35—37, 43—45). Barbu Vasile (5157—60, 62, 63, 65, 67, 69, 79, 93, 95, 96, 200, 07, 08, 10, 12, 24, 38—40, 42, 44—46, 50, 57, 59—62), Grigorescu Dan (5127, 60, 75, 207, 08, 31, 48, 57, 62, 66, 67, 70), Grecul Letiţia (5157, 214, 24, 48—50, 57—59, 74), Pîrvulescu Constantin (5157, 58, 72, 76, 77, 85, 86, 88, 90—93, 95, 96, 98, 200, 03, 05, 07, 08, 10, 12, 14, 16, 21, 24, 29, 31, 32, 36—40, 42—46, 48—53, 56, 58, 67, 81), Pîrvu Alexandru (5207, 08, 10, 24, 40, 46, 48, 57, 61, 62, 313, 44), Weissmann M. (5160, 63—65, 70, 72, 75—77, 80, 83—86, 88—93, 95, 96, 98, 200, 02, 03, 07, 08, 10, 14, 16—18, 21, 24, 29—31, 37, 42, 44, 46, 48, 56—60, 62—64, 70, 71, 77, 79, 81, 83, 84, 89, 92—94, 96—300, 02, 05—08, 11—15, 18, 19, 27, 32, 35—37, 43—45). Ş.m. 2. Cl. VIII. Ionescu Nelly (E: 1816, 17, 22, 23, 28, 32, 36, 37, 43, 45, 47; 5242, 43, 57, 61, 62, 70), Radu Dorel (E: 1820, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 36, 37, 43, 47, 48), Strul Adam (E: 1770, 71, 800, 02, 03, 06, 07, 09, 13, 18, 24, 30, 32, 37, 39, 41). Ş.m. 3. Cl. VIII. Brenner Paul (E: 1801, 03—05, 07, 09, 10, 13, 16, 19—21, 23, 24, 26, 29—31; 5193, 95, 200, 16, 38, 42—44). Cl. IX. Luca Octavian (5157, 60, 64, 65, 67, 70, 75, 79, 86, 89, 93, 95, 208, 12, 17, 18, 21, 29, 31, 34, 39, 43, 44). Cl. X. Georgescu Cristian (5207, 08, 10, 12, 17, 18, 21, 24, 31, 34, 36, 38—40, 42—46), Profeta Lazăr (5236, 42, 44, 50, 54, 61, 62, 70, 83, 86, 343, 45). Ş.m. 4. Cl. X. Glova Mihai (5157, 60, 67, 70, 75, 80, 83, 85, 86, 92, 202). Cl. XI. Bădulescu Ion (5157, 202, 14, 24, 31, 48, 59, 60, 61, 66, 70)

PREDEAL. Ş.m. Cl. VII. Ioniţă Maria (E: 1801—13, 16—24, 26, 28—32, 35—37, 42—47; 5212, 16, 18, 31, 38, 42, 44, 48, 49, 57—59, 61, 62, 66, 70, 96, 97, 343, 45). Cl. IX. Cardaş Vladimir (5248—51, 57—60, 62, 64, 70, 71, 79, 86, 95). Cl. XI. Boroş Andrei (5175, 207—12, 40, 42, 44, 45).

PRUNDUL BIRGAULUI. Ş.m.m. Cl. VI. Forfotă Mihaela (E: 1801—06, 08, 11). Cl. VIII. Blaga Dorin (E: 1816, 18, 24, 29, 31, 35—37, 41, 42, 45, 47; 5248, 66, 70).

PUCIOASA. Ş.m. Cl. VII. Vasilescu Nicolae (E: 1816, 28, 30, 36, 37, 41, 43, 45, 48, 55). Cl. VIII. Bîrlog Corneliu (E: 1816, 23, 24, 30, 35—37; 5160, 208, 44, 48, 57—59, 61, 70), Brezeanu Ion (E: 1802, 03, 06, 11, 24, 30, 32, 35—37, 41; 5257, 61), Comănoiu Emilia (E: 1790, 98, 802, 03, 06, 27, 28, 30, 36, 37), Diaconescu Nădejde (E: 1814, 29, 30, 35, 37, 43, 47; 5242, 48, 70, 343, 33), Marcu Constantin (E: 1807, 09, 11, 24, 35—37; 5248, 59, 61), Nuţă Elena (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 11, 16, 30, 36, 37; 5248), Tache Ion (E: 1802, 03, 06—09, 16, 23, 30, 41), Vasilescu Ion (E: 1816, 23, 26, 28, 30, 32, 33, 37, 39, 41, 43, 45, 48, 55), Zegheru Gheorghe (E: 1805, 10, 13, 16, 18, 23, 24, 28, 30, 32, 35—37; 5160, 93, 209, 44, 48, 58, 59, 61, 66). Cl. IX. Banu Gheorghe (5072, 109, 10, 12, 14—18, 21—23, 25, 26, 29, 31, 35, 39, 41, 43—45, 55, 58, 60, 61, 63—65, 67, 70, 75, 76, 85, 88, 91, 93, 95, 96, 202), Gujbă Marilena (5164, 75, 202, 08, 24, 42, 44, 45, 61, 62), Măciucă Ion (5175, 207, 08, 12, 14, 21, 24, 31, 39, 42, 44, 48—51, 57), Spătaru Aurel (5157, 60, 67, 69, 75, 79, 80, 88, 93, 95, 200, 02, 08, 12, 16, 17, 21, 24, 31, 38, 42—44, 48—51, 56—62, 64, 66, 70, 71, 77, 81, 86). Cl. X. Chivoiu Mihail (5256—62, 66, 67, 70, 95), Ionescu Theodora (5207, 08, 48, 53, 56—60, 62, 66, 70), Levitchi Cezarina (5157, 60, 63—65, 67—69, 75, 96, 207, 08, 10, 57, 61, 67), Lupu Victor (5208, 45, 46, 48, 57, 60, 61, 67, 95, 307, 15), Rîmbu Revişoara (5170, 71, 76, 93, 99, 202, 48, 57—62, 66, 67), Tîlvan Nicolae (5157, 59, 62, 63, 65, 69, 70, 86, 93, 96, 200, 09, 12, 38—40, 44—46.

56, 59, 60, 62, 64, 67, 74, 86, 90. 95), Tufan Cecilia (5207, 08, 10, 48, 53, 56—62, 66, 70).

RĂDĂUȚI. Ș.m. 1. Cl. X. Tudose Mircea (5160, 83—91, 202, 07, 08, 14, 24, 31, 52, 63, 67, 70, 81). Ș.m. 2. Cl. VIII. Siriu Virgil (E: 1802, 06, 07, 09, 10, 24, 32, 35, 37, 231, 57, 61, 70), Weinstein Jack (E: 1801—14; 5160, 63, 65, 83, 93, 95, 200, 02). Cl. XI. Kümmel Jacob (5160, 202, 14, 17, 24, 31, 38, 49, 57—62, 66, 70).

REGHIN. Ș.m. 2. Cl. VIII. Orbani Gyorgy (748, 71, 76, 77, 82, 89, 91, 92),

REȘIȚA. Absolvent Boiangiu Corneliu (5109, 11, 13, 17, 21, 22, 41, 52, 57—62, 67, 209—12, 24, 31, 36, 38—42).

RIMNICU SĂRAT. Ș.m. 1. Cl. IX. Fănică Mircea (5157, 60, 64, 67, 95, 217, 24, 70, 74, 93, 339). Cl. X. Tutunea Neculai (5157, 63, 65, 67, 75, 210, 21, 24, 38, 44). Absolvent Soaită Ileana (5210, 48, 57, 58, 60—62, 67, 70, 74, 85). Ș.m. 2. Cl. VIII. Diaconescu Emil (E: 1816, 18, 29, 30, 35, 37; 5248, 61, 62, 70), Vrabie Mirela (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 10, 16, 23, 30, 36).

RIMNICU VILCEA. Ș.m. 1. Cl. VIII. Tigmeanu Ion (E: 1820, 22—24, 26, 30, 32, 35—37, 40, 41, 43—45, 47, 49, 53, 56; 5216, 21, 48, 49, 61). Cl. X. Solea Marcel (5157, 67, 88, 89, 207, 08, 48, 57, 59, 61, 66, 67, 70, 85), Tănase Ilie (5160, 67, 75, 80, 202, 07, 08, 10, 24, 31, 48, 57, 59—62, 66, 67, 70, 80). Ș.m. 2. Cl. VIII. Droașcă Bogdan (E: 1830, 31, 35—37, 43, 45; 5195, 248, 49), Marinov Cornel (E: 1817, 18, 23, 35; 5119, 38, 42, 43, 49, 57). Cl. XI. Neghină Adriana (5157, 60, 63, 69, 70, 73, 76, 77, 93, 98, 200, 02).

ROMAN. Liceul mixt. Cl. X. Bîrjoríanu Dumitru (5207, 08, 10, 12—14, 16, 18, 21, 24, 29, 31, 39, 40, 42, 45, 46, 48, 49, 52, 53, 57—62, 64, 66, 67, 70, 74, 75, 77, 83, 95) Cl. XI. Niculescu G. (5109, 36, 57, 59—61, 75, 76, 80, 83, 86, 88, 91, 202, 06). Absolvent Dumbravă Vasile (5157—62, 67, 69, 75, 207—12, 36, 38, 42, 44, 47, 50, 59, 61, 62, 64, 74, 86), Segal Akiba (5248—51, 54, 55, 57, 59—63, 66, 67, 74, 78, 81, 83, 85, 88).

RUGĂNEȘTI. Șc. de 7 ani. Cl. VII. Andras Margit (MFL: 781, 86, 87, 91).

RUPEA. Ș.m. Ștefan O. Iosif. Cl. VIII. Diaconescu Nicolae (5014, 67, 72, 74, 100, 03, 05, 08, 09, 21, 22, 25, 35, 41, 43, 50, 53, 57, 63, 64, 67, 69, 88, 207, 08, 10, 12, 21, 22, 24, 29, 39, 40, 43—45). Cl. IX. Șchiopu Viorica (5170, 208, 48—50, 57, 62, 66, 74, 86).

SALONTA. Ș.m. Cl. VIII. Olar Aurel (E: 103, 16, 30, 32, 35—37, 80; 5202). Cl. X. Nagy Elvira (5208, 10, 24, 29, 57, 60, 61, 70, 71, 74, 86).

SALCIA. Șc. de 7 ani. Cl. VII. Dună Iancu (E: 1816, 17, 23, 24, 28, 35, 37, 46, 56).

SATU-MARE. Șc. de 7 ani nr. 8. Cl. VI. Varga Somogy Nemere (MFL: 769, 70, 80, 81, 83, 84, 89, 91). Ș.m. M. Eminescu. Cl. VIII. Mozes Robert (E: 1801—07, 09, 29, 30, 35, 37). Cl. X. Aniţaș Lucian (5212, 24, 29, 31, 48, 50, 56, 59, 61, 67), Litan Ioan (5157, 60, 63—65, 69, 70, 75, 93, 98, 207, 08, 39, 40, 42, 45, 46), Mihălțeanu M. (5160, 81, 202, 07, 08, 24, 46, 52, 57, 59), Neamț Gavril (5212, 14, 18, 21, 29, 38—40, 43, 48, 57—61, 64, 67), Oșan Adrian (5163—65, 75, 91, 93, 95, 212, 46), Pop Nicolae (5160, 63, 64, 67, 207, 08, 10, 42, 44), Șabău Ștefan (5157, 60, 64, 65, 67, 69, 70, 75, 95, 96), Timoc Ioan (5157, 60, 63, 67, 70, 75, 93, 96, 208). Ș.m. Kolesiy Ferenc. Cl. VIII. Strulyovics Zoltan (E: 1817, 18, 23, 24, 29—31, 35—37). Cl. IX. Samuel Iudita (5160, 75, 79, 80, 217, 21, 24, 31, 34, 68, 70, 71, 74, 86). Cl. X. Abșan Liliana (5160, 63—67, 69, 93, 95, 200), Szekely Maria (5160, 67, 69, 75, 88, 207, 08, 10, 52, 53), Zeicu Ileana (5160, 63—67, 69, 93, 95, 96, 98, 200).

SAVENI. Ș.m. Cl. VIII. Andrei Mircea (E: 1823, 30, 31, 35—37. 5193, 200, 42). Cl. X. Mihalache Vasile (5160, 63, 67, 207, 08, 10, 12, 16—18, 24, 31, 38—40, 42—46, 48—50, 57—62, 64, 67, 70). Cl. XI. Enache Ioan (5170, 75, 207, 08—11, 21, 24—26, 31, 36, 48—50, 57, 59, 61, 67, 70, 74, 81, 83, 85), Onu Vasile (5157, 61, 67, 94, 207—12, 17, 18, 21, 24—27, 31, 36—49, 51—54, 56—65, 67, 70, 71, 73, 80, 81, 83—90, 94, 334, 35).

SĂLIȘTE. Șc. de 7 ani. Cl. VII. Juga Gavrilă (E: 1807, 09, 13, 30, 32, 35—38, 40).

SEBEȘ. Ș.m. Cl. VIII. Sava Maria (E: 1802, 03, 06—10, 13, 16, 17, 23, 30—32, 36, 5248).

SF. GHEORGHE. Ș.m. 1. Cl. VIII. Szocs Jozsef (MFL: 747—49, 81, 89, 91). Ș.m. 2. Cl. VI. Szasz Gyorgy (MFL: 781, 86, 89—92). Cl. VIII. Gojai Maria (MFL: 772, 73, 75, 81, 82, 86, 87), Gyongysi Gabriela (MFL: 771, 73, 75, 81, 82, 86, 87), Rakossy Zoltan (MFL: 772—75, 81, 82, 86, 87).

SIBIU. Șc. de 8 ani nr. 12. Cl. VI. Nicu Maria (E: 1816, 20, 23, 26, 31, 33, 34, 36, 39, 40, 43, 48, 51—53).

Şc. de 8 ani nr. 15. Cl. VIII. Herlea Andrei (E: 1816—20, 22, 24, 28—30, 33, 35—37, 40, 42, 43, 45, 47, 51—53, 56). Ş.m. 1. Cl. VIII. Rădoi Oliviu (E: 1816, 20, 22, 24, 30, 35, 37, 43, 45, 47, 5252). Cl. X. Erdely Eugen (5160, 63, 67, 70, 93, 202, 03, 05, 07, 08, 10, 24, 29, 40, 45, 53, 61, 66, 92, 93), Geleriu Liviu (5157, 63, 65, 93, 207, 08, 39, 44—46, 61). Ş.m. 2. Cl. VIII. Dăncilă Gheorghe (E: 1810, 11, 14, 16, 18, 29—31, 34—37). Cl. X. **Gherban Doru** (5207, 08, 10, 12—18, 21, 24, 31, 34, 39, 40, 42, 44—46, 48—53, 57—62, 64—68, 70, 71, 74, 77, 81, 83, 86, 95). Ş.m. 3. Cl. VIII. Boac Monica (E: 1778, 804, 12—14, 16, 18, 20—22, 27, 30—32, 35—37, 4904, 5231), Bucur Liliana (E: 1802—04, 06, 10, 11, 13, 16, 17, 23, 24, 32, 37, 5145, 93, 202, 16, 31, 42, 48), Constantinescu Constantin (E: 1816, 18, 20, 23, 24, 29, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 41, 42), Dinulescu Aurelian (E: 1801—03, 07, 09, 10, 13—16, 18—23, 25, 26, 28), Dobrotă Marilena (E: 1824, 30, 35—37, 40, 43, 45, 47, 53, 5241, 59), Elefterescu Mihai (E: 1809, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 48, 5208, 56, 58, 60, 62), Filip Mihaela (E: 1801—04, 06, 07, 09, 16, 18, 5193, 208, 42), Gîlea Doina (E: 1801—03, 06—11, 14—16, 23, 24, 26, 28—30, 35—37, 41, 5193, 242, 59, 61, 70), Ghisoiu Carmen (E: 1816, 19—23, 27, 32, 36, 37, 39, 41, 43—48, 80, 5242), Holandu Doina (E: 1830, 31, 33—41, 43—47, 49—53, 56, 5270, 327, 28, 49), Loşiţă Ileana (E: 1822—30, 32, 35—37, 40, 47), Mărtinuş Şt. (E: 1801—04, 06—11, 15, 16, 29, 30, 5174), Munteanu Rodica (E: 1813, 15, 17, 18, 23, 24, 26, 29, 30, 31, 35—37, 5193, 257, 59, 61), Năstoiu Aneta (E: 1816, 14, 19, 22, 23, 32, 36, 37, 43, 45, 46, 47, 5216, 42, 48, 57, 71, 97), Ostar Ioan (E: 1801—03, 06—11, 16, 18, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 33, 35—37, 39, 41, 5193, 242, 39, 57, 59, 61, 70), Popescu Adriana (E: 1824, 28, 31, 35, 36, 37, 39, 41, 5231, 38, 56, 57, 59, 61, 66, 70), Stroe Florea (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 16, 18, 30, 35, 36, 37, 41), Tempea Mircea (E: 1802—04, 06—10, 14, 16, 18, 23, 24, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 41, 5216, 17, 38, 42, 44, 61, 67, 71). Cl. IX. Artimon Doina (5214, 24, 31, 48, 49, 50, 57, 59, 61, 86), Voicescu Smaranda (5208, 17, 48, 49, 51, 59, 62, 70, 74, 86). Cl. X. Manea Octavian (5157, 60, 63, 65, 66, 67, 69, 73, 76, 91, 96, 98, 202, 07, 08, 10, 12, 14, 40, 45, 46, 52, 53, 64, 67, 95). Şc. superioară. Burtan B. (5158, 71, 79, 88, 207, 10, 24, 29, 37, 38, 59, 60, 61, 66).

SIGHET. Ş.m. 1. Cl. IX. Iacobovici Maria. (5157—59, 65, 67, 70, 93, 95, 202, 08, 10, 31), Moldovan Constantin (5170, 75, 208, 21, 24, 31, 36, 48, 57, 59, 62). Cl. X. Bereş Antal (MFL: 824, 26, 27, 35, 39—43). Cl. XI. Elek Anna (MFL: 840—45, 51, 52, 5207, 08, 09, 10, 11, 16, 18, 24, 30, 31, 36).

SIGHIŞOARA. Ş.m. 1. Cl. VII. David Deszo (MFL: 781, 82, 84, 86, 87), Kővecsi Lidia (MFL: 782, 84—87, 91), Kopan Sandor (MFL: 781—84, 86, 87, 89, 91, 92), Nagy Emma (MFL: 781, 82, 84, 85, 87).

STRĂOANA. Şc. elem. de 7 ani. Cl. VII. Frunză Mihai (E: 1816, 18, 20, 24, 30, 31, 35—37, 43, 45).

STREHAIA (Oltenia) Ş.m. Cl. IX. Basica Manuela (5208, 24, 50, 57—59, 61, 62, 74, 86), Cl. X. Mîndreanu Eugen (5208, 12, 17, 21, 24, 38, 39, 42, 43, 44, 57, 59, 70, 74, 84).

SUCEAVA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Costachievici Sorin (E: 1802, 06, 10, 23, 24, 33, 37, 5238, 48, 49).

TOPOLOVENI. Ş.m. Cl. X. **Bădulescu Grigore** (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18—26, 29, 31, 35, 39—41, 43, 44, 46, 49, 60, 63—65, 67, 69, 73—76, 93, 95, 96, 200, 02, 07, 08, 10, 12, 14, 17, 24, 31, 38, 40, 42—46, 48—53, 56—62, 66, 67, 77).

TECUCI. Ş.m. 1. Cl. X. Şotropa Dan (5207, 08, 24, 48, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 70, 302, 09, 13). Ş.m. 2. Cl. VIII. Oprişan Teodor (E: 1843—45, 47, 48, 50—53, 55, 56), Purcaru Octavian (E: 1802, 03, 06—09, 11, 13, 29, 30, 32, 35—38; 5193, 270). Cl. X. Adam Ionel (5208, 12, 17, 18, 32, 35, 43, 44, 49, 50, 56, 60, 61, 68, 71, 74, 3131, 45, 51), Niculescu Dan (5208, 17, 24, 36, 43, 49, 50, 59, 61, 66, 74, 84), **Tătar Ioan** (5207—10, 12, 17, 18, 24, 27, 31, 36, 43—45, 49, 50, 56, 58, 60—62, 66, 68, 71, 74, 77, 83, 98, 99, 302, 12, 13, 15, 17, 45, 50, 51).

TIRGU JIU. Ş.m. 1. Cl. VIII. Bănică Marian (E: 1818, 19, 22—24, 27—29, 35, 37). Cl. X. Şchiopu Constantin (5160, 107, 08, 10, 24, 31, 45, 48, 61, 70). Ş.m. 2. Cl. IX. Văcaru Vasile (5110, 16, 18, 20, 23, 60, 67, 93, 208—11, 21, 29, 34, 42, 48—51, 57, 59, 66, 86). Cl. XI. **Păsărcanu Dan** (5207, 08, 10, 12, 17, 24, 38, 40, 42, 44, 45, 48, 53, 57—62, 64, 67, 70, 81, 83, 95, 96, 97, 98, 302, 13, 15, 35, 36, 37).

TIRGU CĂRBUNEȘTI. Ș.m. Cl. IX. Bularda Justin (5160, 67, 224, 39, 42, 44, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 66).

TÎRGU LAPUȘ. Ș.m. Cl. VIII. Sraum Adalbert (E: 1816, 23, 24, 29, 30, 35, 37, 41, 5218, 32, 42, 44), Toma Nicolae (E: 1816, 24, 30, 31, 35, 36, 37, 41, 5242, 44, 70).

TÎRGU MUREȘ. Ș.m. **Bolyai Farkas.** Cl. VIII. Bramsch Gyorgy (MFL: 770, 72, 75, 81, 87, 89). Cl. X. Dalay Pal (MFL: 839—45, 47—49).

Ș.m. **Al. Papiu-Ilarian.** Cl. VIII. Pop Mircea (E: 1801—03, 06, 07, 29, 30, 31, 35—37), Stratan Valentin (E: 1801—11, 16—19, 22—24, 26—32, 34—37, 41, 43—47, 49, 50, 52, 5216, 48, 57, 59—62, 66, 70, 96, 97, 311, 13, 27).

TIMIȘOARA. Ș.m. 1. Cl. IX. Deheleanu Dorin (5157, 60, 249, 50, 51, 57, 67, 70, 74, 86). Cl. X. **Andru Dorina** (5196, 107, 08, 10, 12, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 39, 40, 43, 44—46, 49, 50—53, 56—62, 64—67, 70, 74, 78, 83, 96—98, 301, 02, 41, 44, 45), **Catalina Ion** (5157, 64, 69, 70, 80, 81, 90, 214, 17, 23, 24, 31, 38, 43, 48—50, 52, 53, 56—62, 64, 66, 67, 70, 86, 95, 311, 13, 27, 35, 37, 43, 45), **Rujan Octavian** (5157, 58, 60, 61, 69, 74, 75, 80, 86, 88, 91, 96, 207, 08, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 27, 29, 31, 32, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49—53, 56—62, 64—67, 70, 71, 74, 75, 77, 78, 81—86, 90, 92, 93, 95, 96, 98, 302, 05, 07, 12—15, 17, 18, 27, 28, 39, 41, 44, 45, 50), **Stern Toma** (5211, 14, 16, 17, 18, 25, 27, 29, 31, 32, 36, 37, 38, 43, 49, 51, 53, 56, 57, 60, 62, 64, 65, 66, 67, 70, 72, 75, 77, 78, 85, 86, 92, 95, 97, 98, 301, 02, 07, 12, 14, 35, 44, 45, 49, MFL: 878, 79, 81, 82, 88, 92). Cl. XI. Triponescu Ion (5207, 08, 10, 24, 42, 45, 48, 52, 57, 60, 61, 67).

Ș.m. 2. Cl. VIII. Deheleanu Dan (E: 1801—04, 06, 07, 08, 09, 11, 15). Cl. IX. Popescu Violeta (5165, 70, 95, 242, 48, 50, 57, 61, 62, 65, 74, 84, 86). Ș.m. 5. Cl. X. Eibenschutz Robert (5207, 08, 10, 12, 22, 24, 38, 40, 42, 44—46, 47, 50, 56, 57, 59, 61). Ș.m. 7. Cl. VIII. Dobrescu Mariana (E: 1807, 08—11, 13, 17, 20, 22—24, 26, 28, 29, 5224, 31, 48).

TÎRGOVIȘTE. Ș.m. 1. Cl. XI. Brînzaru Irinel (5207, 08, 10, 16, 24, 31, 48, 49, 50, 57, 59, 61, 62, 67). Ș.m. 2. Cl. VIII. Erlich Octavian (E: 1807, 09, 10, 29, 35, 37, 5180, 248, 61, 62). Cl. X. Zamfira Ioan (5160, 63, 67, 207, 08, 40, 42, 48, 56, 57, 59). Ș.m. 3. Cl. VIII. Istrate Paul (E: 1830, 31, 35, 37, 42, 5208, 38, 48, 49, 57, 56, 58, 70), Niculescu Constantin (E: 1818, 19, 28, 30, 32, 36, 37, 39, 41, 5231, 43, 49, 59, 61). Cl. IX. Florea Rodica (5208, 17, 21, 24, 34, 36, 39, 44, 61, 67, 74, 86), Ionescu Mircea (5157, 60, 64, 65, 75, 83, 93, 99, 5200, 08, 12, 18, 21, 24, 31, 34, 30, 38, 42, 43, 44, 57, 61). Cl. X. Grigorescu Nicolae (5208, 16, 17, 24, 31, 38, 44, 48, 50, 57, 61, 62, 64, 66, 93), Tudor Radu (5157, 60, 63, 64, 69, 70, 80, 93, 207, 08, 20, 21, 24, 29, 38, 42, 45, 48, 57, 58, 59, 60, 61, 67, 69, 70, 79, 95). Ș.m. serală. Cl. VIII. Vișan Titu (E: 1802, 06—11, 14, 17, 22, 23, 24, 29, 35, 37). **Absolvent Migdalovici Marcel** (5248—63, 66, 67, 70, 71, 74, 77, 81, 83, 85, 86, 88, 96, 97, 301, 02—04, 12—15, 18, 19, 27, 30, 33, 34, 35, 49—51).

TÎRNĂVENI. Ș.m. Cl. VIII. **Mățieș Doru** (E: 1802, 07, 09, 10, 15, 23, 35, 36, 37, 5180, 212, 24, 31, 32, 39, 42, 44, 50, 57, 61, 62, 66, 70, 77).

TURDA. Ș.m. 1. Cl. X. **Filip Liana** (5180, 95, 96, 99, 200, 02, 07, 08, 10, 12, 17, 21, 24, 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 52—55, 57, 59, 60, 61, 63, 64, 67, 70, 74, 81, 84, 91, 95), Grosu Octavian (5207, 08, 24, 48, 52, 57, 59, 60, 61, 62, 66, 67). Ș.m. 2. Cl. VIII. **Olariu Adrian** (E: 1802, 05, 06, 10, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 41, 43, 45, 47, 5118, 20, 45, 49, 52, 65, 93, 200, 12, 38, 42, 43, 44, 48, 49, 56, 57, 59, 60, 61, 64, 65, 70, 339, 45). Cl. X. Samson Rozalia (5207, 08, 10, 24, 31, 42, 57, 59, 61, 70, 83).

TURNU MĂGURELE. Ș.m. Cl. IX. Croitoru Vespasian (5158, 59, 60, 61, 62, 63, 67, 68, 96, 97, 208, 09, 10, 11, 12, 40, 41, 46, 57, 60, 70, 84, 85, 87, 88, 94, 95), Cortun George (5208, 16, 24, 31, 37, 39, 40, 42, 48, 49, 50, 57, 59, 61, 66, 92, 95). Cl. X. **Cojocaru Florian** (5157, 60, 63, 64, 67, 69, 70, 75, 76, 88, 96, 202, 07, 08, 10, 12, 14, 16, 17, 21, 24, 29, 31, 38, 39, 40, 42, 44, 45), **Cula Constantin** (5157, 60, 63, 64, 65, 67, 69, 70, 74—75, 76, 77—80, 86, 88, 93, 95, 96, 202, 07, 08, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 37, 38, 42, 44, 57, 59, 61, 92), **Dună Radu** (5157, 60, 67, 69, 70, 72, 80, 88, 207, 08, 10, 12, 14, 21, 42, 44, 48, 57, 59, 61).

TURNU SEVERIN. Ș.m. 1. Cl. VIII. Popescu Eleodor (E: 1801—10, 12, 13, 5193). Cl. IX. Iseru Elena (5207, 08, 10, 17, 24, 21, 41, 44, 48, 50, 57,

59, 61, 62, 66). Cl. X. Nisipeanu Nelu (5163, 80, 88, 96, 207, 08, 10, 24, 29, 40, 42, 44, 46, 52, 53, 59, 60, 61, 67, 95). Cl. XI. Ceau Gheorghe (5212, 17, 24, 25, 39, 40. 48, 49, 51, 52). Ş.m. 2. Cl. X. Ciortan D. (5157, 60, 67, 207, 08, 10, 14. 24, 29, 48, 56, 57, 59, 60, 61, 70), **Liciu Eugen** (5157, 67, 70, 98, 207, 08, 10, 12, 14, 18, 24, 31, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 57—62, 67, 70, 74, 81, 83, 86, 95), Pan Cristiana (5207, 08, 10, 24, 40, 42, 45, 46, 48, 57, 58, 59, 61, 66, 81, 85), Vasilescu Mihai (5157, 65, 70, 207, 08, 10, 12, 24, 29, 40, 42, 45, 48, 50, 56—62, 66, 67, 70, 81, 85), Văcărescu Ioan (5163, 240, 45, 48, 50, 51, 53, 57, 59, 60, 61, 62—66, 70, 71). Absolvent Nănuţ Ioan (5158, 67, 68, 75, 80, 88, 89, 248, 49, 57, 59, 61, 63, 62, 81, 85, 87, 88, 98).

URZICENI. Ş.m.m. Cl. VIII. Bacargiu Maria (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 11, 13, 15).

VALEA LUNGĂ. Şc. de 8 ani. Cl. VII. Matei Ioan (E: 1801—19, 22—26, 28—32, 35—41, 5170, 83, 202, 08, 24, 31, 36, 42, 56, 57, 61, 66).

VATRA DORNEI. Ş.m. Cl. IX. Dubic Maria (5217, 21, 24, 48, 50, 51). Cl. XI. Sturzzu Ioan (5158—62, 67—69, 81, 207, 08, 26, 30).

VASLUI. Ş.m. Cl. IX. **Corcoţoi Ioan** (5164, 208, 12, 16—18, 21, 24, 36, 38, 39, 42, 43, 44, 48, 49, 50. 51, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 68, 69, 71, 74, 86, 98, 99, 306, 13, 14, 16, 17, 27, 39. 40, 43, 45, 46, 47, 50).

VĂLENII DE MUNTE. Ş.m. Cl. VIII. **Preda Victoria** (E: 1802, 03, 10, 16—31, 36, 37, 5183, 93, 208, 24, 29, 36, 42, 44, 57, 58, 60, 61, 70, 71, 321), Răducu Petre (E: 1802, 03, 06—09, 11, 13, 19, 29, 30, 32, 35, 37, 39, 57).

VIDELE. Ş.m. Cl. VIII. Cojocaru Gheorgne (E: 1817, 18, 23, 28, 36, 44, 48), Dumitrescu Traian (E: 1816, 30, 31, 36, 37, 41, 42, 44, 57, 61, 62).

VIŞEUL - DE - SUS. Absolvent Ioanid Grigore (5163—66, 93—97, 99, 200, 12, 35, 39—45, 47).

VINJU MARE (Oltenia). Ş.m. Cl. VIII. Ciochină Sebastian (E: 1816, 17, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 32, 37, 5287), Grăcea Ioan (E: 1816—18, 22, 24, 26, 29—32, 37, 52, 57).

ZALĂU. **Grupul şcolar Simion Bărnuţiu.** Cl. V. Aszodi Ferenc (E: 781, 82, 89, 92), Dako Klara (E: 765, 68, 76, 77, 82, 89, 91, 92), Demjen Erszebet (E: 692, 768, 82, 89, 91), Dobrai Laszlo (E: 763, 81, 82, 89, 92), Erdei Eva (E: 758, 64, 79, 81, 88—91), Fazakas Ferenc (E: 744, 58, 64, 79, 81, 89, 91), Fulop Gyorgy (E: 781, 82. 84, 88—92), Gal Endre (E: 716, 63, 81, 89, 92), Kovendi Eva (E: 766—68, 77, 82, 89), Kaizer Jolan (E: 744, 45, 58, 68. 81, 82, 89, 90. 92), Keresztes Eva (E: 744. 68, 77, 82, 89, 91), Nagy Laszlo (E: 781, 82, 89, 91, 92), Papp Erszebet (E: 765, 77, 81, 82, 88—92), Pacz Erszebet (E: 729, 44, 57, 76, 82, 89—92), Piricsi Ilona (E: 781, 82, 88, 90, 91), Somogyi Szuszanna (E: 781, 82, 89, 91, 92), Szüvs Ibolya (E: 776, 77, 79, 81, 82), Tunyogi Iudit (E: 781, 82, 88, 91, 92), Ujvarosi Klara (E: 766, 76, 82, 89, 91), Vaszi Veronika (E: 747, 58, 81, 82, 88—90, 92), Wokalek Barna (E: 776, 79, 88, 89—92). Cl. VI. Banto Jbolya (E: 768, 76, 79, 81, 82, 88—92), Czinege Erzsebet (E: 781, 82, 84, 88—92), Czirjak Ilona (E: 768, 76, 77, 79, 81, 82, 88—92), Erdodi Ana (E: 699, 782, 89, 90, 92), Fogorassy Edit (E: 766, 76, 77, 79, 81, 82, 84, 88—91), Henczes Maria (E: 757, 63, 65, 67, 81, 82, 84, 88—92), Hiriczko Margit (E: 747, 49, 53, 89—91), Kalauz Joszef (E: 764, 81, 82, 89—92), Marton Eva (E: 768, 76, 79, 81, 82, 84, 88—92), Osz Tibor (E: 758, 81, 89—91), Terna Istvan (E: 781, 82, 88—92). Cl. VII. Haraszy Endre (E: 781, 82, 84, 85, 87—92), Kovacs Ilona (E: 774, 76, 79, 81, 82, 84, 85, 88, 89, 91, 92), Major Ilona (E: 781, 82, 84, 85, 88, 89—92), Mura Anna (E: 781—85, 87—92).

ZETEA. Ş.m. Cl. VIII. Balasz Sandor (E: 779, 81, 82, 89, 91), Bertalan Erzsebet (E: 779, 831, 781, 82, 87, 89, 91), Illyes Ferenc (E: 779. 831, 781, 83, 87, 89, 91), Sandor Ilona (E: 781, 82, 87, 89, 91).

ZIMNICEA. Ş.m. Cl. IX. Broscaru Aurel (5208, 17, 21, 27, 39, 42, 44, 50, 51, 58, 86).

ZLATNA. Ş.m. Cl. X. Sdirea Ioan (5193, 200, 07, 08, 40, 42—46, 57, 59, 61, 70, 85, 95).

Pînă la 15 august 1962 s-au mai evidenţiat ca rezolvitori de probleme cel puţin 35 soluţii bune trimise împreună la probleme propuse în G.M.F.-B, după cum urmează:

1. **Ender Lucian,** absolvent Ş.m. 2 Focşani (Galaţi). 1 bis. **Bădescu Lucian,** absolvent Cîmpulung-Muscel. 2 **Zisu Tudor,** cl. X, Ş.m. 34 Bucureşti; 3. **Rădan Sorin,** cl. X, Ş.m. Slănic (Prahova); 4. **Lusztig Gheorghe,** cl. XI, Ş.m. 5 Timişoara; 5. **Crainic Emanuel,** cl. X Ş.m. 17 Bucureşti; 6. **Zisu Ana,** cl. IX Ş.m. 34 Bucureşti; 7. **Grigorescu I. Şerban,** cl. X

Ş.m. 1 Bucureşti; 8. **Pantelimon Anton**, cl. XI Ş.m. 1 Focşani; 9. **Ion Alexandru**, Ş.m. Găeşti (Argeş); 9 bis. **Drugă M. Gheorghe**, absolvent Breaza (Ploieşti); 10. **Banu Gheorghe**, absolvent Pucioasa; 11. **Diaconescu I. Ioan**, absolvent Piteşti; 12. **Butaciu Nicolaie**, absolvent Ploieşti; 13. **Ivănescu Alexandru**, absolvent Galaţi; 14. **Dănilă Ioan**, cl. VIII Ş.m. 3 Sibiu; 15. **Stern Toma**, cl. X Ş.m. 1 Timişoara; 16. **Iucov Gheorghe**, cl. XI Ş.m. 1 Tulcea; 17 **Toma Dragomir**, cl. X Ş.m. 1 Oradea; 18. **Ionescu Gregorian**, cl. XI Ş.m. 1 Buzău; 19. **Iliescu Victor**, cl. X Ş.m. Drăgăşani; 20. **Simion I. Alexandru**, cl. XI Ş.m. 1 Bîrlad; 21. **Selingher Doina**, absolvent Galaţi; 22. **Stănciulescu Carmen**, cl. X Ş.m. 1 Oradea; 23. **Apostol Adriana**, cl. X Ş.m. 1 Turda; 24. **Vlădoreanu Cornel**, absolvent Timişoara; 25. **Zoler David**, cl. XI Ş.m. Săveni (Ploieşti); 26. **Serachitopol Adrian**, cl. XI Sighişoara; 27. **Eremia Dinu**, absolvent Timişoara; 28. **Savitescu Gheorghe**, cl. IX Săveni; 29. **Moraru Ion**, absolvent Moreni; 30. **Ambruş Mircea**, cl. VIII Ş.m. 1 Lugoj; 31. **Serţer Irvin**, cl. X Ş.m. 3 Iaşi; 32. **Biscăn Octavia**, cl. VIII Ş.m. 1 Craiova; 33. **Diaconescu Florin**, absolvent Galaţi; 34. **Ivanov Ilie**, cl. VIII Ş.m. 1 Giurgiu; 35. **Moscovici Cornel**, cl. X Ş.m. 16 Bucureşti; 36. **Grozzeanu Ion**, cl. XI Ş.m. 1 Giurgiu; 37. **Băluţă Gheorghe**, absolvent Adjud; 38. **Dorin Alexandru**, absolvent Ş.m. 1 Bucureşti; 39. **Matei Gheorghe**, Ş.m. cl. IX Pucioasa; 40. **Ciornea Dumitru**, cl. XI Ş.m. 1 Dorohoi; 40 bis. **Vilceanu Sabin**, student fizică Bucureşti; 41. **Vodă Viorel**, absolvent Ş.m. 12 Bucureşti; 41 bis. **Ursulescu Octavian**, cl. VIII Ş.m. 11 Bucureşti; 42. **Munteanu Elena**, cl. XI Oţelul Roşu; 42 bis. **Anca Dorinel**, cl. X Ş.m. Pucioasa; 43. **Popa Alexandru**, cl. X Ş.m. Pucioasa; 44. **Conache Petru**, cl. X Ş.m. 30 Bucureşti; 45. **Popescu Domiţian**, cl. XI Ş.m. 24 Bucureşti; 46. **Ilie Justin**, cl. VIII Ş.m. 8 Bucureşti; 47. **Neagoe Sorin**, absolvent Cluj; 48. **Săbăilă Aurel**, cl. XI Ş.m. 22 Bucureşti; 49. **Rădulescu Tudor**, absolvent Caracal; 50. **Rosenberg Flaviu**, cl. X Ş.m. 1 Focşani; 51. **Prodan Constantin**, cl. X Ş.m. 1 Galaţi; 52. **Reneţiu Militon**, absolvent Arad; 53. **Munteanu Mircea**, cl. X Ş.m. 5 Braşov; 54. **Tăbuşcă Ion**, anul IV, şc. pedagogică Bîrlad; 55. **Andrias Nicolae**, cl. VIII Ş.m. 5 Galaţi; 56. **Bibicu Ion**, cl. X Ş.m. 2 Brăila; 57. **Lucaci Pompiliu**, cl. VIII Ş.m. 5 Galaţi; 58. **Ciobanu Viorel**, cl. X Ş.m. Găeşti; 59. **Ciura Alexandru**, cl. X Baia de Arieş; 60. **Frangu Octavian**, cl. VIII Ş.m. 2 Brăila; 61. **Timoşcenko Alexandru**, absolvent Ş.m. 1 Bucureşti; 62. **Roemer Vicenţiu**, absolvent Bucureşti; 63. **Muşatescu Virgil**, cl. XI Ş.m. 4 Bucureşti; 64. **Radian Thea**, cl. XI Ş.m. 7 Bucureşti; 65. **Pătraş Mihai**, cl. X Ş.m. Huşi; 66. **Cimponeriu Traian**, cl. IX Ş.m. 1 Lugoj; 67. **Soare Cristel**, cl. VIII Ş.m. 1 Ploieşti; 68. **Drăgulinescu Dumitru**, cl. IX Ş.m. Tr. Măgurele; 69. **Moldovan Gabriel**, cl. X Ş.m. 23 Bucureşti; 70. **Iordan Dumitru**, cl. X Grupul şcolar Bîrlad; 71. **Ţuchel Sanda**, absolventa Galaţi.

* * *

Pînă la 15 august 1962 s-au mai primit soluţii bune la probleme propuse în ultimele 3 numere din G.M.F.-B, de la:

ADJUD. **Absolvent Băluţă Gh.** (5296—98, 300—24, 27, 28, 30—38, 43—45, 48—52).

AIUD. **Ş.m. Avram Iancu. Cl. X.** Ciup Ariana (5231, 49—51, 61, 76, 314, 18, 27, 57), Drăgan Victor (5221, 37, 44, 48—50, 57, 61, 70, 86, 96, 98), Furdac Florin (5208, 12, 16, 17, 24, 31, 36, 42, 50, 61, 62, 81), Sîntu Ion (5248, 52, 53, 57, 59—62, 67, 302, 12).

ANINA. **Ş.m. Cl. VIII.** Petrici Mircea (5238, E: 1816—20, 22—24, 28, 30).

ARAD. **Absolvent Frenţiu Militon** (5207—12, 14, 16, 21, 24—26, 30—32, 36, 38, 41, 42, 44, 48, 50—57, 59, 61, 62, 66, 70, 74, 75, 81—86), **Ş.m. 2. Cl. X.** Stoicescu Marina (5207, 08, 10, 15, 21, 24, 32, 5348—50, 53, 57, 60, 61, 66, 67, 70, 78, 81, 83, 86, 96, 97).

AZUGA. **Absolvent** Cîrneci Ion (5207—12, 14, 17, 21, 24, 36, 38—40, 42—47).

BABADAG. **Ş.m. Cl. XI.** Jora Boris (5229, 38, 47, 49, 56, 72, 81, 84, 90, 91, 94, 312, 13, P).

BAIA DE ARIEŞ. **Absolvent** Gurgu Ion (5250, 54, 57, 59, 61, 63, 66, 67, 75, 80, 81, 84, 85, 352), **Ş.m. Cl. X. Ciura Alexandru** (5248—53, 56—62, 64—67, 71, 74, 77, 78, 81, 83, 86, 94—99, 302, 05, 12, 13, 15, 18, 19, 21, 27, 32, 35—37, 43—45).

BAIA MARE. **Ş.m. 1. Cl. VIII.** Anonim (5238, 42, 43; E: 1817, 18, 22, 29, 40, 43, 45—47).

BECLEAN (Cluj). **Ş.m. Cl. IX.** Zăgreanu Justin (5212, 24, 29, 31, 48, 50, 57, 59, 61, 66, 70, 81, 83, 96, 313, 45).

BISTRIŢA (Cluj). **Absolvent** Circu Ioan (5207—12, 14, 16, 18, 24—28, 30, 36, 38—47). Verveagă T. (5296, 98, 302, 05—07, 09, 11—13, 15, 16, 32, 37). **Cl. X.** Bîdiu Mircea (5207, 08, 38, 44—46, 81, 86, 97, 332), Buta Adrian (5224, 48, 57,

60—62, 64, 98, 313—15, 35, 37, 41, 43—45), Feurdean Petru (5207, 08, 38, 40, 42—46, 56, 57, 60), Horvath Florin (5207, 08, 16, 17, 23, 24, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 56, 57, 60, 64, 67, 70, 79), Puşcaşu Anton (5217, 18, 23, 24, 40, 45, 52, 56, 57, 59, 60, 67, 74, 337), Sîrbu Ştefan (5207, 08, 24, 40, 42, 44—46, 48, 51, 52, 57, 59—61, 66), Cl. XI. Buduşan Mircea (5207, 08, 10, 36, 40, 42, 44—46, 250, 52, 57, 60, 64, 74, 85, 95, 314, 41, 43—45).

BÎRLAD. **Complexul şcolar.** Cl. IX. Armeanu Corneliu (5207, 10, 14, 48—51, 57—59, 61, 74, 84, 85), Boidache Gavrilă (5207, 10, 14, 24, 36, 38, 42, 44, 48, 50, 51, 60—62). Cl. X. **Iordan Dumitru** (4684, 97, 700—03, 09, 11, 17, 29—31, 33—35, 38, 40, 47—49, 51, 53, 58, 64, 65, 69, 70, 74—76, 78—84, 89, 93, 94, 96, 99, 807, 16, 19, 35, 41, 47, 54, 75, 80, 82, 903, 09, 15, 17, 27, 28, 34, 35, 5022), **Ş.m. 1.** Cl. XI. **Simion I. Alexandru** (5209—11, 14, 16, 18, 32, 34, 36—39, 42—46, 48—53, 56—68, 70—72, 74, 77, 81, 83—93, 95). **Şcoala pedagogică, Anul IV, Tăbuşcă Ioan** (5207, 08, 10, 12, 16—18, 21, 24, 31, 38, 40, 42, 44, 45, 48—53, 57—62, 64—67, 71, 74, 86, 97, 302, 13).

BOTOŞANI. **Ş.m. 1.** Cl. X. Pincas Iancu (5221, 24, 38, 57, 59, 61, 62, 66, 70, 91, 95, 344), Pincu Ioseph (5164, 75, 21, 24, 33, 39, 48, 57—59, 62). Cl. XI. Mercheş Iordan (5208, 21, 45, 46, 57, 59, 61, 62, 65, 70, 92, 95), Witinig Silviu (5240, 50, 56—62, 66, 67, 315).

BOZOVICI (Banat). Ş.m. Cl. VIII. Pişlea Petru (E: 1816, 22, 30, 36, 37, 45, 51, 52, 5242, 44, 59).

BRAŞOV. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Vătui Florin (5216, 18, 38, 42, 43, 70, E: 1816—31, 34—37, 39, 41, 42). **Ş.m. 4.** Cl. X. Grovu Mihai (5248, 49, 56—62, 64, 67, 95). Cl. XI. Vulpe Victor (5249, 53, 53, 56—58, 60—62, 67, 79, 86, 95). **Ş.m. 5.** Cl. IX. Munteanu Mihai (5207, 08, 10, 16, 21, 24, 25, 31, 35, 38, 39, 42—45). Cl. X. Bărar Aurelia (5160, 63, 65, 67, 89, 93, 95, 98, 200, 25, 46), **Munteanu Mircea** (5213, 48—50, 52, 53, 57—61, 66, 67, 70, 71, 74, 81, 85, 86, 92, 95, 96, 98, 307, 12—15, 19, 27, 28, 35, 39—45, 47, 51). **Şc. elem. nr. 4.** Cl. VII. Goga Marina (E: 1801, 02, 08, 09, 16, 18, 22, 24, 30, 37, 41).

BREAZA (Ploieşti). **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Dobre Ion (5257, 59, 60, 71, 83, 339, 44, E: 1842, 43, 45, 47, 62—64, 66, P). Cl. IX. Stocan Nicolae (5215, 17, 21, 24, 31, 34, 36, 39, 42, 44, 48—50, 61, 66, 70, 74, 81, 84), Sandu Marin (5215, 17, 21, 24, 31, 34, 36, 39, 42, 44, 48—50, 61, 66, 70, 74, 81, 84). Cl. XI. Bratu Paul (5207, 08, 10, 24, 40, 57—59, 66, 67, 70, 83, 302, 12, 13, 15, 37, 43, 44), Mircea Enache (5224, 48, 52, 57, 61, 96, 302, 12, 15, 35—37, 44), **Drugă M. Gh.** (5248—68, 71—73, 75, 77, 78, 81, 84, 89, 94—316, 18—21, 23, 24, 27, 31—38, 40, 41, 43—47, 52, 55, 61, 62, 70, 71, 73, 74, 76, 80, 85—87, 90—96).

BRĂILA. Ing. Stoianovici Dumitru (6157, 61, 67, 76, 83, 207, 08, 10, 21, 24, 25, 31, 57—60, 62, 64, 66, 81, 83, 88, 302, 12, 18). **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Loescher Vanda (5238, 42, 48, 57, 61, 66, E: 1816, 18, 19, 24, 30, 35—37, 43—45, 47). **Ş.m. 2.** Cl. VIII. **Frangu Octavian** (5208, 12, 24, 31, 37, 38, 42—44, 56—59, 61, 62, 92—93, E: 1816—19, 22—24, 26—32, 35—37, 39—41). Cl. X. **Bibicu Ion** (5212, 17, 21, 32, 34, 39, 49, 51—53, 56, 59—62, 64—67, 74, 77, 78, 81, 84, 86, 94—96, 302, 12—15, 19, 32, 35, 50).

BUCUREŞTI. **Student Vîlceanu Sabin** (5101, 13, 21, 23, 31, 35, 43, 45, 49, 52, 53, 55, 57, 62, 66, 69, 74, 83, 85, 88, 95—97, 202, 12, 17, 39, 40, 42—49, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 67, 70, 74, 83, 86, 92, 93, 95). **Absolvenţi:** Abramovici Eugen (5208, 24, 31, 44, 56, 59, 62, 336, 43—45), Bereş Alexandru (5207—12, 17, 24, 26, 42, 44, 48, 50, 53, 59, 63, 83, 88), Cătănescu Alexandru (5207—11, 21, 24, 25, 29, 31, 36, 37, 39—42, 46), **Dorin Alexandru** (5207—11, 21, 23—27, 30, 32, 48—41, 53, 57, 59—62, 66, 67, 71, 80, 83, 85, 93, 302, 05, 09, 11—15, 19, 22, 35, 37), Drăgan Alexandru (5257, 59—61, 63, 65, 67, 80, 81, 86, 315), Dumitru Şerban (5157—70, 72—75, 79, 80, 83, 85, 86, 88, 91, 202, 03, 05), Fierbinţeanu Mircea (5207, 09, 11, 24, 31, 48, 57, 59, 61, 67, 70, 81, 85, 88), Frankenfeld Giorgian (5248, 49, 52—54, 56—67, 70, 73—75, 79—81, 83—91, 94, 95), Iancu Barbu (5207—12, 24—26, 31, 35, 38, 39, 42, 44, 46, 47), Pătraşcu Mihai (5207—12, 14, 16, 21, 24, 25, 29), Raischi Constantin (5207—12, 16, 17, 21, 23—26, 31, 37—45, 47), **Roemer Vincenţiu** (5118—20, 23, 25, 45, 53, 57, 70, 72, 74—76, 79—81, 83—85, 89, 90, 93, 94, 96—98, 200, 05, 30, 38, 39, 44, 52, 57, 59, 61, 67, 94), Rosenberg Armand (5247, 59—61, 66, 67, 84, 88, 98, 302, 07, 09, 15, 17, 30, 35, 37, 92), Sasu Traian (5207—12, 24, 26, 40, 42—44, 48, 59), **Timoşenko Alexandru** (4915, 16, 20, 23, 24, 26, 28, 30, 50, 52, 79, 83, 5250, 58—61, 63, 67, 70, 71, 74, 81, 85, 87—89, 94, 95, 97, 302, 08, 14, 21, 24, 34, 40, 43—45, 48, 49). **Ş.m. 1. N. Băl-**

cescu. Cl. VIII. Andrei Romulus (E: 1830, 31, 36, 37, 41, 43, 45—47). Cl. IX. Cohan Mihai (5257—59, 61, 62, 64, 66, 70, 97, 313, 17, 27), Ştefănescu Dan (5248—50, 56—59, 62, 66, 70). Cl. X. Anastasescu Ion (5207, 08, 10, 12, 16—18, 21, 24, 38—40, 42—45), Căpităneseu Ion (5207, 08, 10, 14, 31, 32, 40, 42, 45, 48—51, 53, 54, 61, 66, 70, 71, 74, 86, 302, 13, 15, 32, 45, 49), **Grigorescu I. Şerban** (5207—10, 12, 14, 16—18, 21, 23, 24, 28, 29, 31, 32, 34, 36, 37, 39—46, 48—53, 56—62, 64—67, 70—72, 74, 75, 77—79, 81, 83, 84, 86, 90, 93, 95—302, 05—15, 17—19, 21, 27, 28, 32, 35—37, 39—41, 43—45, 49—52), Ionescu Nicolae (5214, 17, 21, 23, 32, 34, 38—40, 42—46, 48—50, 52, 53, 57—62, 64—68, 74, 77, 86), Lăzărescu Constantin (5207—10, 12, 14, 17, 24, 29, 31, 70, 71, 74, 81, 83). Cl. XI. Radovici Paul (5207—10, 14, 21, 24, 29, 31, 42). **Ş.m. 2.** Cl. XI. Nistor Elena (5207, 08, 10, 12, X24, 44, 45, 48, 57—59, 70, 95, 335, 37). **Ş.m. 3.** Cl. VIII. Marcovici Sorin (5248, 49, 70, 71, 76, 97, 327, 49, E: 1830—32, 35—38, 40, 41, 43, 46, 47, 49, 52, 53, 56), Nicolaescu Corneliu (E: 1816, 18—20, 22, 24, 27, 30, 35, 37, 43, 45), Popescu Radu (E: 1816, 18, 23, 30, 31, 36, 43, 45, 53). **Ş.m. 4.** Cl. IX. Oros Justin (5208, 12, 23, 24, 31, 36, 39, 42, 51, 59, 61), Săcăliş Dănuţ (5208, 12, 16, 23, 24, 31, 36, 39, 42, 59, 61). Cl. X. Martin Maria (5248, 50, 51, 57, 59, 66, 70, 74, 86, 95). Cl. XI. **Muşatescu Virgil** (5207, 08, 10, 12, 24, 31, 42, 44—46, 48, 50, 53, 57, 59, 60, 62, 66, 67, 70, 80, 95, 96, 98, 5300, 02, 05, 12, 13, 15, 17, 18, 44, 87). **Ş.m. 7.** Cl. VIII. Bercovici Tulita (5248, 49, 57, 62, 70, 71, 86, E: 1832, 35, 40, 47). Cl. IX. Opriş Valentin (5218, 21, 24, 31, 48—51, 56—59). Cl. XI. **Radian Thea** (5207—11, 18, 24, 26, 29, 31, 45, 48, 52, 53, 57, 61, 63, 70, 73, 81, 84, 85, 87, 88, 94—96, 98, 315, 24, 27, 30, 34, 37, 42, 44). **Ş.m. 8.** Cl .X. Cinteză Mircea (E: 1818, 20, 22, 26, 30, 31, 36, 43, 45). Cl. VIII. **Ilie Justina** (5208, 24, 48, 66, 70, E: 1816—18, 24, 26, 29). **Ş.m. 10.** Cl. VII. Fiaru Cristina (5204, 57, 61, 62, 64). Cl. VIII. Văituş Anca (E: 1843, 45—48, 52, 53, 57, 58, 64, 66). Cl. X. Buiculescu Mioara (5221, 24, 31, 38, 56, 96, 97, 302, 07, 12—15, 27, 37), Panea Michaela (5207, 08, 10, 18, 24, 29, 34, 48—53, 57—59, 61, 62, 65—67, 74, 81). **Ş.m. 11.** Cl. VIII. Lupu Sorin (E: 1816—19, 23, 24, 31, 33, 35, 37, 40, 42, 44, 70, 71), Papadopol Şerban (5218, 38, 42, E: 1816, 23, 24, 29—31, 33, 36, 43, 45), **Rădulescu Dorin** (5208, 16, 23, 37, 40, 44, 56, 57, 62, 66, 92, 343, 44, 46, E: 1800, 16, 18—24, 26—28, 30, 33, 37, 39, 42). Cl. IX. **Ursulescu Octavian** (5208, 12, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 38, 39, 42, 44, 48—50, 56—62, 64—66, 74, 75, 81, 83, 86, 95, 305, 10, 13, 43, 45). Cl. XI. Gropper Jean (5207—10, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 29, 31, 38—40, 42—46, 48—53, 56—62, 64—67, 70, 74, 76), Ursulescu Florin (5208, 10, 12, 17, 18, 21, 24, 29, 31, 38, 39, 42, 44, 48, 57, 61, 64, 66), **Ş.m. 12.** Cl. IX. Cristescu Valentin (5163—65, 83, 95, 212, 21, 24, 31, 39, 42—44). Cl. X. Ciobanu Mircea (5208, 10, 17, 18, 24, 29, 31, 34, 48), Lazzarovici Cristian (5207, 08, 10, 16—18, 24, 29, 31, 34, 36), Cl. XI. Vodă Viorel (5225, 27, 31, 49, 50, 51, 53, 62, 66, 70, 71, 87, 98, 302, 05, 07, 09, 11—16, 19, 22, 32, 35, N.P). **Ş.m. 12 de muzică** Cl. VII. Dobrescu Sarina (E: 1816, 23, 29—31, 33—37, 39—41, 47, 53). **Ş.m. 13.** Cl. VIII. Capră Livia (E: 1816, 18, 22, 24, 27, 30, 31, 34, 37, 45, 47), Cojan Ştefan (5208, 12, 16—18, 57, 62, 66—68, 70, 77, 81, 84), Otopeanu Alexandra (5208, 49, 59, 61, E: 1819—23, 25, 28, 33, 36, 41, 43—46), Cl. IX. Flondor Paul (5217, 24, 31, 36, 96, 305, 18, 32, 50), Cl. X. Aldea Ion (5207, 08, 10, 14, 16—18, 21, 23, 24, 29, 31, 34, 42, 46), Guţă Cristian (5032, 80, 89, 35, 41, 43, 52, 55, 75, 218), Cl. XI. Badea Adrian (5207, 08, 18, 32, 44, 45, 57—59, 62, 66, 95, 306, 13, 15, 41, 43—45), **Ş.m. 15.** Cl. X. Paidin Ion (5262, 64, 66, 67, 70, 75, 78, 95, 96, 98, 302, 05, 07, 15, 19, 32, 35, 37, 45, 49), Răceanu Maria (5296—98, 302, 05, 13, 15, 27, 35, 41, 44, 51). **Ş.m. 16.** Cl. X. **Moscovici Cornel** (5248—53, 56—62, 64—67, 86, 92, 95—98, 300—02, 05, 07, 08, 10—15, 40, 43, 44), **Ş.m. 16.** Cl. VI. Morgerstern Schoel (5207, 08, 10, 12, 14, 16, 17, 21, 24, 27, 31, 38—40, 42—46, 48—50, 59, 61, 62, 67, 70, 95, 302, 15, 44, 45, 49). **Ş.m. 17.** Cl. VIII. Almer David (E: 1817—29, 5208, 12, 16, 24, 46, 48, 57, 59), Blumenfeld Florin (E: 1816—17, 23, 24, 43, 45, 47, 5257, 96), Cl. X. **Crainic Emanuel** (5129, 57, 76, 80, 86, 90, 95, 200, 17, 19, 22, 27, 34, 38, 39, 48—53, 57—67, 72—75, 78, 81—87, 92, 94—99, 301, 02, 05—09, 11—19, 27, 28, 31, 32, 35—37, 45, 49, 50—52). **Ş.m. 18.** Cl. VIII. Aronovici Jacques (E: 1820, 21, 32, 43—47, 49, 51, 52, 5296, 97, 305, 11, 27, 39, 43—45, 49), Iordache Florin (E: 1823, 47, 51—53, 5242, 97, 317, 27, 45), Cl. XI. CovrigMircea (5207—13, 21, 24—29, 31, 36—38, 40—42, 44—46).

Ş.m. X. Feran Monica (5207, 08, 10, 12, 16—18, 21, 24, 29, 31, 39, 40, 42—46), Ş.m. 20. Cl. VIII Kanner Dan (E: 1824, 27, 36, 37, 43—45, 47, 56, 5208, 24, 61, 97, 327). Cl. X. Negoescu Mihai (5207, 08, 10, 12, 14—16, 18, 21, 24, 29, 31, 37, 40, 42—46, 48—53, 56—62, 64, 67, 70, 71, 74, 83, 86, 92, 93), Ş.m. 21. Cl. IX. Dragu Alin (5157, 60, 67, 61, 74, 75, 80, 83, 93, 95, 200, 07, 08, 12, 16—18, 24, 31, 34, 36, 38, 42—44, 48—51, 56—62, 64, 67, 70, 73, 77, 81, 87, 92). Ş.m. 22. Cl. IX. Crişan Andrei (5208, 24, 31, 48, 50, 57, 59, 61, 62, 66, 81, 84, 98, 314, 17, 18), Cl. X. Bunea Victor (5207, 10, 14, 24, 31, 61, 62, 66, 81, 315), Fierăstrău Dumitru (5207, 11, 18, 20, 21, 24, 26, 31, 36, 48, 49, 61, 63, Cl. XI. Frankenfeld Corneliu (5207, 08, 10, 12, 16—18, 23, 24, 32, 34, 38—40, 42—46, 48, 49, 52, 53, 57—62—67, 70, 74, 84, 90, 95), Popescu Viorel (5207, 12, 17, 18, 24, 39, 42, 43, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 64, 67, 86, 91, 98), Săbăilă Aurel (5171, 81, 82, 94, 203—05, 12, 14—18, 21, 23—28, 31, 32, 34, 36—39, 41—44, 48—57, 61—63), Ş.m. 23. Cl. IX. Petrescu Sorin (5207, 08, 14, 21, 34, 36, 56, 64, 65, 67, 74, 87), Cl. X. Moldovan Gabriel (5067, 69, 80—82, 84, 89, 103, 05, 08, 12, 21, 26, 30, 35, 41, 44, 45, 50, 53, 54, 83, 88, 207, 08, 10, 12—14, 16—18, 21, 29, 34, 36, 38—40, 42—46, 48—50, 52, 53, 56—62, 67, 71, 74, 77, 83, 86), Stoica Vicenţiu (5208, 12, 18, 21, 24, 29, 31, 34, 38, 39, 42, 44, 48, 50, 51, 57, 59, 60, 61, 66, 67, 70), Ş.m. 24. Cl. XI. Popescu Domiţian (5136, 57—62, 67—69, 86, 93, 97, 207—11, 48—53, 57, 61, 71, 75, 81, 83—89, 94, 95), Ş.m. 30. Cl. X. Conache Petru (5116, 69, 67, 69, 78, 84, 86, 92, 95, 97, 314, 32, 40, 43—45, 48). Ş.m. 34. Cl. IX. Zisu Ana (5005—07, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23—27, 30—32, 34, 38, 41, 45, 49, 51, 59—61, 63, 68, 77, 105. 11, 12, 21, 34, 51, 66, 74, 207, 10, 52, 53, 56, 57, 71, 75, 79, 79, 96—99, 305—07, 10, 11, 13, 14, 17, 27, 34, 39, 40, 43—47), Cl. X. Leibovici Valeriu (5208, 12, 16—18, 21, 24, 31, 35, 38, 39, 44), Zisu Tudor (4965, 66, 72, 75, 82, 84, 97, 5005, 06, 12, 18, 20, 20—27, 30, 31, 34, 36, 38, 41, 45, 54, 55, 59, 60, 63, 64, 68, 81, 82, 87, 105, 11, 17, 21, 34, 45, 58, 61, 66, 74, 86, 13, 32, 52, 56, 57, 61, 65, 75, 85, 96—302, 05—08, 319, 34, 35, 37, 41, 43, 45, 49).

BUŞTENI. Absolvent Albu Gheorghe (5207, 08, 10, 11, 13, 14, 17, 21, 24, 26, 28, 30—32, 36, 48, 54, 55, 60, 63, 67, 74, 81), Ş.m. Cl. X. Cîrlig Ion (5207, 08, 10, 24, 38—40, 42, 44, 45, 52, 57, 60, 61, 86, 302, 12, 13, 40, 41, 44, 45), Ioniţă Mihai (5207, 08, 10, 24, 56, 60, 62, 67, 70, 302, 12, 13, 15, 35, 37).

BUZĂU. Ş.m. 1. Cl. IX. Constantinescu Cristian (5229, 36, 38, 42, 49—51, 61, 64, 74, 81, 70), Cl. X. Costea Ion (5208, 10, 16, 34, 50, 51, 71, 83, 95—97, 302, 05, 12—15, 19, 32, 35, 37, 39, 41, 43—45, 49), Negruţ Ionel (5212, 21, 24, 39, 48, 49, 57, 70, 86, 96, 345), Cl. XI. Ionescu Gregorian (5207, 08, 10, 12, 24, 31, 36, 40, 46, 48, 50, 56—64, 66, 67, 70, 74, 75, 77, 83, 85, 95, 302, 12—15, 27, 32, 35, 37, 41, 43—45, 49), Ş.m. 2. Cl. VIII. Ciocoiu Virgil (5210, 18, 96, E: 1822, 28—30, 37, 43, 45, 47, 48)

CARACAL. Absolvent Rădulescu Tudor (5207—12, 17, 26, 36, 39—41, 44, 45, 47, 51, 57, 59—63, 85, 86, 88, 89, 94, 302, 12, 13, 15, 30, 35, 37, 44).

CARANSEBEŞ. Absolvent Liuba Gheorghe (5207—11, 24, 36, 39, 44, 48, 50, 51, 57—61, 63, 64, 67, 70, 74, 85—88, 94. 98, 311, 14, 15, 44). Ş.m. 1. Cl. VIII. Benea Dorin (5248, 50, 57, 58, 61, 70, 71, 92; E: 1830, 31, 33—37, 39), Lungu Corina (5208, 38, 45, 49; E: 1822, 24, 27, 28, 36, 43, 45, 47, 51). Cl. X. Englönder Alexandru (5224, 40, 42, 44—46, 48, 57, 59, 61, 95).

COGEALAC (Dobrogea). Ş.m. Cl. IX. Costoiu Vasilică (5248, 49, 51, 57, 59, 61, 70, 71, 74, 84, 96, 98, 99).

CĂLĂRAŞI. Ş.m. Nicolae Bălcescu. Cl. IX. Vîrtejaru Liviu (5221, 24, 31, 39, 39, 42, 44, 48—51, 56, 57, 59, 61, 62, 66, 74, 86, 96, 98, 345), Cl. X. Georgescu Dan (5207, 10, 12, 24, 31, 38, 42, 57, 61, 70, 74, 81, 84, 95, 345).

CÎMPINA. Ş.m. N. Grigorescu. Cl. I.X Mircea XAlexandru (5249, 57, 58, 61, 70, 71, 355, 58, 60, 72, 92). Ş.m. Ilie Pintilie. Cl. X. Brad Ion (5207, 08, 10, 14, 21, 24, 29, 31, 39, 40, 42, 44, 48, 51, 57—59, 62, 70, 86), Şc. elem. nr. 1. Cl. VI. Ivaşcu Florin (E: 1791, 98—800—04, 18, 20, 22, 27).

CÎMPULUNG MUŞCEL. Ş.m. Dinica Golescu. Cl. XI. Bădescu Lucian (5109—68, 207—12, 14—16, 21, 24—27, 30—32, 48—50, 52—54, 56—64, 70, 72—76, 78, 81, 83—88, 96, 98, 300, 02, 05, 07, 12—15, 18—22, 28—38, 52 P).

CLUJ. Absolvent Neagoe Sorin (5207—11, 21, 26, 31, 35, 48, 50, 57—62, 66, 67, 70, 71, 85—87, 98, 302, 04, 07, 12—15, 24, 30, 34, 37), Student Beştea Cătălin (5207—12, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 31, 36—38), Desenator Ciomocoş Doina (5225, 36, 42, 44, 86, 334, 45). Ş.m.

Gh. Bariţiu. Cl. IX. Marian Iulian (5207, 08, 10, 12, 16—18, 24, 36, 38, 39, 42, 44). Ş.m. **Gh. Coşbuc.** Cl. XI. Jeflea Alexandru (5207, 08, 10, 12, 14, 18, 24, 31, 38, 39, 42, 44, 46, 48, 57, 61, 81, 319, 44). Ş.m. **Emil Racoviţă.** Cl. VII. Marfievici Andrei (E: 1830, 35—37, 43—47). Cl. XI. Andrei Adrian (5208, 52—57, 60—61, 313, 32, 45), Petcaru Lelia (5229, 34, 48—53, 57, 59, 61, 66, 71).

CONSTANŢA. Ş.m. 1. Cl. X. Brînzănescu Vasile (5254, 63, 67, 70—72, 74—79, 81, 83—86, 90, 91, 95—303, 05—15, 17—19, 21, 27, 28, 31, 32, 34—37, 39—41, 45—47, 49—52, 54—58, 63, 65—67, 70, 72, 80, 81, 84—89, 92—96).

CRAIOVA. **Absolvenţi:** Bărbulescu Nicolae (5248, 57, 59, 61, 67, 70, 74, 78, 85—88, 94, 95, 308, 12, 14, 15, 24, 31, 34, 35, 37, 38, 45, 52), Popescu Mariana (5226, 30, 32, 37—41, 43, 46, 47, 70, 71, 74, 75, 77, 81, 85—88, 94), Stuparu Alexandru (5209, 12, 24, 39, 42—44, 46, 47). Ş.m. 1. Cl. VIII. Biscă Octavian (5231, 38, 42, 43, 48, 49, 57, 70, 96, 97, 327, 39, 43—45, E: 1816—24, 26—31, 33, 35—39, 41, 43, 45—47, 51, 52), Popescu Felicia (5233, 43, 46, E: 1823, 28, 31, 32, 35, 36, 41, 43, 45), Teică Constantin (5224, 38, 42, 44, 48, 49, 56—59, 61, 62, 70, 95, E: 1816—18, 23, 24, 30—32, 34—37, 40, 47, 51). Cl. IX. Georgescu George (5177, 90, 206, 16, 18, 23, 48—51, 57—62, 67, 68, 70, 74, 81, 83, 86). Cl. XI. Pucărescu Ionel (5207—11, 24, 26, 31, 48, 57, 58, 61, 63). Ş.m. 2. Cl. VIII. Andrei Dan (E: 1816, 18—21, 23, 24, 25, 23, 29), Niţulescu Elena (E: 1816—18, 24, 28—31, 35—37). Cl. IX. Dragotă Georgel (5250, 57—59, 61, 62, 86, 98, 5311, 13, 14, 40, 43, 45, 55). Ş.m. 3. Cl. VIII. Diaconescu Michaela (5257, 48, E: 1818, 30, 31, 36, 37, 43, 45, 47), Ghiţuleasa Dan (5248, 57, 61, 327, 28, 44, 45, E: 1843, 47). Cl. X. Parpală Vasile (5207, 08, 21, 24, 29, 45, 46, 48, 57, 59, 61, 66, 315, 44). Ş.m. 4. Cl. IX. Cristescu Mărgărit (5188, 208, 18, 24, 38, 39, 42—44, 48, 50, 56, 58, 59, 62). Cl. X. Corîci Antonie (5160, 63—65, 67, 70, 202, 07, 08, 10, 12—14, 16, 21, 36). Şc. elem. nr. 9. Cl. VII. Avram Dumitru (1830, 35—37, 41—43, 45, 47, 59, 62—64, 66). Şc. elem. nr. 18. Cl. VIII. Dragotă Lavinia (1830, 36, 37, 43, 45, 47, 58, 64).

DĂNEŞTI (Oltenia). **Absolvent** Şc. elem. Stuparu Ion (E: 1816—22, 24—26, 28).

DOROHOI. **Absolvent** Marin Mariana (5207—11, 24, 29, 31, 44, 45, 47). Ş.m. 1. Cl. XI. Ursan Violeta (5067, 69, 139, 75, 78, 207, 08, 24, 29, 48, 50, 57, 59, 60, 70).

DRĂGĂNEŞTI (Argeş). Ş.m. Cl. XI. Văleanu Ion (5207—11, 24, 25, 29, 35, 36, 42, 44, 47).

DRĂGĂŞANI (Argeş). Ş.m. Cl. IX. Jitianu Gh. (5251, 24, 33, 39, 42, 44, 48, 50, 51, 57—59, 61, 62, 74). Cl. X. **Iliescu Victor** (5210, 12—16, 18, 21, 24, 29, 31, 32, 34, 36—40, 42, 44—46, 48, 49, 51—53, 57—62, 64, 67, 68, 70, 71, 81, 89, 95, 5328, 35).

FĂGEŢ. Ş.m. Traian Vuia. Cl. X. Jianu Ionel (5074, 80, 99, 100, 07, 15, 16, 18, 208, 302, 12, 13, 15, 18, 19, 32, 44), Neagoe Petru (5208, 10, 48—50, 53, 56, 57, 59, 60, 62, 67, 86).

FĂGĂRAŞ. Ş.m. 2. Cl. VIII. Grama Gh. (E: 1816, 18—21, 25, 23, 30, 31, 37, 43—45, 48, 50, 54, 58—60, 62—64, 66, 67, 70).

FETEŞTI. Ş.m. Vasile Roaită. Cl. VIII. Gonciar Ştefan (5116, 18, 31, 42, 43, 56, 61, E: 1816—24, 28—31), Văcolaer Ion (5345, 48, 61, E: 1830, 35—37, 43, 45, 4758, 60, 66).

FOCŞANI. Ş.m. Cl. IX. Dumitrache Dumitru (5210, 38, 40, 48, 49, 51, 57, 60, 61, 70). Cl. X. Cru Matei (5207, 08, 10, 12, 16, 21, 31, 32, 36, 38—40, 42, 44), Fetcu Marius (5207, 08, 10, 12, 124, 31, 39, 42, 44—47), **Rosenberg Flavia** (5207, 08, 10, 12, 14, 16, 24, 31, 37—40, 42—46, 48—53, 57—62, 66, 67, 70, 71, 74, 81, 83, 84, 86, 92, 95). Cl. XI. **Pantelimon Anton** (5207—12, 17, 21, 23—28, 31, 32, 34, 36—38, 40—42, 44—67, 70, 71, 74, 81, 83—85).

GALAŢI. **Absolvenţi:** Diaconescu Florin (5207, 08, 10, 24, 31, 34, 40, 44, 49, 51, 57—62, 70, 81, 84—86, 97, 98, 302, 06, 09—16, 19, 27, 34, 36, 37, 47, 49, 51), Ivănescu Alexandru (5207—11, 14, 17, 18, 21, 24—32, 34, 36, 48, 50, 51, 53, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 67, 70, 74, 75, 81, 83, 85, 86, 88, 89, 96, 98, 202, 05, 07, 12—15, 19, 24, 28, 34, 49, 50, P), Selingher Doina (5207—12, 16, 24—26, 31, 36, 40—42, 44—50, 57, 59, 60, 63, 74, 81, 83—88, 94, 95, 98, 302, 12, 13, 15, 34, 35, 37, 45, 52), Ţuchel Sanda (5212, 31, 39—62, 65, 73, 75, 83, 94—96, 98, 99, 301, 02, 06—09, 12—15, 19, 24, 27, 30—32, 34—38, 44, 49, 52). Ş.m. 1. Cl. IX. Pană Horia (5217, 49, 51, 52, 59, 64, 93, 96—98, 313, 14, 17, 27). Cl. X. Hoiazi Cristina (5207, 08, 10, 21, 24, 58, 59, 63, 81, 302, 12, 13, 15, 44), Mihailovici Marcel (5212, 14, 21, 39, 40, 44, 70, 85, 98, 302, 12, 13, 15, 44), **Prodan Constantin** (5207, 08, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 29, 31, 37, 39, 40, 42—46, 48—53, 56—62,

66, 67, 70, 74, 81, 86, 313, 44, 49), Vasile Victor (5207, 08, 10, 24, 48, 57, 59, 61, 67, 70, 81, 302, 12, 44). Cl. XI. Pintilie Angela (5207, 08, 10, 12, 24, 44, 56, 57, 59, 61, 66, 67, 70, 302, 15, 27, 44), Teodor Hristodor (5214, 29, 38, 59, 62, 64, 70, 302, 13, 17, 43). **Ş.m. 2.** Cl. VIII. Daghie Viorel (5208, 12, 43, 45, E: 1818—23, 28, 31, 36, 39, 43). Cl. X. Dodu Marian (5212, 24, 34, 44, 49, 50, 70, 72, 96, 98, 301, 11, 13, 35), Tener Marcela (5207, 08, 10, 16, 21, 29, 31, 48, 49, 52, 57, 59, 70, 337). Cl. XI. Stanciu Margareta (5238—40, 42, 44—46, 52, 57—59, 95), **Ender Lucian** (5157—71, 74, 75, 78—80, 83, 85—202, 06—12, 14—18, 20, 21, 23—34, 36—75, 77, 78, 80, 81, 83—90, 94, 95). **Ş.m. 3.** Cl. IX. Costescu Sergiu (5208, 10, 12, 17, 18, 21, 24, 31, 34, 36, 38, 39, 42—44, 48—51, 57—62, 64, 69, 71, 74, 86, 98, 321, 32, 40, 45, 47), Krausser Dan (5216, 17, 21, 24, 48, 49, 57—59, 62, 67, 95). Cl. X. Rosner Lally (5248, 57, 59, 61, 66, 67, 70, 95, 96, 302, 05, 32, 34). Cl. XI. Crişan Mihai (5207, 08, 20, 39, 42, 44, 48, 57, 59, 61, 66, 67, 70), Polic Teodor (4922, 39, 5111, 17, 26, 42, 43, 83, 84, 302, 07, 11—15, 35, 37, 43, 55, 92). **Ş.m. 5.** Cl. VIII. **Andrieş Nicolae** (5175, 207, 10, 14, 16, 29, 36, 38—40, 46, 50, 52, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 74, 81, 95, 309, 32, 41, 43, 44, 50, E: 1816—19, 23—25, 27—29), Blaga Jenica (E: 1816, 30, 32, 36—39, 43, 45, 47), Haină Roşie Cornelia (E: 1831, 35, 41, 43, 45, 47, 48, 51), **Lucaci Pompiliu** (5175, 207, 10, 14, 16, 36, 38—40, 45, 46, 59, 60, 62, 65, 67, 81, 83, 95, 96, 311, 32, 39, 41, 43, 44, 50, E: 1816—19, 23—27, 29, 43, 45, 47), Pantici Georgeta (E: 1816, 28, 30, 36—39, 41—43, 48, 52), Radief Maria (E: 1816, 24, 29, 30, 32, 35—39, 43—45, 47), Sarivan Ioana (E: 1831, 43, 45, 47, 50, 58—60, 63, 64, 66), Sterea Ene (E: 1819—22, 24, 30, 32, 36, 37, 41), Stoian Violeta (E: 1830, 35—37, 40, 43—45, 48, 51), Suşoi Amalia (5296, 97, 327, E: 1843—47, 50, 52, 55, 56), Tăutu Teodora (E: 1835, 40, 43, 45, 47, 48, 52, 57, 61). Cl. X. Cultuclu Elena (5231, 48, 49, 57, 61, 70, 77, 83, 85, 315, 32), Halpan Brînduşa (5212, 14, 97, 98, 302, 12, 13, 15, 19, 28, 37, 43, 44, 49), Lucaci Nicolae (5210, 14, 16, 24, 29, 36, 38, 40, 42, 44, 50, 62, 64, 65, 74, 95—97, 302, 07, 11—13, 15, 27, 32, 35, 37, 39, 41, 44, 50), Solomon Ludvig (5210, 14, 299, 38, 40, 45, 50, 59, 62, 65, 74, 96, 97, 302, 07, 11—13, 15, 32, 35, 37, 39, 41, 44, 50). Cl. X. Strasser Ioseph (5207, 08, 10, 12, 21, 23, 24, 31, 38—40, 42—46), Tănase Paul (5212, 14, 39, 40, 43, 46, 56, 58, 60, 66, 67, 81), Tituschneinder Vladimir (5210, 14, 29, 50, 64, 74, 402, 13, 15, 32, 35).

GAIEŞTI (Argeş). **Ş.m.** Cl. X. Ciobanu Viorel (5207, 08, 10, 12, 18, 21, 24, 29, 38, 40, 42, 44—46, 48, 50, 57, 61, 62, 64, 67, 86, 96, 98, 302, 11, 12, 15, 32, 37, 43—45), Ion Alexandru (5110, 12, 13, 16, 20, 23, 35, 39, 43, 52, 55, 57, 60, 63, 64, 67, 70, 75, 79, 83, 93, 95, 96, 98, 207, 08, 10, 12, 23, 29, 38—40, 42—46, 48—53, 56, 57, 59—62, 65—68, 70, 71).

GIURGIU. **Ş.m.** Cl. VIII. **Ivanov Ilie** (5216, 18, 23, 24, 48—50, 56—62, 66—70, 86, 96, 311, 27, 39, 44, 45, E: 1817, 18, 23, 25—28, 30, 32, 33, 35—37, 39, 41, 43—45, 50—53). Cl. IX. Gheorghe Anton (5216, 24, 48, 56, 59, 60, 62, 66, 67, 96, 313, 27, 39, 40, 45, 61, 71, 97, 98, 305, 06, 09, 11, 14, 17, 28, 29, 43, 44, 55, 92, 93, 95). Cl. XI. **Grozeanu Ion** (5207, 08, 10, 12, 16, 24, 31, 36, 38—40, 42, 44—46, 48, 50, 51, 53, 57, 60, 61, 66, 67, 74, 83, 86, 95—97, 312, 13, 15, 27, 35, 37, 39, 41, 43—45).

HAŢEG. **Ş.m.** Cl. IX. Petriu Emil (5208, 12, 16, 18, 24, 31, 36, 38, 39, 42—44).

HUNEDOARA. **Ş.m.** Cl. X. Vaida Victor (5217, 24, 36, 308, 11, 13, 15, 37, 43—45). Cl. XI. Hajos Ladislau (5240, 45, 96, 302, 05, 13—15, 19, 37, 39, 44, 45).

HUŞI. **Ş.m. Cuza Vodă.** Cl. X. **Patraş Mihai** (5207, 08, 10, 14, 16, 24, 31, 40, 42, 44—46, 48, 50, 57—62, 66, 67, 70, 74, 95, 96, 302, 05, 11—13, 15, 37, 44, 45). **Ş.m. M. Kogălniceanu.** Cl. XI. Chetraru Mihai (5248, 49, 52, 59—61, 67, 69, 70, 74, 78, 83, 86, 90, 94, 95). Absolvent Dolteanu Temistocle (5207, 08, 10, 11, 14, 24, 27, 30, 36, 38, 48, 50, 52, 53, 56, 58, 61, 62, 65, 67, 72, 74, 84—87).

IAŞI. **Ş.m. 1.** Cl. X. Goldemberg Daniel (5207, 08, 10, 12, 14, 16—18, 24, 31, 37—40, 42, 44—46). **Ş.m. 2.** Cl. XI. Leonte Mariana (5207, 08, 10, 24, 31, 36, 40, 42, 43, 45, 46), Pasicina Valeria (5210, 23, 24, 31, 36, 48, 49, 51, 61, 70, 96—98, 302, 10—12, 17, 21, 41, 44, 47). **Ş.m. 3.** Cl. X. **Serţer Irvin** (5207, 08, 10, 14, 16, 17, 21, 24, 29, 31, 36, 48—51, 57, 59, 61, 66, 67, 71, 74, 81, 83, 84, 86, 96, 98, 302, 07, 12—15, 19, 27, 32, 35, 37, 39). **Ş.m. 6.** Cl. X. Bradu Brînduşa (5217, 42, 44, 46, 57, 59, 66, 67, 301, 02, 11, 15, 27, 41, 43—45), Cogan

Hary (5250, 58, 60, 62, 64, 66, 67, 86, 95, 96, 313, 15, 41, 44, 45). Ş.m. 7. Cl. VIII. Nicolau Mihai (E: 1824, 29, 30, 31, 41, 43, 47, 51; 5208, 56, 62, 97, 327), Tebeanu Teodor (E: 1830, 43, 44, 47, 57, 66, 5248, 57, 61, 93, 339, 45).

IANCA. Ş.m. Cl. VIII. Tăbîrcă Virgil (E: 1830, 32, 36, 43, 45, 47, 48, 64, 67). Absolvent Oancea Gheorghe (5248, 57—64, 67, 70, 74, 82, 85—88, 92—95).

LIPOVA. Ş.m. Pătrugan Victor (5208, 10, 12, 14, 34, 40, 42, 44, 51, 53, 59—61, 67, 78, 85, 5302, 12, 13, 15, 17, 21, 27, 37, 44, 49).

LUGOJ. Şc. elem. nr. 5. Cl. VII. Ploscaru Gabriel (E: 1830, 31, 36, 37, 43, 47, 48, 54). Ş.m. 1. Cl. VIII. Ambruş Mircea (E: 1830, 31, 33, 36, 37, 39, 41, 43—45, 47—51, 53; 5248—50, 57, 59—61, 66, 67, 70, 75, 96—98, 302, 07, 13, 14, 32, 34, 35, 39, 49, 50), Şerb Ioan (5208, 17, 18, 24, 29, 31, 38, 42, 44, 48, 49, 56—62, 64, 66, 70, 71, 84, 86, 96, 97, 326, 27, 43, 45), Silaschi Ioan (E: 1830, 31, 33, 36, 37, 39, 41, 43—45, 47, 49, 51, 52, 5242, 48, 57, 59—61, 67, 70, 74, 75, 96, 97, 99, 313, 14, 27, 49, 50). Cl. IX. Cimponeru Traian (5227, 45, 46, 48—51, 53, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 70, 71, 74, 81, 86, 89, 96, 307, 11, 12, 19, 24, 32, 34, 40, 45, 49, 52).

MANGALIA. Absolvent Stănăşilă Constantin (5214, 42, 46—48, 50, 53, 59—64, 67, 70, 71, 73, 78, 81, 83, 85—88, 91, 96, 97, 53, 13, 31, 24).

MAIERENI. Şc. de 8 ani. Cl. VII. Raab Johanna (E: 1843—45, 49, 54, 55), Gertruda Melcher (E: 1843—45, 49, 54, 55), Kovacs Holdegard (E: 1843—45, 49, 54, 55).

MORENI. Ş.m. Cl. VIII. Dogărescu Lavinia (E: 1830, 35—37, 41, 43, 57, 58, 64, 66, 5248, 57, 70, 77, 96, 311). Absolvent Moraru Ion (5207—12, 14, 24—26, 28, 30, 36, 39—41, 44—50, 55—64, 66, 67, 73—75, 83—89, 91, 95).

MOLDOVA NOUĂ. Ş.m. Cl. VIII. Iancovici Elena (E: 1834, 45, 51, 53, 57, 58, 62, 64).

OCNA MUREŞ. Ş.m.m. Cl. X. Oprea Ovidiu (5212, 38—40, 64, 66, 67, 332, 43—45).

ORAVIŢA. Ş.m.m. Cl. VII. Florescu Florian (E: 1843, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 58, 60, 62—64, 66, 395).

ORADEA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Serghel Traian (E: 1816, 18, 19, 22, 30, 31, 33, 35—37, 39—41; 5212, 38, 39, 42—44, 48, 66). Cl. X. Stănciulescu Carmen (5207, 08, 12, 14, 16, 17, 21, 22, 24, 31, 32, 40, 42, 44, 48—50, 52, 53, 57, 59—61, 66, 67, 70, 71, 74, 78, 81, 83, 85, 86, 97, 98, 302, 05, 12, 13, 15, 41, 43—45), Toma Dragomir (5212, 22, 23, 34, 39, 45, 46, 50, 51, 64, 66, 74, 79, 85, 86, 87, 96—99, 300—02, 05—08, 11—15, 19, 21, 27, 32, 35, 37, 41, 43—45, 49, 50). Ş.m. 4. Cl. VIII. Fleischer Gheorghe (E: 1831, 33, 43—47, 5258, 62, 70, 96, 97, 327, 39, 43, 44), Pleşa Remus (E: 1830—32, 35—37, 41, 43, 44, 47, 53, 5258, 59, 61). Cl. IX. Pleşa Romulus (5217, 18, 21, 24, 31, 38, 39, 42—44, 48—51, 57—59, 61, 62, 66, 70).

ORĂŞTIE. Ş.m. Aurel Vlaicu. Cl. VIII. Hîndorean Constantin (E: 1816—18, 20, 23, 24, 28, 30, 35, 38).

OŢELUL ROŞU. Ş.m.m. Cl. XI. Munteanu Elena (5111, 17, 42, 57, 59, 62, 67—70, 5207—11, 48, 49, 54—61, 63, 66, 67, 70, 74, 75, 80, 81, 83—89).

PAŞCANI. Ş.m. C. Burcă. Cl. VIII. Azoiţei Vasile (E: 1816, 18, 20, 21, 30, 31, 36, 37, 43, 45, 5242, 59, 70, 344). Cl. X. Beraru Georgeta (5214, 20, 46, 51, 59, 61, 70, 95, 302, 12, 13, 44), Lupu Mariana (5214, 20, 46, 51, 59, 61, 70, 95, 302, 12, 13, 44), Moraru Tatiana (5214, 20, 46, 51, 59, 61, 70, 95, 302, 12, 13, 44), Tofan Elena (5214, 20, 46, 51, 59, 61, 70, 95, 302, 12, 13, 44).

PECINEAGA. Şc. de 8 ani. Cl. VII. Zamfir Bucura (E: 1802, 03, 06—11, 14).

PREDEAL. Absolvent Boroş Andrei (5221, 24, 27, 36, 41, 47, 50, 59, 61, 66, 67, 95), Ivaşcu Dumitru (5207—09, 11, 16, 17, 21, 24, 25, 29—31, 34).

PETROŞENI (Hunedoara). Ş.m.m. Cl. VIII. Oprişiu Cornel (E: 1830, 31, 33, 36—38, 41, 44—47, 49, 53, 5208, 12, 23, 24, 36, 42, 44, 48, 56, 57, 59, 61, 62, 70, 71, 83, 332, 39, 43, 45).

PIATRA NEAMŢ. Ş.m. 2. Cl. X. Teodorescu Voltaire (5216, 42, 45, 302, 12, 15, 41, 44, 49).

PITEŞTI. Ş.m. 1. Cl. IX. Marin Dumitru (5248—51, 57, 59, 61, 70, 74, 81, 83, 86, 96, 98, 318, 27, 28, 49), Mihăilescu Ion (5208, 12, 14—18, 21, 23, 31, 34, 36, 37, 39, 42, 44). Ş.m. 2. Cl. XI. Achim Ioan (5207—10, 24—26, 29, 31, 34, 48—51, 53, 57, 61, 70, 85, 86, 96—98). Ş.m. 3. Cl. IX. Ionescu Marcel (5296—99, 302, 05, 12—14, 32, 40, 43, 45, 47, 49, 50). Absolvent Diaconescu I. Ion (5248—50, 54, 55, 60—63, 67, 70, 71, 74, 81, 83, 85, 87, 88, 94—301, 03, 06, 08, 10, 13—17, 24, 27, 31, 32, 34—39, 42—45, 48, 52).

PLOIEŞTI. Ş.m. 1. Cl. VI. Breţcanu Sabina (E: 1803, 41, 43, 45, 46, 63, 64, 66). Cl. VIII. Soare Cristel (E:

1830—32, 35—37, 41, 43—48, 50, 51, 58—60, 62—64, 66, 67, 5248, 49, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 70, 344, 45, 95), Vasilescu Ion (5296, 97, 306—09, 17, 27, 29, 39, 43, 45). Cl. X. Daschievici Virgil (5158, 70, 76, 77, 85, 92, 207, 08, 10, 18, 24, 29, 96, 93, 313, 15, 32, 37), Pîrvulescu Constantin (5218, 34, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 74, 83, 84, 86, 95). Ş.m. 2. Cl. X. Căpuz Maria (5248, 49, 56, 57, 60—62, 71, 72, 77, 83, 87, 302, 12), Săvulescu Alexandru (5207, 10, 14, 17, 21, 24, 29, 31, 34, 48, 49, 51—53, 57, 59—61, 66, 71). Absolvent **Butaciu Nicolae** (5207—12, 14, 18, 21, 24, 26, 27, 29—31, 36, 39, 41, 42, 44, 48—50, 52, 55, 57—64, 66, 67, 70, 75, 78, 81, 83, 85, 86, 96, 302, 13, 15, 19, 37, 39, 45, 52).

PĂTÎRLAGELE (Ploieşti). Ş.m. Cl. VIII. Pavel Dumitru (E: 1823, 45, 46, 5218, 44, 343).

PUCIOASA. Ş.m. Cl. VIII. Diaconu Ileana (E: 1823, 28, 30, 32, 36, 37, 39—41, 47), Diaconu Eugenia (E: 1823, 24, 29, 30, 35—37, 4238, 42, 48), Niţă Maria (E: 1816—18, 23—25, 29, 35—37, 4231), Oprescu Ileana (E: 1823, 28, 30, 32, 36, 37, 39—41, 47), Vlad Gheorghe (E: 1816, 27—30, 36, 37, 43, 47). Cl. IX. **Matei Gheorghe** (5211, 12, 14, 16, 23, 25, 32, 34, 38, 42, 43, 48—51, 56—61, 64, 66—71, 74, 75, 78, 81, 83, 85, 86, 96—99, 301, 02, 05—10, 12—15, 17—19, 26, 27, 38, 42, 44, 45, 47, 48, 50). Cl. X. **Anca Dorinel** (5158, 61, 74, 98, 212, 16, 17, 23, 37—40, 43—45, 48, 50, 52, 53, 57—62, 64, 66, 67, 70, 71, 78, 81, 85, 86, 92, 313, 15, 19, 32, 35, 44, 45), Grigorescu Constantin (5231, 302, 12, 15, 19, 35, 37, 44, 45, 49), **Popa Alexandru** (5210, 12, 14, 17, 18, 21, 38, 39, 43, 48, 50, 52, 53, 57—61, 70, 81—86, 92, 95, 302, 12—14, 19, 32, 35, 36, 39, 43—45, 49). Absolvent **Banu Gheorghe** (5207—12, 14, 16, 21, 24, 26, 27, 31, 36, 39—51, 53, 54, 57—64, 66, 67, 70, 71, 74, 83—88, 94, 95).

RĂDĂUŢI. Ş.m. 2. Cl. VIII. **Weinstein Jack** (E: 1816—31, 36, 37, 5208, 12, 16, 18, 24, 31, 38—45). Cl. XI. Kummel Iacob (5242, 96, 302, 12, 13, 15, 19, 27, 28, 35, 37, 49).

RÎMNICU VILCEA. Ş.m. V. **Roaită.** Cl. XI. Neghină Adriana (207, 08, 10, 12, 24, 40, 42—46).

RÎMNICU SĂRAT. Cl. X. Micu Nicolae (5248—50, 52, 53, 59—61, 65, 67, 70, 71, 83, 84, 86, 300—02, 13, 15, 35, 37).

ROMAN. Ş.m. Cl. XI. Niculescu G. (5207—11, 14, 17, 18, 21, 24, 31, 32, 34, 36, 48—50, 56—62, 66, 67, 70, 71, 81, 319, 49).

ROŞIORII DE VEDE. Ş.m. Cl. VIII. Diaconescu Irina (E: 1830, 36, 37, 42, 45, 47, 64). Cl. XI. Nebunescu Alexandru (5157, 60, 63, 71, 75, 76, 88, 93, 95, 207, 08, 10, 21).

SĂVENI (Ploieşti). Ş.m. Cl. IX. Calacudă Henrietta (5250, 57—59, 61, 62, 74, 97, 313, 32, 40, 43, 45, 47), **Savitescu Gheorghe** (5208, 12, 14, 21, 24, 31, 36, 38, 39, 42—45, 48—50, 57, 59—62, 66, 70, 74, 81, 85, 307, 11, 14, 28, 32, 39, 40, 43—47, 49, 52). Cl. X. Mănăluţă Maria (5207, 08, 10, 12, 14, 16, 24, 38, 42, 44, 46, 48, 49, 56, 59—62, 66, 67, 70, 84, 306), Sănduc Medeea (5207, 08, 10, 18, 24, 36, 38—40, 42—46, 48, 57—62, 64, 67, 70, 73, 95, 96, 312, 13, 44). Cl. XI. **Zoler David** (5207—12, 14, 21, 24, 25, 30, 31, 36, 38, 39, 42—45, 47, 50, 59, 60, 61, 74, 81, 85—89, 302, 07, 12, 14, 15, 28, 34, 37, 49, 52).

SĂRMAŞ. Ş.m. Cl. IX. Borş Iacob (5201, 21, 34, 39, 44, 49—51, 57—59, 62, 66, 74, 86, 98, 311, 17, 32).

SATU MARE. Ş.m. M. Eminescu. Cl. X. Pop Mircea (5297, 98, 302, 15, 27, 28, 32, 35—37, 41, 50, 55, 92). Ş.m. Kölcsey Ferencz. Cl. VIII. Sutrulyovics Zoltan (E: 1843, 45, 47, 63, 64, 66, 5248, 49, 57, 61, 70, 96). Absolvent Pop Virgil (5207—09, 11, 12, 31, 39, 42, 44, 45, 60, 81, 85, 86, 88, 94).

SIBIU. Ş.m. 1. Cl. X. Bogus Mihai (5248, 50, 51, 57, 59, 61, 62, 70, 96, 98, 343, 45). Cl. XI. Mihu Dumitru (5259, 60, 67, 70, 82, 85, 302, 15, 27, 44). Ş.m. 3. Cl. VIII. Bart Radu (E: 1816, 18, 20, 23, 24, 29—31, 35, 36, 51), Boac Mariuca (E: 1823—25, 33, 34, 38, 42—52, 55, 56, 200, 31, 48, 70, 71, 328, 29, 43, 45, 49), Boieriu Maria (E: 1831—33, 36, 37, 41, 43—45, 48), **Dăncilă Ioan** (E: 1843—60, 62—64, 66, 67, 69, 70, 5221, 29, 31, 50, 57, 64, 66, 95, 97, 305, 06, 13, 14, 19, 27, 32, 44, 45, 49, 65, 92), Dinulescu Aurelian (E: 1829—38, 40—42), Dobrotă Marilena (E: 1831, 34, 45, 49, 51, 53, 55, 56, 5349, 57, 58, 61, 70), Helju Doina (E: 1830, 32, 36, 37, 41, 43, 57, 59, 62, 70), **Loşiţă Ileana** (E: 1830—34, 37, 38, 43—47, 52, 56, 58—68, 5258, 61, 71, 77, 97, 327, 92), **Marinuş Radu** (E: 1830, 31, 35—37, 41, 43—47, 52, 53, 57—60, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 5248, 49, 57, 59—62, 70, 96, 97, 345). **Şc. tehnică de construcţii.** Untch Wilhelm (5209—11, 24, 25, 42, 44, 48, 56, 57, 61, 67, 85, 87, 88, 95). **Şc. militară superioară.** Burtan Nicu

(5209, 11, 14, 25, 27, 36, 48, 50, 57, 58, 92, 93, 96, 315, 52).

SIGHET. Ş.m. Cl. IX. Iacobovici Maier (5212, 18, 21, 24, 38, 39, 42, 44, 48, 49, 57, 59).

SIGHIŞOARA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Predescu Gheorghe (E: 1816—20, 22, 23, 25, 28, 5208, 16, 18, 24). Cl. X. Vonica Octavian (5248, 53, 74, 301, 02, 06, 13, 15, 27, 38, 40, 41, 43—45, 47). Cl. XI. **Serachitopol Adrian** (5216, 18, 48—53, 56, 57, 59—62, 64, 66, 70, 72, 78, 84, 92, 93, 95, 96, 98, 301, 05, 09, 11—15, 37, 41, 43—46, 55, 65, 84, 96). Absolvent Ajtay Maria (5209, 36, 76, 86—88, 96, 307, 12, 40, 43—45).

SINAIA. Absolvent **Benche Cristian** (5296—98, 302—04, 06—09, 11—16, 20, 23—25, 27, 29, 31, 34, 37, 39, 40, 43—45, 47, 49, 52).

SLATINA. Ş.m. **Tudor Vladimirescu.** Cl. IX. Biltz Liliana (5217, 21, 24, 34, 39, 44, 68, 74, 85, 317, 21, 40), Ionescu Mihai (5221, 36, 39, 42, 44, 50, 62, 66, 340, 44, 45, 47), Popescu Mihai (5218, 21, 24, 31, 70, 86, 317, 27, 50, 51).

SLĂNIC. Ş.m. Cl. IX. **Alante Constantin** (5152, 54, 55, 93, 95, 99, 200, 08, 12, 24, 31, 38, 39, 42—44, 48—51, 56—62, 70, 71), **Baboc Nestor** (5284—51, 57—62, 64, 66, 70, 74, 81, 96—98, 305, 13, 17, 27, 32, 39, 40, 43—45, 47, 55, 72, 84, 92, 95), Dragu Cornel (5208, 31, 48—51, 57—59, 61, 62, 66, 70). Cl. X. **Rădan Sorin** (5067, 73, 74, 84, 89, 96, 100, 03, 08, 10, 15, 16, 18—20, 25, 35, 39, 41, 44, 45, 55, 60, 63, 70, 75, 80, 93, 95, 200, 07, 08, 10, 12, 21, 24, 31, 38—40, 42, 44, 46, 48—50, 52, 53, 56—62, 66, 67, 70, 74, 81, 88, 95—98, 302, 12, 13, 15, 39, 41, 43—45).

STREHAIA. Ş.m. Cl. X. Mîndreanu Eugen (5248, 51, 57, 59, 62, 64, 66, 89, 313, 14, 43, 45, 47).

TECUCI. Ş.m. 2. Cl. VIII. Oprişan Teodor (E: 1857—64, 66—68, 70).

TÎRNĂVENI. Ş.m. Al. Sahia. Cl. X. Chiuciuşan Ioan (5224, 31, 39, 42, 44, 48, 50, 57, 84, 86, 95, 98, 314, 39, 40, 43, 45).

TÎRGOVIŞTE. Şc. elem. nr. 2. Cl. V. Burghelea Oana (E: 1818, 20, 22, 30, 36, 59, 63). Ş.m. 3. Cl. IX. Ionescu Mircea (5248—50, 56, 58, 59, 62, 64, 66, 70, 86). Ş.m. serală a uzinei mecanice. Cl. VIII. Vişan Titu (E: 1816, 20, 30, 31, 32, 36, 41, 47, 5238, 42, 43).

TIMIŞOARA. Ş.m. 1 Cl. VIII. Popescu Gabriela (E: 1816—18, 20—24, 26, 28, 29). Cl. X. **Stern Toma** (5248, 50, 52, 58, 59, 61, 63, 71, 74, 80—84, 87, 88—90, 93, 96, 99, 305, 08—11, 13, 15, 18, 21, 22, 31—34, 36, 37, 40, 41, 50, 51, 55, 72, 92, 95).

Ş.m. 5. Cl. XI. **Lustig Gheorghe** (5218, 28, 34, 38—42, 44—46, 49, 51, 52, 55, 56, 58—60, 62—69, 75, 77—79, 93, 96—302, 05, 12—15, 18—21, 28, 30, 32—37, 49—52). Absolvenţi: **Eremia Dinu** (5207—12, 18, 24, 26, 30, 31, 36, 38, 39, 42—48, 50, 53, 54, 57—63, 66, 67, 70, 74, 81, 83, 85—88, 94, 95), Grozavu M. (5158—62, 64, 67—71, 73, 78, 81, 91, 93, 94, 96—98, 202, 20), **Pavel Radu** (5224, 37, 38, 40, 42, 44—46, 48, 50, 56, 57, 59—63, 66, 67, 83, 84, 90, 95), **Vlădorcanu Cornel** (5082, 83, 87, 99, 110, 11, 16, 20, 21, 42, 48, 49, 60, 61, 67, 75, 89, 207—11, 24, 25, 31, 36, 47, 48, 53, 57, 59, 61, 62, 68, 70, 74, 81, 83, 85, 86, 87, 88, 94).

TÎRGU JIU. Ş.m. 1. Cl. VIII. Isac Horaţiu (E: 1816, 17, 23—25, 28—31, 36, 37, 43, 224, 29, 31). Ş.m. 2. Cl. IX. Păsăreanu Nicolae (5248, 50, 57, 59, 61, 74, 96, 98, 305, 40).

TÎRGU MUREŞ. Ş.m. Al. Papiu Ilarian. Cl. VIII. Gersch Egon (MFL: 806—08, 10, 12).

TRUŞEŞTI (Suceava). Cl. VIII. Turculeţ Demostene (E: 1818—20, 24, 26, 28—32, 35—37, 41, 43—45, 47—50, 54, 238, 42, 57, 61, 71, 343, 35, 39).

TURNU MĂGURELE. Ş.m. Unirea. Cl. IX. **Drăgulinescu Dumitru** (5207, 08, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 29, 31, 34, 37, 42, 44, 48—51, 53, 57—62, 70, 71, 74, 78, 79, 81, 83, 86, 92, 95). Cl. X. Cojocaru Florian (5238—52, 57, 59, 60, 61, 64, 66, 67, 71, 73, 86, 95).

TURDA. Ş.m. 1. Cl. IX. Pogăceanu Constantin (5248, 50, 51, 57, 61, 62, 314, 15, 35), Tulbure Ovidiu (5250, 51, 59, 61, 70, 314, 47, 55, 57, 92). Cl. X. **Apostol Adriana** (5207, 08, 10, 12, 17, 24, 31, 35, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 50—53, 56—62, 64, 67, 70, 74, 86, 90, 95, 97, 313, 14, 27, 32, 41, 44, 45).

TULCEA. Ş.m. 1. Cl. XI. **Iurov Gheorghe** (5207, 08, 10, 12, 17, 21, 24, 31, 32, 36, 38, 39, 40, 42—46, 48—50, 53, 56—62, 66, 67, 70, 74, 81—83, 95, 98, 302, 12, 13, 15, 35, 37, 41, 43—45).

VASLUI. Ş.m. 2. Cl. VIII. Grosu Margareta (E: 1816, 17, 26, 29, 30, 36, 37, 207, 08, 10, 12, 18, 21, 24, 31, 32, 38, 40, 42, 44, 48, 53). Absolvent Cuţişteanu Aron (5207, 09—13, 17, 18, 21, 24—27, 29—32, 36, 38—47).

VATRA DORNEI. Absolvent Morozan Petre (5273, 96, 302, 12, 15, 17, 20, 23, 30, 37, 39, 42, 48).

VĂLENII DE MUNTE. Ş.m. Cl. VIII. Moldoveanu Adrian (E: 1830, 31, 35—37, 44, 58—61, 66, 70, 71), Păiş Ion (E: 1816, 17, 19, 22, 30, 42, 5258—62, 96), Popa Ion (E: 1816, 18—21, 30, 36, 5258—61, 71, 81). Cl. IX. Zaharia Ion (5207, 08, 10, 24, 28, 29, 31, 43, 57, 59, 61, 70, 74).

VOIEVOZI. Ş.m.m. Cl. IX. Drăghici Marin (5212, 37, 42, 44, 49, 51, 56, 57, 59, 60, 66, 70, 92, 93).

ZALĂU. **Grupul şcolar Simion Bărnuţiu.** Cl. VII. Mura Anna (MFL: 806—16), Kovacs Ilona (MFL 806—16), Fülöp György (MFL 806—08, 12—14, 18, 19, 21, 23, 25—28).

ERATĂ

— La problema 5381 se va corecta ... cercului înscris şi cu centrele cercurilor exînscrise.

— La problema 5317 în loc de *DC* se va scrie *DL*.

— La problema 5407 în loc de axele egale se va scrie masele egale.

MUSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983 ORSZÁGOS

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Nu se vor separa problemele de matematică de cele de fizică și vor fi trimise în același plic, așezate în ordinea numerică.

Se primesc lunar într-un plic soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorul pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. *Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 36 soluții bune.*

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce, să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie : $\parallel$ = ; $\sim$; $\ast^{\ast}_{\ast}$; $\perp$; $\parallel$; Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor IX—XI sau studenții vor trimite soluții la problemele propuse pentru clasele VIII—XI. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.F.—B sau M.F.L. Problemele rezolvate de matematică și fizică vor fi expediate odată în cursul unei luni într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului.

Elevii claselor V—VII vor fi anunțați la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit cel puțin 7 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor VIII—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— Colaboratorii G.M.F.-B, profesori și elevi, sînt rugați să trimită îndată redacției, fișa completată cu activitatea extrașcolară și în cercurile de elevi pe anul 1961—1962, conform celor publicate în nr. 1, 1962, pag. 30. Activitatea rezolvitorilor din nr. 9—12 ale G.M.F.-B se va trece de către redacție.

Evidențiații de cel puțin 2 ori pot trimite totalizarea problemelor rezolvate și anunțate în nr. 1—9, G.M.F.-B-1962.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

În G.M.F. B. nr. 3, pag. 153 s-a publicat : *Un concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică.* Participanții la acest concurs pot fi : profesori, ingineri, maiștri, studenți sau elevi. Concursul se încheie la 1.XI.1962.

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1.	E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2.	A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3.	N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4.	P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5.	I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6.	GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7.	H. IONESCU	Calcule numerice.
8.	A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi.
9.	A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10.	O. SACTER	Despre conice și alte curbe.
11.	ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12.	F. I. ZIGHEL	Cometele.
13.	S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14.	V. ATANASIU	Structura materiei.
15.	V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16.	O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17.	B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18.	M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19.	A. KAHANE	Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20.	GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, ed. IV-a (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21.	A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22.	N. STĂNESCU	Electronul.
23.	V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24.	G. N. BERMAN	Cicloida.
25.	C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26.	AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27.	M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28.	C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29.	I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
30.	H. STEINHAUS	Caleidoscop matematic.
31.	C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura, originea și evoluția lor.
32.	C. DRIMBĂ	Elemente de mecanică cerească
33.	C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34.	NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35.	GH. A. CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36.	G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37.	C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38.	O. SACTER	Olimpiade matematice.
39.	A. I. MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
40.	I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
41.	A. I. HINCIN	Fracții continue.
42.	V. A. USPENSKI	Unele aplicații ale mecanicii în matematică.
43.	V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44.	G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.
45.	A. IAGLOM și I. IAGLOM	Probleme neelementare tratate elementar.
46.	G. CIUCU și G. SIMBOIAN	Culegere de probleme de calculul probabilităților și statistică
47.	N. D. FEDOROV	Ciclotronul.
48.	O. SAGTER	Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente.

Întreprinderea Poligrafică Nr. 6 — c. 4761

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XIII octombrie 1962

10

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 10 — octombrie 1962

SUMARUL

		Pag.
1.	Sărbătorim a 45-a aniversare a Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie	577
2.	P. L. Cebişev	579
3.	Din istoricul maşinilor electrice	581
4.	Figuri geometrice, cu elemente inaccesibile. Construcţii grafice, de Lev Lopovok (U.R.S.S.)	589
5.	Aplicaţii ale calculului vectorial de D. Bătineţu	595
6.	Caleidoscop fizic	602
7.	Note matematice de Corneliu Zamfir şi Anton Ghica	605
8.	Probleme rezolvate (4771, 4787, 4790, 4795, 4799; E: 1703, 1707, 1709, 1717, 1720, 1724, 1764, 1766, 1779; MFL: E: 760—766, 4613)	607
9.	Chestiuni de examen (5472—5477)	622
10.	Probleme propuse (5478—5506)	623
11.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 1894—1906)	628
12.	Cărţi noi	629
13.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	630

ANUL XIII **10** OCTOMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Cristea I.*, asistent; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Kiss E.*, conf. univ.; *Koch Fr.*, lector; *Kovacs K.*, conf. univ.; *Lévai Şt.*, asistent; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel 14.46.53 — Bucureşti 1

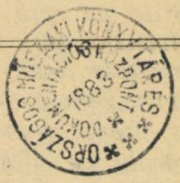
Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 10 octombrie, 1962



SĂRBĂTORIM A 45-A ANIVERSARE A MARII REVOLUȚII SOCIALISTE DIN OCTOMBRIE

O prietenie profundă, frățească, leagă țara noastră de Marea Uniune Sovietică. Ea este expresia relațiilor de tip nou, existente între statele socialiste, expresia prețuirii și încrederii reciproce, a țelului comun: triumful socialismului și comunismului în lume. Această prietenie este o componentă solidă a unității de monolit și a forței sistemului mondial socialist.

Prietenia dintre poporul romîn și poporul sovietic are rădăcini puternice, adînc înfipte în istorie. Ea rodește pe trunchiul prieteniei de totdeauna dintre poporul romîn și poporul rus.

Lupta seculară a poporului nostru cu imperiul otoman, pentru independență, a avut necontenit sprijinul poporului rus. Sînt multe cîmpuri de luptă care au în adînc, unit pe veci, ca la Plevna, sîngele multor fii ai celor două popoare, curs în războaiele pentru cucerirea independenței țării noastre și menținerea acesteia.

Prietenia noastră cu poporul sovietic s-a cimentat în lupta dusă împotriva cotropitorilor fasciști. Sprijinul dat de armata sovietică pentru eliberarea țării de sub jugul fascist și lupta comună împotriva cotropitorilor pînă la victoria finală din cel de al doilea război mondial au întărit această prietenie transformînd-o într-o prietenie frățească de nezdruncinat.

Poporul nostru sărbătorește în aceste zile alături de Marea și victorioasa Uniune Sovietică împlinirea a 45 de ani de la Marea Revoluție din Octombrie.

Marele Octombrie are o importanță istorică mondială, pentru că a deschis o eră nouă în istoria omenirii: era eliberării omului de exploatare, era construirii și triumfului orînduirii socialiste în lume, a eliberării popoarelor din robia colonialismului, a luptei pentru statornicirea păcii ca principiu al relațiilor dintre state.

Revoluția socialistă din Octombrie a instaurat în Rusia dictatura proletariatului, a creat un stat de tip nou — statul socialist sovietic, o democrație de tip nou — democrația pentru oamenii muncii. Marea Revoluție a creat condițiile pentru lichidarea bazei economice a capitaliștilor și a moșierilor, a proclamat și a asigurat egalitatea în drepturi a tuturor națiunilor.

Revoluția socialistă din Rusia a însemnat scindarea lumii în două sisteme economice, politice, ideologice, opuse și prin aceasta a zguduit din temelii tot edificiul capitalismului mondial.

Pentru clasa muncitoare din Romînia exploatată de burghezie și de moșierime, Marea Revoluție din Octombrie a constituit o sevă proaspătă de avînt revoluționar în lupta dusă împotriva exploatatorilor.

În cei 45 de ani care au trecut de la Marea Revoluție din Octombrie s-au produs transformări uriașe în viața omenirii. Socialismul a cucerit pas cu pas pozițiile lumii vechi.

Revoluția socialistă înfăptuită într-o serie de țări din Europa și Asia, a avut drept consecință, formarea sistemului mondial socialist, în fruntea căruia se află prima țară care a construit socialismul în lume, Marea Uniune Sovietică. Sistemul mondial socialist cuprinde mai mult decît un sfert din suprafața globului și peste 35% din populația acestuia. Forța sistemului socialist crește necontenit, economia sa se dezvoltă în ritm vertiginos, mult superior economiei capitaliste. Astfel, dacă în anul 1955 producția industrială a țărilor socialiste reprezenta 27% din producția mondială, acest procent a crescut la 36% în 1960. Dezvoltarea potențialului economic al țărilor socialiste are ca urmare și amplificarea schimburilor comerciale cu țările necuprinse în sistemul socialist și lichidarea monopolului capitalist pe piețele acestor țări. Este semnificativ — în această privință — că țările imperialiste au pierdut monopolul aprovizionării pieței mondiale nesocialiste cu mașini, utilaje, aparate. Ca exemplu apropiat avem exportul crescînd de utilaj petrolifer, tractoare, vagoane etc. pe care țara noastră îl face în țări nesocialiste.

Astăzi, sistemul socialist este factorul hotărîtor al dezvoltării mondiale.

Știința și tehnica sovietică sînt cele mai avansate din lume, sursa unor realizări epocale în cucerirea cosmosului, în transformarea naturii.

În aceste condiții crește și se întărește prietenia romîno-sovietică, colaborarea în toate domeniile economiei, schimburile culturale, colaborarea științifică. Tehnicienii romîni valorifică bogata experiență pe care Uniunea Sovietică o are în domeniul industriei moderne. În agricultură sînt larg fructificate metodele agrotehnice înaintate folosite în U.R.S.S. Pentru însușirea temeinică a cuceririlor științei și tehnicii sovietice, au fost traduse în limba romînă și tipărite, numeroase cărți de specialitate, opere ale celor mai de seamă oameni de știință și de tehnică ai Uniunii Sovietice. Bogată este și lista cărților de matematici tradusă din limba rusă, unele publicate chiar în Biblioteca Societății de Matematică și Fizică.

În fiecare an tineri absolvenți ai institutiilor noastre de învățămînt superior merg să urmeze aspirantura sau să se specializeze la școlile științifice sovietice create și conduse de mari personalități științifice de renume mondial.

A devenit o tradiție schimbul anual de cadre didactice și de oameni de știință pentru conferințe de specialitate.

Poporul romîn are o dragoste frățească pentru poporul sovietic. Cu multă căldură a fost întîmpinată pretutindeni de oamenii muncii delegația de partid și guvernamentală a U.R.S.S., în frunte cu Nikita Sergheevici Hrușciov, care a vizitat țara noastră în cursul lunii iunie a acestui an.

Cu aceeași căldură a fost primită de oamenii sovietici în august 1961 delegația de partid și guvernamentală condusă de tov. Gh. Gheorghiu-Dej în timpul vizitei făcută în U.R.S.S.

Prietenia romîno-sovietică va fi veșnică. În inima oamenilor muncii, în inima tineretului din patria noastră trăiește floarea prieteniei față de Uniunea Sovietică, față de oamenii sovietici. Această floare dă rod în munca tineretului nostru, va rodi și în munca lui viitoare dusă alături de constructorii sovietici ai comunismului.

P. L. CEBÎȘEV
(1821—1894)

Marele matematician rus *Pafnuti Lvovici Cebîșev* a lăsat o urmă de neșters în istoria științei mondiale și ruse. Nenumăratele lucrări științifice în aproape toate domeniile matematicii și mecanicii aplicate, profunde în conținut și strălucite prin metodele de cercetare i-au făurit lui *Cebîșev* gloria unuia dintre cei mai mari reprezentanți ai gîndirii matematice. Bogăția ideilor sale, răspîndite în aceste lucrări, cu toate că au trecut aproape 70 de ani de la moartea creatorului lor, nu și-au pierdut prospețimea și actualitatea. Dezvoltarea lor ulterioară se continuă și în ziua de azi în toate țările, unde bate pasul gîndirii matematice creatoare.

P. L. Cebîșev era accesibil și ajuta pe toți acei care doreau să studieze și care aveau talent pentru aceasta. Datorită acestui fapt, mulți dintre foștii lui elevi au devenit savanți de prim rang; printre ei se numără *A. M. Leapunov* și A. A. Marcov. De la *Cebîșev* pornesc izvoarele multor școli matematice ruse — de teoria probabilităților, de teoria numerelor, de teoria aproximării funcțiilor, de teoria mecanismelor — care își continuă activitatea cu succes și în zilele noastre.

Cebîșev s-a născut la 26 mai 1821 în satul Ocatov din județul Borevsk, gubernia Kaluga. Primele cunoștințe cu privire la scriere și aritmetică le-a căpătat de la mama sa Agrafena Ivanova, iar de limba franceză de la verișoara sa Suhareva, o fată cultă, care probabil a jucat un rol foarte important în educația viitorului matematician. În 1832 familia lui *Cebîșev* s-a mutat la Moscova pentru a pregăti pe Pafnuti Lvovici și pe fratele său mai mare în vederea intrării în universitate. La vîrsta de 16 ani el devine student al universității din Moscova și numai peste un an, pentru o lucrare de matematică cu tema propusă de facultate a fost distins cu

o medalie de argint. Din 1840 situația materială a familiei Cebîșev devine precară și Pafnuti Lvovici a trebuit să-și cîștige singur existența. Această împrejurare și-a pus pecetea asupra caracterului său, făcîndu-l calculat și prevăzător; mai tîrziu, cînd nu mai ducea lipsă de nimic, el nu făcea economii decît pentru a construi modele, aparate și mecanisme.

La vîrsta de 20 de ani *Cebîșev* termină universitatea, iar peste doi ani își publică prima lucrare științifică, urmată curînd de o serie de alte lucrări din ce în ce mai importante, care au atras rapid atenția lumii științifice. La vîrsta de 25 de ani susține la universitatea din Moscova dizertația pentru gradul de magistru, consacrată teoriei probabilităților, iar peste un an este invitat la universitatea din Petersburg, unde se și mută. Aici începe activitatea sa profesorală, căreia îi consacră toate forțele și care s-a continuat pînă la o vîrstă înaintată, cînd renunță de a mai ține lecții, consacrîndu-se în întregime activității științifice, activitate care a durat literalmente pînă în ultima clipă a vieții sale. La 28 de ani el capătă la universitatea din Petersburg, titlul de doctor; ca dizertație a fost cartea sa *„Teoria congruențelor"* de care s-au folosit studenții mai bine de o jumătate de secol, ca de unul dintre cele mai profunde și mai serioase manuale de teoria numerelor. La vîrsta de 32 de ani, academia îl alege pe *Cebîșev* adjunct la catedra de matematici aplicate; peste 6 ani el devine academician ordinar, peste un an este membru corespondent al academiei de științe din Paris, iar în 1874, aceeași academie îl alege ca membru străin. La 8 decembrie 1894, dimineața, *Pafnuti Lvovici Cebîșev* moare așezat la masa de lucru.

Școala matematică din Petersburg se caracteriza prin tendința de a lega strîns problemele matematicii de cele ale științelor naturii și ale tehnicii. Totodată *Cebîșev* a știut să aprindă entuziasmul științific al elevilor săi fiind un exemplu de pedagog și educator științific.

O dată pe săptămînă *Cebîșev* avea o zi de primire, cînd ușile locuinței sale erau deschise pentru oricare ar fi dorit să discute ceva despre cercetările sale. Rar se întîmpla ca cineva să plece fără să se fi îmbogățit cu idei și planuri noi. Contemporanii, și în particular, elevii lui *P. L. Cebîșev* povestesc că el dezvăluia cu plăcere ideile sale nu numai în reuniunile restrînse, dar și în cadrul lecțiilor, care se bucurau de un larg auditoriu. Ca profesor, *Cebîșev* era riguros pînă la pedanterie și îngrijit; niciodată nu a întîrziat și niciodată nu și-a reținut ascultătorii cu nici un minut peste timpul prevăzut. Este interesant să remarcăm încă o trăsătură caracteristică a lecțiilor sale: el preceda orice calcul complicat cu lămurirea scopului și mersului său sub aspectul cel mai general, iar apoi îl expunea amănunțit.

Pe fondul acestei vieți măsurate, fericite, lipsite de zguduiri, în liniștea cabinetului său el desfășura o activitate științifică intensă, căreia îi era sortit să schimbe și să reclădească nu numai fața matematicii ruse, dar să exercite o influență enormă și neîntreruptă în decursul cîtorva generații asupra activității științifice a multor savanți și școli științifice din străinătate. *P. L. Cebîșev* nu era unul dintre acei savanți care îndrăgind o ramură mai mult sau mai puțin restrînsă a științei să-i consacre întreaga sa viață, creînd mai întîi bazele sale și muncind apoi perseverent pentru a dezvolta și perfecționa detaliile. El face parte dintre acei matematicieni multilaterali pe care știința îi consideră printre creatorii

săi și a căror chemare este ca, trecînd dintr-un domeniu în altul să lase în fiecare din ele un șir de idei sau metode strălucite, rezervînd contemporanilor și generațiilor viitoare dezvoltarea consecințelor și detaliilor respective. Aceasta nu înseamnă că el și-a schimbat în fiecare an domeniul de cercetare științifică părăsind definitiv un domeniu după ce în cadrul lui a elaborat unul sau două articole. Nu, se știe că *Cebîșev* s-a ocupat, de exemplu toată viața cu crearea a noi și noi probleme ale celebrei sale teorii a aproximării funcțiilor ; de problemele fundamentale ale teoriei probalităților s-a ocupat în trei rînduri : la începutul, la mijlocul și sfîrșitul drumului său creator. Caracteristic este însă faptul că astfel de domenii alese la el au fost foarte multe (teoria integrării, aproximarea funcțiilor prin polinoame, teoria numerelor, teoria probabilităților, teoria mecanismelor etc.) și că în fiecare din ele el era atras de crearea metodelor fundamentale, generale, de lărgirea cercului de idei și nu de desăvîrșirea logică a căilor sau dezvoltarea amănunțită a tuturor detaliilor.

O altă trăsătură fundamentală a creației științifice a lui *Cebîșev* era interesul său neabătut față de problemele practice. Acest interes era atît de mare încît caracterizează originalitatea lui *Cebîșev* ca savant. Fără exagerare se poate spune că în majoritatea lor, cele mai interesante descoperiri matematice sînt presărate cu lucrări aplicative, în special de cercetările sale cu privire la teoria mecanismelor.

Apropierea dintre teorie și practică — spune *Cebîșev* — dă rezultatele cele mai favorabile de pe urma cărora cîștigă nu numai practica ; știința însăși se dezvoltă sub influența sa, ea îi descoperă obiecte noi pentru cercetare sau aspecte noi în cazul obiectelor cunoscute de mult. Cu tot gradul înalt de dezvoltare la care a fost dusă știința matematică prin munca marilor geometri în ultimele trei secole, practica descoperă în mod vădit, incompletitudinea lor din multe puncte de vedere ; ea propune probleme esențial noi pentru știință și în felul acesta determină căutarea unor metode cu totul noi.

Printre nenumăratele probleme pe care le pune omului activitatea sa practică, o deosebită importanță — după părerea lui *Cebîșev* — o are una : Cum trebuie să fie folosite mijloacele noastre pentru a obține rezultate cît mai bune posibile ? Tocmai de aceea majoritatea problemelor din practică se reduc la probleme pentru aflarea valorii celei mai mari sau a celei mai mici a unei mărimi, cu totul noi pentru știință, și numai prin rezolvarea acestor probleme noi putem să satisfacem cerințele practicii, care în toate cazurile pretinde ce e mai bun și mai avantajos.

Nenumăratele lucrări aplicate ale lui *Cebîșev* avînd denumiri foarte puțin matematice : Asupra unui mecanism, Asupra roților dințate, Despre uniformizatorul centruifugal, Asupra construirii hărților geografice, Despre croitul rochiilor și multe altele, sînt reunite printr-o singură idee fundamentală : cum trebuie folosite mijloacele date pentru obținerea unui cîștig maxim ?

Cebîșev a depus mari eforturi pentru construirea unor mecanisme cu pîrghii și la crearea teoriei lor. O atenție deosebită a acordat perfecționării paralelogramului lui Watt, mecanism care servește la transformarea mișcării circulare în mișcare rectilinie. *Cebîșev* a privit problema dintr-un punct de vedere nou și a formulat-o astfel : *să se creeze mecanisme în care mișcarea curbilinie să se abată cît mai puțin posibil de la*

mișcarea rectilinie și să se determine totodată, dimensiunile cele mai avantajoase ale detaliilor mașinii. Cu ajutorul teoriei funcțiilor, *Cebîșev* a arătat că problema unei mișcări aproximativ rectilinii este solubilă, dînd soluții pentru construirea unor noi serii de mecanisme aproximativ directoare. Unele dintre acestea sînt aplicate pînă în ziua de astăzi la diferite aparate.

Cebîșev a creat o serie de mecanisme numite mecanisme cu opriri. În aceste mecanisme foarte mult folosite în construcția de automate din ziua de azi, arborele de conducere efectuează o mișcare întreruptă, astfel încît raportul dintre durata repausului și durata mișcării poate să varieze în funcție de cerințele tehnologice impuse mecanismului. *Cebîșev* a dat pentru prima oară o soluție problemei proiectării unor astfel de mecanisme.

Folosind mecanismele sale, *Cebîșev* a construit celebra mașină pășitoare a cărei mișcare imită mișcarea unui animal; el a construit așanumitul mecanism de vîslire, care imită mișcarea vîslelor unei bărci; un model original de mașină de sortat; un fotoliu pe roți, un regulator centrifugal și altele. Pînă astăzi urmărim cu uimire mișcarea acestor mecanisme și admirăm bogata intuiție tehnică a lui *Cebîșev*. Lui îi aparțin peste 40 de mecanisme diferite și aproape 80 de variante ale acestora.

Moștenirea științifică a lui *Cebîșev* în domeniul teoriei mecanismelor este atît de bogată în idei încît putem considera pe marele matematician ca pe un adevărat inovator al tehnicii. Construirea de mecanisme și dezvoltarea teoriei acestora a servit lui *Cebîșev* drept punct de plecare pentru crearea unei noi ramuri a matematicii — teoria celei mai bune aproximări a funcțiilor prin polinoame. Aici *Cebîșev* este un pionier în sensul deplin al cuvîntului; în acest domeniu el a lucrat mai mult decît în oricare altul găsind și rezolvînd probleme noi; numeroasele sale cercetări din acest domeniu au făcut posibilă crearea unei noi ramuri a analizei matematice care a continuat să se dezvolte cu succes și după moartea sa.

Un interes deosebit a trezit întotdeauna problema interpolării, adică găsirea unui polinom de gradul n care ia aceiași valoare ca și funcția dată în $(n + 1)$ valori ale argumentului. Formulele *) propuse de celebrii matematicieni *Newton, Lagrange, Gauss, Bessel* ș.a. rezolvă această problemă dar au cîteva neajunsuri. În particular se constată că adăugarea uneia sau a mai multor valori ale funcției necesită refacerea tuturor calculelor.

Este potrivit să remarcăm, că în legătură cu dezvoltarea teoriei interpolării prin metoda celor mai mici pătrate, *P. L. Cebîșev* a ajuns la construirea teoriei generale a polinoamelor ortogonale și a introdus pentru prima oară, așa-numitele șiruri de funcții biortogonale. În ultimii ani aceste rezultate ale lui *Cebîșev* au căpătat o foarte mare dezvoltare **).

Se poate crede că teoria interpolării a fost una dintre cauzele serioase (împreună cu teoria mecanismelor), care a stimulat pe *Cebîșev* să cerceteze un nou cerc de probleme ale analizei. În formularea sa, problema interpolării s-a transformat astfel: *între toate polinoamele de un grad dat să se găsească pe acela care face minime valorile absolute ale diferențelor*

*) Toate aceste formule aplicate aceleiași probleme desigur coincid și diferă numai prin gruparea termenilor

**) In G.M.F.-B 3/1961, pag. 153 s-a publicat o notă despre polinoamele lui Cebîșev.

dintre valorile funcției și ale polinomului, pentru toate valorile argumentului într-un interval dat de variație. Această formulare a fost deosebit de fecundă și a exercitat o influență excepțională asupra matematicienilor de mai tîrziu.

Ne vom opri la o scurtă caracterizare a realizărilor lui *Cebîșev*, încă în două domenii: teoria numerelor și teoria probabilităților.

Este greu să se indice o altă acțiune care să fie la fel de strîns legată de apariția și de dezvoltarea culturi omenești cum este noțiunea de număr. Luați omenirii această noțiune și veți vedea cît de mult va sărăci din această cauză, viața noastră spirituală și practică: vom pierde posibilitatea de a face calcule, de a măsura timpul, de a compara distanțele, de a face bilanțul unei munci. Nu în zadar grecii antici atribuiau legendarului Prometeu, între nemuritoarele sale creații, inventarea numărului. Importanța noțiunii de număr a stimulat pe cei mai mari matematicieni și filozofi ai tuturor timpurilor și popoarelor să încerce să pătrundă în tainele distribuției numerelor prime printre celelalte numere.

Cercetarea moștenirii științifice a lui *Euler* a stimulat interesul lui *Cebîșev* pentru teoria numerelor. Ocupîndu-se de această teorie prin metode complet elementare, *Cebîșev* a stabilit o eroare într-o formulare *Legendre-Gauss* și a corectat-o.

Scurt timp după aceasta, folosind o metodă cu totul elementară și extrem de ingenioasă el *a* demonstrat o propoziție din care postulatul lui *Bertrand* decurgea ca o simplă consecință. Aceasta a fost un măreț triumf al gîndirii matematice. Marii matematicieni ai acelor timpuri spuneau că pentru obținerea a noi rezultate în problema repartiției numerelor prime este nevoie de o minte care să depășească mintea lui *Cebîșev*, cu tot atît cu cît mintea lui *Cebîșev* depășește mintea unui om obișnuit.

Nu ne vom opri asupra altor rezultate ale lui *Cebîșev* din teoria numerelor și vom trece la acea ramură a științei matematice în care ideile și realizările lui au căpătat o importanță hotărîtoare pentru întreaga sa dezvoltare și au definit direcția celor mai actuale cercetări. Acest domeniu al matematicii se numește teoria probabilităților și se ocupă de studiul fenomenelor întîmplătoare, mai exact, al acelor fenomene a căror desfășurare nu poate fi dinainte prevăzută și a căror realizare în condiții identice poate să se desfășoare cu totul diferit de la caz la caz. Cele două legi fundamentale ale acestei științe: legea numerelor mari și teorema limită centrală, în tratarea lor modernă își au originea la *Cebîșev*.

Nu ne vom opri la conținutul acestor legi. Celebra metodă elementară creată de *Cebîșev* i-a permis să demonstreze cu o simplitate uluitoare legea numerelor mari în ipoteze foarte largi de care nu au fost în stare nici chiar metodele analitice, incomparabil mai complicate, ale predecesorilor săi. Pentru demonstrarea teoremei limită centrală *Cebîșev* a creat metoda sa — a momentelor — care continuă să joace un rol important și în analiza matematică modernă, însă nu a reușit să ducă demonstrația pînă la capăt; ea a fost desăvîrșită mai tîrziu de elevul său, acad. *A. A. Marcov*.

Cebîșev a învățat pe contemporanii și urmașii săi să trateze această știință cu aceiași rigoare (în particular), în ceea ce privește gîndirea logică a deducțiilor sale și cu aceeași atenție și grijă ca pe oricare altă disciplină matematică. O astfel de atitudine, care în ziua de astăzi este adoptată de întreaga lume științifică, pentru secolul trecut era nouă și neobișnuită.

Știința mondială are puțini savanți a căror creație să fi exercitat o influență atît de mare asupra dezvoltării științelor matematice, așa cum s-a întîmplat cu descoperirile lui *Cebîșev*. În particular, majoritatea matematicienilor sovietici simt asupra lor influența binefăcătoare a lui *Cebîșev*, care ajunge la ei prin intermediul tradițiilor științifice create de el și prin nenumăratele descoperiri fundamentale pe care le-a făcut, cît și prin acele idei noi care au fost introduse de el în matematică. Oamenii sovietici cinstesc memoria luminoasă a marelui lor compatriot cu un profund respect și o caldă recunoștință *.

DIN ISTORIA MAȘINILOR ELECTRICE

La 14 octombrie 1957 a furnizat curent industrial, cel de-al 20-lea agregat al hidrocentralei de la Kuibîșev. O dată cu punerea în funcțiune a acestuia, puterea hidrocentralei a crescut pînă la 2 100 000 kW. Uzina electrică de la Kuibîșev este cea mai mare din lume, depășind ca putere cea mai mare hidrocentrală americană, cea de la Grand Coulee Dam, cu 125 000 kW.

Acest gigant al științei și tehnicii moderne este rezultatul activității creatoare a unei armate numeroase de tehnicieni și inventatori în decurs de un secol. Generatorul de energie electrică face parte dintr-o serie de mașini destul de simple. El are numai două părți : *statorul* și *rotorul*. Însă drumul străbătut de mașinile electrice în decursul unui secol nu este simplu. Să ne oprim asupra cîtorva etape ale acestui drum.

În deceniul al treilea al secolului trecut F a r a d a y descoperă legea inducției electromagnetice, pe baza căreia creează primele mașini electrice. Sînt cunoscute cîteva tipuri de mașini Faraday. Cea mai simplă dintre ele constă dintr-un disc de cupru care se rotește într-un orificiu circular decupat într-o placă metalică. Un contact se află pe axul discului, celălalt pe placa metalică (fig. 1). Rotindu-se, discul de cupru taie liniile de forță ale cîmpului magnetic al Pămîntului și datorită acestui fapt în circuitul

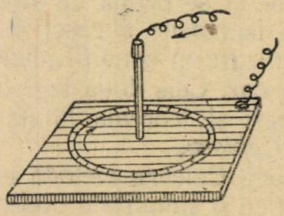
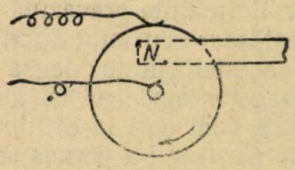


Fig. 1. Generatorul lui Faraday



Fif. 2. Generatorul lui Faraday (a doua construcție)

care unește contactele trece un curent electric indus. Acest curent este constant, deoarece atît cîmpul magnetic al Pămîntului, cît și direcția mișcării discului nu se schimbă. A doua mașină a lui F a r a d a y era și mai simplă (fig. 2). În cîmpul unui magnet permanent se rotește un disc de cupru. Un contact alunecă pe marginea discului, cel de-al doilea pe axa metalică a acestuia.

* Prelucrare după articolul „P. L. Cebîșev" de acad. B. V. Gnedenko din lucrarea „Oameni ai științei ruse", Moscova, 1961.

Faraday a construit și un generator de un curent alternativ (fig. 3). El constă dintr-un conductor de cupru dreptunghiular care se rotește în jurul unei axe orizontale. Acest generator dădea curent numai atunci cînd axa de rotație era dirijată de la vest la est, deoarece numai în acest caz cadrul intersecta liniile de forță ale cîmpului magnetic terestru.

În anul 1832 a fost inventat *colectorul*, un dispozitiv pentru transformarea curentului alternativ în curent continuu. Primul colector, al lui Pixi, avea o formă atît de neobișnuită pentru tehnică, încît din el nu a rămas decît ideea, colectorul însușit fiind complet schimbat.

Mașina lui Pixi constă dintr-un cadru mobil cu sîrmă în care se induce tensiunea electromotoare prin rotația în jurul ei a unui magnet în formă de potcoavă. La capetele conductorului cadrului se obținea o tensiune variabilă. Pentru a obține un curent continuu Pixi a inventat colectorul.

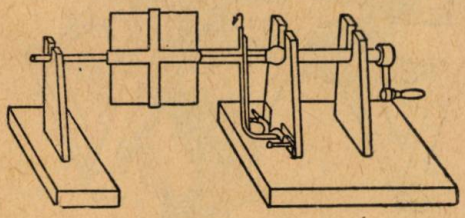


Fig. 3. Generatorul de curent alternativ al lui Faraday

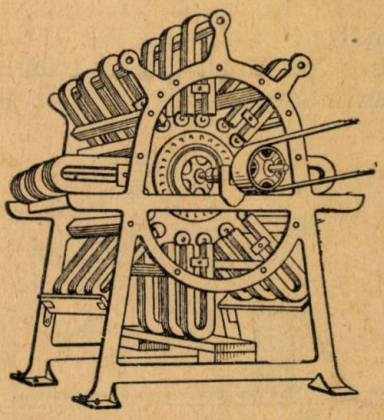


Fig. 4. Generatorul lui Nollet „Alliance"

Mașina lui Pixi avea un colector complicat și fragil și de aceea nu a putut să fie introdusă în tehnică.

Mulți inventatori au simplificat construcția colectorului lui Pixi, însă o soluție tehnică comodă satisfăcătoare a fost dată în anul 1849 de către francezul Nollet. Generatorul său de curent „Alliance" (fig. 4) a putut fi aplicat nu numai în laboratoare, dar și în tehnică. Această mașină a fost proiectată încă de la început, pentru iluminatul electric. Ea avea 24 magneți permanenți care acționau asupra a 8 inductori diferiți. Mai întîi, mașina a furnizat curent alternativ, mai tîrziu ea a fost înzestrată cu un colector. Prima mașină „Alliance" a fost folosită la farul electric de lîngă Havre. Se poate considera că prin mașina „Alliance" s-a încheiat *prima etapă* a dezvoltării generatorilor de curenți electrici. Cea mai importantă realizare a acestei etape este sistemul de comutare, adică inventarea colectorului pentru transformarea curentului alternativ în curent continuu.

Noua etapă începe în anul 1860. În acest timp, englezul Waild creează generatorul electric, în care, în locul magneților permanenți se folosesc electromagneți. Ei sînt excitați de către curentul unei alte mașini, cu magneți permanenți. În ianuarie 1867, inginerul german Siemens a căpătat un patent pentru un generator de curent pe principiul autoexcitării: electromagneții generatorului sînt alimentați de curentul genera-

torului însuși, așa cum se face la mașinile de curent continuu din ziua de azi. Englezul L e d d a construit curînd după aceea, un *generator cu șunt*, iar în anul 1878 a apărut *generatorul compund*. Însă, mașinile cu autoexcitare au ieșit învingătoare.

În deceniul al VII-lea s-au făcut experiențe cu mașinile construite de G r a m m e pentru a fi comparate cu mașina amintită mai sus, „Alliance". S-a constatat că mașina lui G r a m m e „ocupă loc de 4 ori mai puțin, dă de două ori mai multă lumină și costă de două ori mai ieftin". În curînd, în lume, funcționau aproximativ 1 000 de mașini ale lui G r a m m e (fig. 5). Descoperirea principiului autoexcitării și dezvoltarea a trei tipuri de gene-

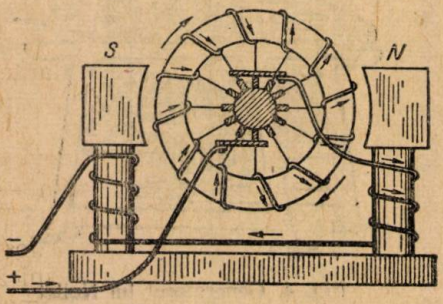


Fig. 5. Schema mașinii lui Gramme

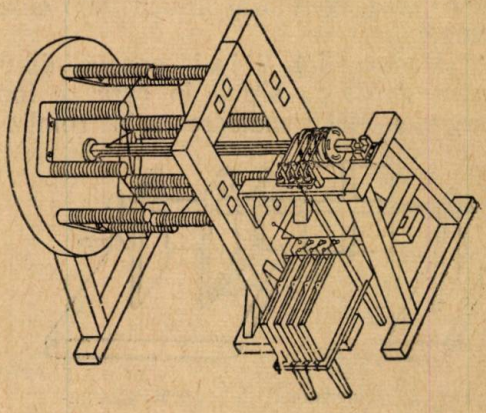


Fig. 6. Motorul lui Iacobi

ratori de curent continuu închid cea de-a doua etapă a dezvoltării mașinilor electrice.

Cea *de-a trei etapă* este legată nu atît de aplicarea electricității pentru iluminare, cît pentru utilizarea acesteia pentru obținerea unui lucru mecanic. Pentru aceasta trebuia inventat motorul electric.

Motorul electric a parcurs un drum foarte lung. Majoritatea motoarelor erau numai aparate de laborator care demonstrau posibilitatea obținerii din bateriile galvanice a unui lucru mecanic. Primele motoare ale lui H e n r y, N e g r o t, C l a r k, B a r b u s și ale altor inventatori erau aplicații originale ale ideilor instalației mașinilor cu aburi în tehnica folosirii electricității. În ele, prin acțiunea curentului se provoca o mișcare oscilatorie a unei pîrghii sau era atras un miez de fier într-o bobină prin care trecea curentul.

Primul motor care putea fi folosit în tehnică, în care curentul electric crea o mișcare de rotație a fost cel construit de academicianul rus B. S. I a c o b i (fig. 6). Însuși Iacobi descria în 1834 astfel motorul său:

„Aparatul constă din două grupe de cîte 8 bare de fier moale. Ambele grupe sînt așezate perpendicular pe două discuri și simetric una față de alta, în așa fel încît polii să se găsească unii în fața altora. Unul dintre discuri este fix, iar celălalt se rotește în jurul unei axe, datorită cărui fapt, grupul barelor mobile trece prin fața grupului celor fixe la o distanță cît mai mică posibil. Toate cele 16 bare sînt bobinate cu sîrmă de cupru; capetele înfășurărilor se unesc cu polii unei baterii galvanice. Funcționarea

acestei mașini este condiționată de o construcție reușită a *comutatorului* care realizează schimbarea polilor de 8 ori în timpul unei rotații. Mecanismul rotorului este foarte simplu în comparație cu mașina cu vapori: nu există nici cilindru, nici piston, nici supape. Nu există frecare datorită căreia să se piardă mai mult de jumătate din lucrul produs. În această mașină singura pierdere este provocată de frecarea în lagăre. Apoi, această mașină dă o mișcare circulară constantă care poate fi transformată mult mai ușor în alte forme de mișcare decît mișcarea de du-te-vino".

Prin urmare, cu ajutorul unui comutator special curentul din bobina electromagnetului motorului lui Iacobi își schimba direcția de 8 ori într-o rotație.. Electromagneții erau orientați întotdeauna cu polii în sens opus și de aceea magneții mobili erau respinși de cei ficși.

Motorul lui Iacobi a fost instalat (1839) pe o barcă care se mișca pe Neva cu 14 pasageri. Pe atunci însă, era o perioadă de dezvoltare rapidă a tehnicii aburilor și de aceea energia electrică încă nu pătrundea în industrie. Motorul lui Iacobi nu și-a găsit aplicații practice importante.

Lui Iacobi îi aparțin și alte descoperiri care au avut un rol important în dezvoltarea mașinilor electrice. El a arătat că motorul electric este reversibil, adică, dacă este rotit aplicîndu-i-se o forță mecanică el devine un generator de energie electrică. Acest principiu — al *reversibilității* — enunțat de Iacobi a fost demonstrat practic pentru prima oară în 1873 de către Fontaine, pe două mașini electrice Gramme. Astfel a fost realizată tehnic, ideea transformării energiei electrice în energie mecanică și invers. În anul 1882 inginerul francez Depré a prezentat la primul Congres de electrotehnică de la Paris, o comunicare în care a arătat că, în cazul cînd se obține o energie electrică cu o tensiune destul de ridicată, ea poate fi transformată acolo într-o formă mecanică de energie. Data acestei comunicări poate fi considerată ca prima zi a unei ere noi a tehnicii — *era electrificării.*

Posibilitatea folosirii tehnice a electricității la mari distanțe de locul de obținere a fost așadar, găsită. Prima instalație a lui Depré a fost realizată la expoziția din München, în anul 1882. Iată cum descrie această instalație unul din participanții la montarea expoziției, Miller:

„La mina de cărbune din Missbach a fost instalată o mașină cu vapori nu prea mare, care punea în mișcare un dinam cu o putere de 3 CP, avînd o bobinare cu izolament de mătase care dădea o tensiune de 1 500—2 000 volți. Curentul era transmis prin două fire obișnuite de telegraf, la o distanță de 57 km în localul expoziției din München. Acolo se afla un motor de același tip și un dinam care pompa apa cu ajutorul unei pompe centrifuge. Apa forma o cădere artificială de doi metri înălțime. Prima pornire s-a făcut la ora 11 din noapte, cînd vizitatorii erau împrăștiați, pentru ca în caz de nereușită să nu se facă zgomot inutil. Eu am dat comanda și motorul a fost pornit. În momentul cînd a început să lucreze pompa centrifugă și căderea de apă a început să facă zgomot, toți cei prezenți au fost cuprinși de un entuziasm atît de mare, încît astăzi nici nu ni-l putem imagina".

Prin descoperirea lui Depré se încheie cea *de-a treia etapă* a dezvoltării mașinilor electrice. Dezvoltarea ulterioară a necesitat noi construcții tehnice. Din experiențele lui Depré rezulta că, cu cît tensiunea curen-

tului este mai mare, cu atît el poate fi transmis la o distanță mai mare, fără pierderi simțitoare. Generatorii electrici de curent continuu la tensiune ridicată sînt foarte greu de realizat tehnic. De aceea, cea *de-a patra etapă* a dezvoltării mașinilor electrice este etapa mașinilor de curent alternativ.

Desigur un generator de curent alternativ de tensiune ridicată, este de asemenea destul de greu de realizat datorită stratului gros de izolare, însă curentul alternativ poate fi transformat și în aceasta constă superioritatea lui față de cel continuu. De aceea, în cea de-a patra perioadă a electrotehnicii se ridicau următoarele probleme: să se inventeze un transformator, să se creeze generatori de curent alternativ. Aceste probleme au fost rezolvate cu succes creîndu-se în felul acesta, baza pentru cea *de-a cincea etapă* — etapa introducerii pe scară largă a curentului alternativ în toate domeniile industriei și vieții.

Prima aplicare practică a transformatorului a fost obținută sub forma bobinei lui Rhumkorff în anul 1851. Propriu-zis, meritul lui Rhumkorff constă în aceea că el a găsit o formulare tehnică reușită a principiului transformării care în esență era folosit încă din deceniul al 3-lea de Faraday. Primul patent de transformator a fost obținut de un laborant al Universității din Moscova, numit *Usaghin*, la mijlocul deceniului al 8-lea al secolului trecut. Mai tîrziu, un astfel de transformator a fost inventat de către Hollard, care, cu ajutorul bancherului Gibbs a pregătit pentru expoziția de la Torino (1884), patru bobine de inducție care puteau fi unite în moduri diferite, obținîndu-se diferite tensiuni. Aceste transformatoare, după expoziție, s-au aplicat pentru obținerea unui curent de tensiune înaltă pentru transmisie tehnică.

Generatorii de curent alternativ, în acest timp, erau deja inventați, deoarece, dacă într-un motor de curent continuu se înlocuiește colectorul prin inele și se modifică într-un mod corespunzător bobinarea ancorei, obținem un generator de curent alternativ.

A început bătălia între partizanii curentului continuu și cei ai curentului alternativ. Acei capitaliști care în uzinele lor fabricau aparatura pentru obținerea, transmiterea și folosirea curentului continuu sabotau în toate modurile curentul alternativ și căutau să limiteze folosirea sa. Iar toți aceia care și-au investit capitalurile lor în producerea curentului alternativ luptau pentru curentul alternativ. Această luptă a luat în S.U.A. o formă deosebit de evidentă. Celebrul inventator Edison care obținea mari cîștiguri din exploatarea instalațiilor de curent continuu a încercat chiar să interzică prin lege, producerea și utilizarea curentului alternativ. Însă, superioritatea curentului alternativ era atît de mare încît pătrunderea lui era imposibil de oprit. În curînd același Edison a fost nevoit să înceapă fabricarea transformatorilor.

Rămînea de rezolvat ultima problemă — să se creeze motorul de curent alternativ. Acest lucru a devenit posibil numai după ce inginerul italian Ferraris a descoperit un nou fenomen fizic: cîmpul magnetic rotitor a trei curenți deplasați în fază la 120° unul față de altul. Pe bază acestui cîmp, inginerul cehoslovac Tesla a construit în anul 1888, primul motor asincron. Dezvoltînd ideea folosirii simultane a cîtorva curenți deplasați în fază, inginerul rus Dolivo-Dobrovolski a elaborat în anul 1888 teoria curentului trifazic și pe baza lui a construit un gene-

rator și un motor trifazic. Astfel, a fost creată baza electrotehnicii moderne a curentului trifazic.

Ca rezultat al tuturor acestor descoperiri a fost crearea în anii 1890—1891 la Laufen (Germania) a unei uzine electrice de felul următor: O turbină de apă rotea electromagnetii unui generator de curent trifazic. Miezul generatorului era format din 96 bare reunite în trei înfășurători. Generatorul dădea un curent de 55 volți; tensiunea era ridicată de un transformator pînă la 8 500 volți. Curentul era transportat la Frankfurt la o distanță de 170 km și punea în mișcare acolo, un motor de curent trifazic de tip Dolivo-Dobrovolski. Linia era formată din trei fire de cupru suspendate la înălțimea de 8 m pe stîlpi de lemn. Pierderile de energie la transportare nu depășeau 25%. La crearea acestei uzine electrice și a liniei de transportare a participat însuși Dolivo-Dobrovolski.

În cea *de-a cincea etapă* de dezvoltare a mașinilor eletcrice, care continuă și astăzi, nu a fost nevoie să se realizeze construcții de generatoare și motoare de curent, principial noi. A început etapa pătrunderii universale a electrotehnicii în industrie și în viața de toate zilele, a ridicării continue a tensiunii curentului transmis, a creșterii enorme a puterii generatorilor de curent trifazic, a creșterii nemaiîntîlnite a puterii uzinelor electrice și a amploarei construcțiilor de hidrocentrale, creșterea distanței de transport — etapa victoriei electrificării pe întreg pămîntul.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

FIGURI GEOMETRICE CU ELEMENTE INACCESIBILE. CONSTRUCȚII GRAFICE

de *Lev Lopovok*, profesor, Hmelnițki (U.R.S.S.)

1. Se cere să se coboare dintr-un punct M, cu ajutorul riglei și compasului, o perpendiculară pe o dreaptă dată. Metoda de construcție este cunoscută. Cum trebuie procedat însă, dacă punctul este aproape de marginea, desenului? (fig. 1). Ducem din punctul M ca centru, două arce, raza unuia fiind de două ori mai mare decît raza celuilalt. Dacă arcul cu raza mai mare intersectează dreapta dată în punctul D, ducem dreapta MD, iar din punctul C ca centru și cu raza CD descriem un arc de cerc care taie dreapta AD în O (fig. 2) Punctul O obținut este piciorul perpendicularei coborîtă din M pe AB. Într-adevăr, punctul O se află pe cercul de diametru MD. De aceea unghiul MOD este drept. După cum vedem, problema este solubilă însă metoda sa de rezolvare diferă esențial de cea obișnuită. În procesul de rezolvare a unor probleme de construcție este nevoie de identitate și pricepere.

Să cercetăm cîteva din aceste probleme.

2. *Intersecția drumurilor.* Două drumuri rectilinii l_1 și l_2 se intersectează în afara limitelor hărții. Se cere să se determine distanța de la

punctul M, pe hartă, pînă la intersecția drumurilor și direcția din punctul M spre această intersecție. Problema poate fi rezolvată pe baza asemănării figurilor. Prin ipoteză, cele trei drepte (drumurile și direcția dată) se intersectează în același punct. Acest punct poate fi luat ca centru de asemănare (centru de omotetie) al triunghiurilor ale căror vîrfuri se află pe dreptele amintite.

Fie AMB unul din aceste triunghiuri. Ducem CD paralel la AB, iar apoi CE paralel la

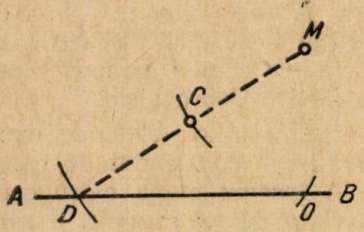


Fig. 1.

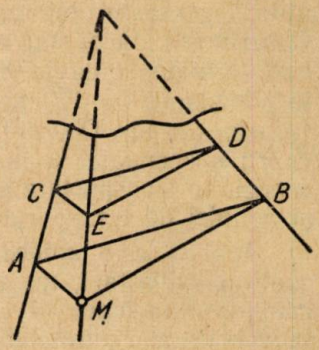


Fig. 2.

AM și DE paralel la BM pînă cînd se intersectează în E (fig. 2). Dreapta căutată trece prin punctele M și E.

Pentru cei care cunosc elemente de geometrie proiectivă vom remarca faptul că direcția poate fi găsită cu ajutorul numai al riglei. Ducem prin punctul M dreptele AB și CD (A și C pe l_1; B și D pe l_2). Fie O punctul de intersecție dintre AD și BC. Ducem prin punctul O dreapta care intersectează l_1 și l_2 în punctele E și F. Dacă ED și AF se intersectează în punctul T, direcția căutată este MT.

Dacă se ia în considerație că distanța dintre punctul M și intersecția O este x, pe baza asemă-

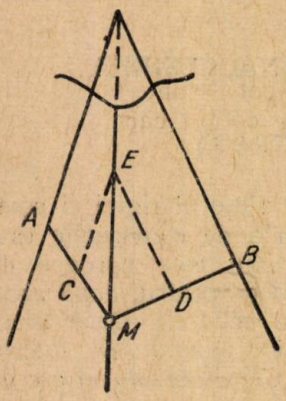


Fig. 3.

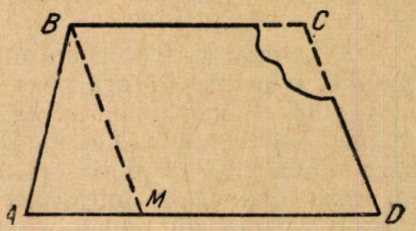


Fig. 4.

nării triunghiurilor OAM și OCE se poate forma proporția $x : (x - ME) = AM : CE$. De aici :

$$x = \frac{AM \cdot ME}{AM - CE}.$$

Însă problema poate fi rezolvată mai simplu, fără să folosim asemănarea figurilor și fără a forma vreo ecuație.

Pe dreptele l_1 și l_2 luăm niște puncte oarecare A, B și ducem în triunghiurile AOM și BOM liniile mijlocii paralele respectiv cu dreptele l_1 și l_2. Ambele linii mijlocii împart segmentul MO în două părți, adică se intersectează pe o dreaptă care trece prin punctul M și intersecția drumurilor. Acum construcția este clară. Prin mijloacele segmentelor MA, MB ducem niște drepte paralele respectiv cu drumurile date. Dacă dreptele s-au intersectat în punctul E (fig. 3) direcția căutată este ME, iar distanța căutată este de două ori mai mare decît segmentul ME.

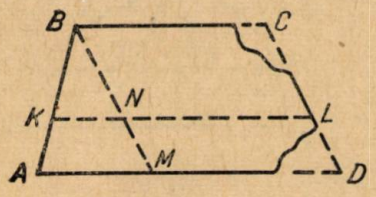


Fig. 5.

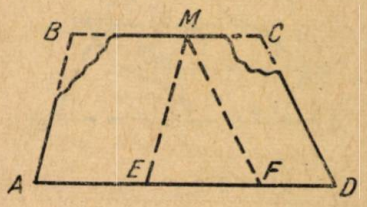


Fig. 6.

Dacă punctul E este din nou inaccesibil, construcție se repetă: prin mijloacele segmentelor MC și MD ducem niște drepte paralele respectiv cu dreptele CE, DE ș.a.m.d.

3. *Placa de tablă.* O placă de tablă are forma unui trapez; să se determine dimensiunile laturilor sale în ipoteza că unul sau mai multe dintre colțuri sînt rupte.

a) *Un colț rupt.* Dacă sînt necunoscute dimensiunile laturilor CB, CD (fig. 4), ducem BM paralel la CD (acest lucru poate fi făcut deoarece o parte din latura CD s-a păstrat). Deoarece $BCDM$ este un paralelogram avem $CD = BM$ și $BC = MD$.

b) *Două colțuri rupte.* Sînt posibile trei cazuri: pot fi rupte bucăți care conțin capetele unei laturi laterale sau bucăți care conțin capetele bazei sau bucăți care conțin două vîrfuri opuse.

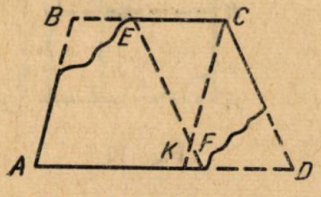


Fig. 7.

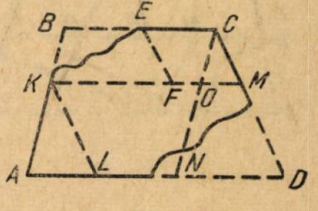


Fig. 8.

În primul caz corespunde figura 5. Ducem BM paralel la CD. Este clar că $BM = CD$. Apoi, ducem KL paralel la BC. Dacă KL intersectează BM în punctul N, atunci $NL = BC = MD$. De aceea $AD = AM + NL$.

Cel de-al doilea caz este arătat în fig. 6. Să ducem dintr-un punct oarecare accesibil M, al bazei BC, dreptele ME paralelă la AB și MF paralelă la CD. Atunci $AB = ME$, $CD = MF$, $BC = BM + MC = AE + DF$.

În al treilea caz (fig. 7) ducem CK paralelă la AB și EF paralelă la CD. Aceste segmente determină laturile oblice ($AB = CK$, $CD = EF$) și bazele: $BC = AK$, $AD = AF + FD = AF + EC$.

Însă, bucățile rupte pot fi atît de mari încît capetele segmentelor EF și CK să fie inaccesibile (fig. 8). În acest caz va trebui să ducem KM paralelă la AD și KL la CD. Atunci $AB = AK + KB = AK + OC$; $CD = CM + MD = CM + KL$; $BC = KO$; $AD = AL + LD = AL + KM$.

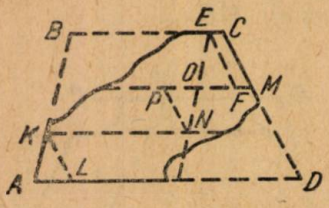


Fig. 9.

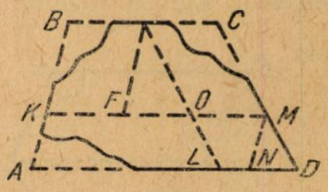


Fig. 10

Cazul cel mai dificil este reprezentat pe fig. 9. Aici ducerea dreptei KM este imposibilă. De aceea ducem două drepte paralele cu bazele trapezului (KN și MO). Atunci avem $AB = AK + KB = AK + EN$; $CD = CM + PN + KL$. $BC = BE + EC = KN + EC$; $AD = AL + KN + PM$.

c) *Trei colțuri rupte.* Unul dintre cazurile posibile este arătat pe fig. 10. Ducem dreptele auxiliare KM paralelă la AD, EF paralelă la AB, EL paralelă CD, MN paralelă la AB. Din figură se vede că $AB = MN + EF$; $CD = EL$; $BC = KF + OM$; $AD = KM + ND$.

Dacă ducerea vreunui segment ajutător este imposibilă se procedează ca în cazul precedent.

d) *Patru colțuri rupte.* O variantă posibilă este arătată pe fig. 11. Ducem dreptele KM paralelă la AD; EL paralelă la AB; EO și LN

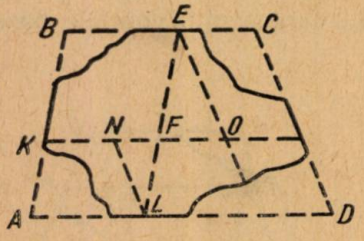


Fig. 11

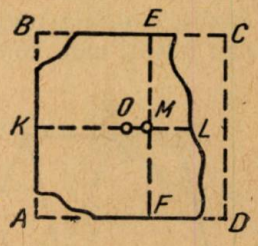


Fig. 12

paralele la CD. Atunci $AB = EL$; $CD = EO + NL$; $BC = KF + OM$; $AD = KF + NM$. Vom remarca că în nici unul din cazurile considerate nu ne-am folosit de proprietățile liniei mijlocii (a triunghiului sau trapezului). Ducerea liniilor mijlocii poate fi utilă la rezolvarea problemelor în cazurile complicate (cînd sînt rupte bucăți foarte mari).

În cele spuse mai sus am presupus că trapezul este oarecare. Dacă considerăm trapezul isoscel, rezolvarea se simplifică. Cercetarea celor 4 cazuri în cazul trapezului isoscel o lăsăm în seama cititorului.

4. *Centrul pătratului.* Toate vîrfurile unui pătrat și una din laturi sînt inaccesibile, să se găsească centrul pătratului. Distanța de la centrul pătratului pînă la laturi este jumătate de latură. De aceea construim perpendiculara comună *EF* a două laturi ale pătratului; prin mijlocul său *M*, ducem perpendiculara *MK* la cea de-a treia latură și măsurăm pe această perpendiculară *MK* la cea de-a treia latură și măsurăm pe această perpendiculară segmentul *KO* = *EM* (fig. 12). O este centrul

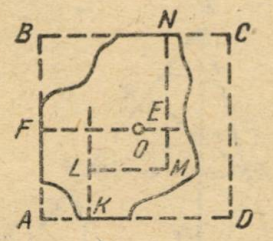


Fig. 13

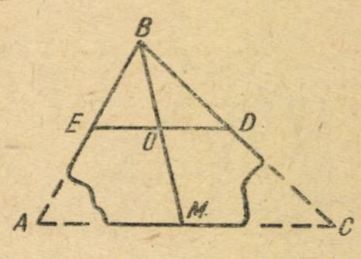


Fig. 14

căutat. Dacă o astfel de construcție este irealizabilă (fig. 13) ducem perpendicularele *NM*, *LM* la două laturi paralele. Apoi construim *LM* perpendicular pe *NM*. Găsim pe segmentul NM un punct *E* pentru care $NE = {}^1/_2(KL + NM)$, ducem *EF* perpendicular la *AB* și măsurăm segmentul $FO = NE$.

Pentru cititor este interesant să cerceteze cazul cînd mijlocul laturii *AB* este inaccesibil.

5. *Împărțirea în părți egale.* Capetele laturii *AC* a unui triunghi *ABC* sînt inaccesibile; se cere să se împartă segmentul *AC* în două părți egale.

Dacă segmentul *ED* paralel la latura *AC* are capetele pe laturile *AB* și *BC*, mediana *BM* împarte *ED* în două părți egale. Pe aceasta se bazează și construcția. Ducem *ED* paralelă la *AC*, găsim mijlocul *O* al segmentului *ED* și ducem dreapta *BO* pînă cînd intersectează pe *AC* (fig. 14). Dacă și vîrful *B* este inaccesibil trebuie să ducem încă un segment paralel la latura *AC* și dreapta care unește mijloacele ambelor segmente. Construcția descrisă poate fi aplicată pentru găsirea perimetrului unui triunghi ale cărui vîrfuri sînt inaccesibile. Găsim — cum s-a arătat mai sus — mijlocul laturii *AC*, ducem din acest punct drepte paralele respectiv la laturile *AB* și *BC*. Cunoscînd liniile mijlocii se pot determina ușor dimensiunile laturilor (cea de-a treia linie mijlocie poate fi de asemenea, dusă ușor).

În sfîrșit, cu ajutorul construcției descrise pot fi duse medianele și determinată poziția centrului de greutate al unui triunghi ale cărui vîrfuri sînt inaccesibile.

Dacă trebuie să împărțim unghiul O al cărui vîrf este inaccesibil, în două părți egale se ține seamă că oricare punct al bisectoarei sale se află la egală distanță de laturile unghiului. Ducem dreptele *MA* paralelă la l_1 și *MB* paralelă la l_2, la o aceiași depărtare de laturile l_1 și l_2 ale unghiului (fig. 15). Bisectoarea unghiului obținut *ABM* împarte în două și unghiul dat *O*. Cu ajutorul construcției descrise se pot împărți în două

și unghiurile unui triunghi cu vîrfurile inaccesibile și găsim totodată centrul cercului înscris.

6. *Înălțimea triunghiului.* Vîrfurile unui triunghi sînt inaccesibile; se cere să se ducă o înălțime pe una din laturile sale.

Ducem *DE* paralelă la *AC* și cele două înălțimi (*DK* și *EF*) ale triunghiului *DBE*. Prin punctul lor de intersecție *O*, trece cea de-a treia înălțime a triunghiului *DBE*. Deoarece această dreaptă se află pe o înăl-

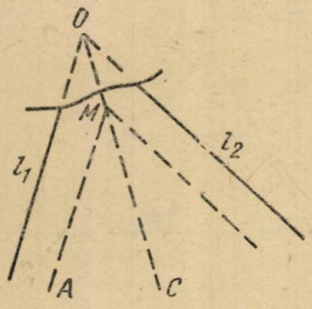


Fig. 15

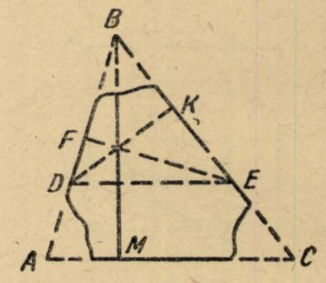


Fig. 16

țime a triunhiului *ABC*, prelungind-o obținem înălțimea căutată (fig. 16). Ducînd în același mod încă o înălțime determinăm poziția ortocentrului triunghiului *ABC*.

7. *Diagonalele trapezului.* Vîrfurile unui trapez sînt inaccesibile; se cere să se determine dimensiunile diagonalelor sale. Unim două puncte

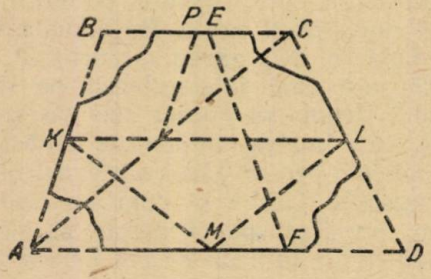


Fig. 17

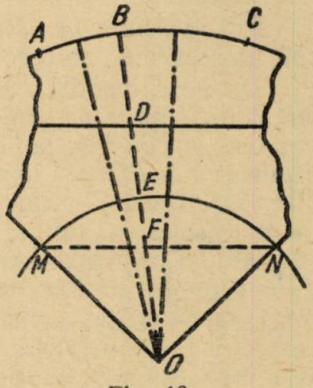


Fig. 18

E și *F* ale bazelor printr-un segment și ducem prin mijlocul său dreapta *KL* paralelă la *BC* (fig. 17). Segmentul *KL* este linie mijlocie a trapezului. Mijloacele bazelor trapezului pot fi găsite prin procedeele de la problema 5 (adică ducînd dreapta prin mijlocul liniei mijlocii și în mijlocul a încă unui segment paralel la bază, care are extremitățile pe laturile neparalele). Dacă *M* este mijlocul bazei trapezului, distanța de la punctul *M* pînă la capetele liniei mijlocii sînt de două ori mai mici decît diagonalele trapezului. Dacă trebuie să construim și porțiunile accesibile din diagonale, ducem din mijloacele laturii *BC* o dreaptă paralelă la dreapta *AB*. Această

dreaptă intersectează linia mijlocie într-un punct care se află pe diagonala trapezului (AC). Restul construcției este evident.

8. *Mărimea în grade a unui arc.* Se dă o parte dintr-un arc de cerc și coarda care îl subîntinde; se cere să se determine prin construcție, unghiul la centru al arcului. Înainte de toate vom construi centrul arcului. Pentru aceasta marcăm pe arc punctele A, B, C și ducem prin mijloacele segmentelor AB și BC perpendiculare pe aceste segmente. Punctul O de intersecție al acestor segmente este centrul arcului (fig. 18). Apoi, ducem din acest centru un arc cu o rază de două ori mai mică, care intersectează pe BO în punctul E. Din omotetia arcelor (a celui dat și a celui pe care îl construim) rezultă că și coarda care subîntinde arcul omotetic cu cel dat taie pe BO un segment de două ori mai mic decît BO. Trasînd un astfel de segment ducem prin capătul său o dreaptă paralelă cu coarda arcului dat. Dacă această dreaptă intersectează arcul mai mic în punctele M și N unghiul căutat este MON.

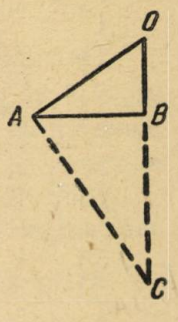


Fig. 19

9. *Raza sferei.* Se dă un fragment de sferă și se cere să se găsească prin construcție, raza sferei. Cu o problemă de acest tip se întîlnesc deseori unii tehnicieni, arheologi și alți specialiști. Punem piciorul- compasului într-unul din punctele suprafeței fragmentului și descriem pe suprafață un cerc. Presupunem că deschiderea compasului a fost egală cu a. Pentru determinarea razei cercului marcăm pe circumferință trei puncte și măsurăm distanța dintre ele. Construim apoi, un triunghi ale cărui laturi sînt egale respectiv cu distanțele măsurate. Găsim centrul cercului descris și determinăm raza sa b. Construim apoi, triunghiul AOB care are ipotenuza $AO = a$ și cateta $AB = b$. Dreapta AC este perpendiculară pe AO și intersectează prelungirea OB în punctul C (fig. 19). Segmentul OC este egal cu diametrul sferei. Demonstrația este evidentă.

Există un aparat special numit sferometru cu ajutorul căruia se poate face măsurătoarea fără a face o astfel de construcție.

După cum vedem, problemele practice cu elemente inaccesibile sînt destul de variate.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

UNELE APLICAȚII GEOMETRICE ALE CALCULULUI VECTORIAL

Fiecărui punct din spațiu i se poate atașa un vector și vom considera un punct fix O arbitrar în spațiu. Segmentul care unește acest punct fix (considerat ca origină) cu punctul considerat determină complet poziția punctului. Acest segment se numește vectorul de poziție al punctului din spațiu și vom nota cu $\bar{r} = \overline{OM}$ vectorul de poziție al punctului M. Alegerea punctului O este arbitrară; el nu influențează asupra rezultatelor calculelor efectuate cu vectorii de poziție.

Servindu-ne de definiția adunării vectorilor, putem exprima un vector oarecare $\overline{AB}$ din spațiu, cu ajutorul vectorilor de poziție ai extremităților lui. În adevăr, avem:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

de unde rezultă:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

adică:

$$\overline{AB} = \bar{r}_A - \bar{r}_B. \qquad (1)$$

Un vector este deci egal cu vectorul de poziție al extremității minus vectorul de poziție al originii. Fie acum, două puncte M_1 și M_2 iar M un punct situat pe dreapta M_1M_2, considerăm un punct fix O și vectorii de poziție $\bar{r}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ ai celor trei puncte în raport cu O (fig. 1).

Punctul M fiind situat pe segmentul M_1M_2 îl va împărți într-un raport oarecare k.

Avem deci: $\dfrac{M_1M}{MM_2} = k$ și înlocuind vectorii $\overline{M_1M}$ și $\overline{M_2M}$ prin vectorii de poziție (1) avem:

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = k(\bar{r}_2 - \bar{r})$$

sau:

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = k \cdot \bar{r}_2 - k \cdot \bar{r}$$

de unde rezultă:

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + k \cdot \bar{r}_2}{1 + k}. \qquad (2)$$

Dacă vectorii de poziție a trei puncte satisfac această relație, punctele sînt colineare; ea exprimă vectorul de poziție $\bar{r}$ al unui punct M, care împarte un segment M_1M_2 într-un raport k.

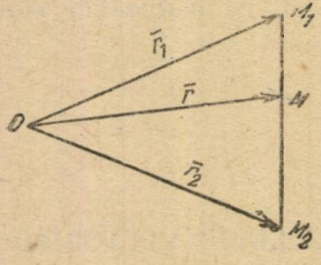


Fig. 1.

Numim produs scalar (interior) a doi vectori un număr egal cu produsul mărimilor acestor vectori; înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ei. Scriem simbolic:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos(\bar{a}, \bar{b}) \qquad (3)$$

Acest produs scalar a doi vectori este egal cu mărimea unuia dintre ei înmulțită cu mărimea proiecției celuilalt pe el.

1. Considerăm punctele M și N în planul poligonului convex $A_1A_2 \ldots A_i \ldots A_n$. Fie M_i și N_i proiecțiile ortogonale ale lui M și N pe A_iA_{i+1}. Notînd $\overline{MN} = \bar{p}_i$ să se demonstreze relația:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \bar{p}_i = 0, \quad (A_{n+1} \equiv A_1).$$

În adevăr, avem relația vectorială:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} = 0$$

pe care o înmulțim scalar cu $\overline{MN}$ și obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \overline{MN} = 0.$$

Însă avem și:

$$\overline{A_iA_{i+1}} \cdot \overline{MN} = \overline{A_iA_{i+1}} \cdot \overline{M_iN_i} = \bar{p}_i \cdot \overline{A_iA_{i+1}}$$

și relația anterioară devine:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \cdot \overline{A_iA_{i+1}} = 0 \qquad (4)$$

adică, relația de demonstrat.

Dacă $n = 3$ avem cazul unui triunghi ABC și relația (4) devine:

$$\bar{a} \cdot \bar{p}_a + \bar{b} \cdot \bar{p}_b + \bar{c} \cdot \bar{p}_c = 0 \qquad (\Xi)$$

adică, relația din problema 3510 din GMF-B.

Acum putem enunța următoarele:

Condiția neecsară și suficientă pentru ca $M_1M_2M_3$ să fie triunghi podar al triunghiului $A_1A_2A_3$ este:

$$\overline{A_1M_1} \cdot \overline{A_1A_2} + \overline{A_2M_2} \cdot \overline{A_2A_3} + \overline{A_3M_3} \cdot \overline{A_3A_1} = 0. \qquad (6)$$

În adevăr, A'_1 fiind piciorul înălțimii din A_1 (fig. 2) avem:

$$\overline{A'_1M_1} \cdot \overline{A_1A_2} = \overline{A_1M_1} \cdot \overline{A_1A_2} \text{ etc.}$$

și prin înlocuire în relația (5) se obține relația (6).

Condiția necesară și suficientă pentru ca perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului $A'_1A'_2A'_3$ pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ să fie concurente este:

$$\overline{A_1A'_1} \cdot \overline{A_2A_3} + \overline{A_2A'_2} \cdot \overline{A_3A_1} + \overline{A_3A'_3} \cdot \overline{A_1A_2} = 0. \qquad (7)$$

Notînd cu A''_1 proiecția lui A'_1 pe A_2A_3 iar cu α piciorul înălțimii din A_1 condiția necesară și suficientă este:

$$\overline{A''_1\alpha} \cdot \overline{A_2A_3} + \overline{B''_1\beta} \cdot \overline{A_3A_1} + \overline{C''_1\gamma} \cdot \overline{A_1A_2} = 0$$

însă

$$\overline{A_1A'_1} \cdot \overline{A_2A_3} = \overline{\alpha A''_1} \cdot \overline{A_2A_3} \text{ etc.}$$

și înlocuind în relația anterioară obținem relația (7).

Vom da acum, o altă demonstrație a relației (4). Considerăm vectorii.

$$\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_2A_3},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_iA_{i+1}},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_nA_1}$$

Aplicînd succesiv teorema lui Carnot generalizată pentru punctele M și N și poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ obținem, următoarele două egalități:

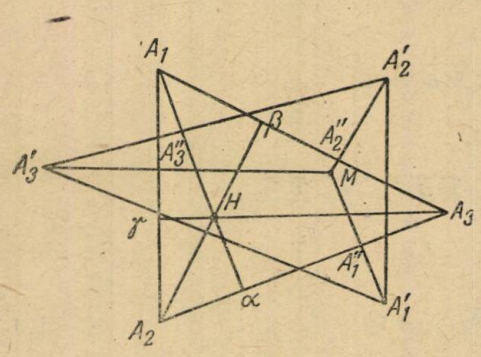


Fig. 2.

$$\sum_{x=1}^{n} \overline{A_iM_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i+1}M_i^2} \qquad (A_{n+1} \equiv A_1)$$

$$\sum_{i=1}^{x} \overline{A_iN_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{i+1}N_i^2}$$

care scăzute dau:

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{A_iM_i^2} - \overline{A_iN_i^2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overline{A_{i+1}M_i^2} - \overline{A_{i+1}N_i^2})$$

care se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{A_iM_i} + \overline{A_iN_i})(\overline{A_iM_i} - \overline{A_iN_i}) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{A_{i+1}M_i} + \overline{A_{i+1}N_i})(\overline{A_{i+1}M_i} - \overline{A_{i+1}N_i}).$$

și atunci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{A_iM_i} + \overline{A_iN_i}) \cdot \bar{p}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overline{A_{i+1}M_i} + \overline{A_{i+1}N_i}) \cdot \bar{p}_i$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i (\overline{A_iM_i} + \overline{A_iN_i} - \overline{A_{i+1}M_i} - \overline{A_{i+1}N_i}) = 0$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i (\overline{A_iM_i} + \overline{A_iN_i} + \overline{M_iA_{i+1}} + \overline{N_iA_{i+1}}) = 2 \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \cdot \overline{A_iA_{i+1}} = 0$$

de unde rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \cdot \overline{A_iA_{i+1}} = 0$$

adică relația (4).

Aplicații. În cazul $n=3$ pentru triunghiul ABC avem relația (5). Tot în acest caz: dacă $M\equiv H$, $N\equiv O$ se obține problema 1908 din G.M.F.-B.

— Dacă $M\equiv H$ și N este un punct pe dreapta OH avem problema 2546, iar în cazul $M\equiv H$ și N este un punct oarecare în interiorul triunghiului avem problema 3049.

— Dacă $M\equiv A$, $N\equiv B$ iar A_1 și B_1 sînt picioarele înălțimilor din A și B conform relației (5) obținem:

$$AC\cdot AB_1 + BC\cdot BA_1 = AB\cdot AB$$

și împărțind totul prin AB avem:

$$AC\cdot\frac{AB_1}{AB} + BC\,\frac{BA_1}{AB} = AB$$

iar dacă ținem seama că:

$$\frac{AB_1}{AB} = \cos A \text{ și } \frac{BA_1}{AB} = \cos B$$

obținem relația cunoscută:

$$c = a\cos B + b\cos A \tag{8}$$

și analogele ei.

II. Să calculăm lungimile simedianelor triunghiului. Fie AA' simediana corespunzătoare vîrfului A. Punctul A' împarte latura BC în raportul $\frac{BA'}{A'C}=\frac{c^2}{b^2}$ și acum avem ca mai sus, relația (2).

$$\bar{r}_{A'} = \frac{\bar{r}_B + \frac{c^2}{b^2}\bar{r}_c}{1+\frac{c^2}{b^2}} = \frac{b^2\bar{r}_B + c^2\bar{r}_C}{b^2+c^2}$$

și deci:

$$\bar{s}_a = \overline{AA'} = \bar{r}_{A'} - \bar{r}_A = \frac{b^2\bar{r}_B + c^2\bar{r}_C}{b^2+c^2} - \bar{r}_A =$$

$$= \frac{b^2\cdot\bar{r}_B + c^2\bar{r}_C - b^2\cdot\bar{r}_A - c^2\cdot\bar{r}_A}{b^2+c^2} = \frac{b^2(\bar{r}_B-\bar{r}_A) + c^2(\bar{r}_C-\bar{r}_A)}{b^2+c^2} =$$

$$= \frac{b^2\bar{c} + c^2\bar{b}}{b^2+c^2}$$

Ridicînd la patrat scalar avem:

$$s_a^2 = \frac{b^4\bar{c}\cdot\bar{c} + c^4\bar{b}\cdot\bar{b} + 2b^2c^2\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}}{(b^2+c^2)^2} = \frac{b^4c^2 + b^2c^4 + 2b^3c^3\cos A}{(b^2+c^2)^2} =$$

$$= \frac{b^2c^2(b^2+c^2+2bc\cos A)}{(b^2+c^2)^2}$$

dar:

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

și deci:

$$s_a^2 = \frac{b^2c^2(b^2+c^2+b^2+c^2-a^2)}{(b^2+c^2)^2} = \frac{b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)}{(b^2+c^2)^2}$$

de unde:

$$s_a = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

și analogele.

III. 1° Fie A_1 și A_2 puncte pe latura BC astfel ca:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \frac{BA_2}{A_2C} = 2$$

Avem ca mai sus:

$$\bar{r}_{A_1} = \frac{\bar{r}_B + \frac{1}{2}\bar{r}_C}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\bar{r}_B + \bar{r}_C}{3} \text{ și } \bar{r}_{A_2} = \frac{\bar{r}_B + 2\bar{r}_C}{3}$$

$$\overline{AA_1} = \bar{r}_{A_1} - \bar{r}_A = \frac{2\bar{r}_B + \bar{r}_C - 3\bar{r}_A}{3} = \frac{2(\bar{r}_B - \bar{r}_A) + \bar{r}_C - \bar{r}_A}{3} = \frac{2\bar{c} + \bar{b}}{3}$$

$$\overline{AA_2} = \bar{r}_{A_2} - \bar{r}_A = \frac{\bar{r}_B + 2\bar{r}_C - 3\bar{r}_A}{3} = \frac{\bar{r}_B - \bar{r}_A + 2(\bar{r}_C - \bar{r}_A)}{3} = \frac{\bar{c} + 2\bar{b}}{3}$$

și deci:

$$AA_1^2 = \frac{4c^2+b^2+4\bar{b}\cdot\bar{c}}{9} = \frac{4c^2+b^2+4bc\cos A}{9} =$$

$$= \frac{4c^2+b^2+2b^2+2c^2-2a^2}{9} = \frac{6c^2+3b^2-2a^2}{9}$$

iar

$$AA_2^2 = \frac{6b^2+3c^2-2a^2}{9}.$$

Acum observăm că

$$AA_1^2 - AA_2^2 = \frac{c^2-b^2}{3}$$

și încă, relațiile analoge.

$$BB_1^2 - BB_2^2 = \frac{a^2-c^2}{3}; \quad CC_1^2 - CC_2^2 = \frac{b^2-a^2}{3}$$

și prin însumarea lor obținem:

$$AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2.$$

2° Fie mai general, punctele A_1 și A_2 pe BC astfel încît:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = m \text{ și } \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{1}{m} \text{ ; atunci:}$$

$$\bar{r}_{A_1} = \frac{\bar{r}_B + m\cdot\bar{r}_C}{1+m} \qquad \bar{r}_{A_2} = \frac{m\cdot\bar{r}_B + \bar{r}_C}{1+m}$$

$$\overline{AA_1} = \bar{r}_{A_1} - \bar{r}_A = \frac{\bar{r}_B + m\bar{r}_c}{1+m} - \bar{r}_A = \frac{\bar{r}_B - \bar{r}_A + m(\bar{r}_C - \bar{r}_A)}{1+m} = \frac{\bar{c} + m\cdot\bar{b}}{1+m}$$

și analog,

$$\overline{AA_2} = \frac{\bar{b} + m\bar{c}}{1+m}$$

și ridicînd scalar la patrat obținem:

$$AA_1^2 = \frac{c^2 + m^2b^2 + 2m\bar{b}\cdot\bar{c}}{(1+m)^2} = \frac{c^2 + m^2b^2 + 2mbc\cos A}{(1+m)^2} =$$

$$= \frac{c^2 + m^2b^2 + m(b^2 + c^2 - a^2)}{(1+m)^2} = \frac{(1+m)(b^2 + mc^2) - ma^2}{(1+m)^2} \qquad (9)$$

$$AA_2^2 = \frac{b^2 + m^2c^2 + 2m\bar{b}\cdot\bar{c}}{(1+m)^2} = \frac{b^2 + m^2c^2 + 2mbc\cos A}{(1+m)^2} =$$

$$= \frac{b^2 + m^2c^2 + m(b^2 + c^2 - a^2)}{(1+m)^2} = \frac{(1+m)(b^2m + c^2) - ma^2}{(1+m)^2} \qquad (9')$$

Acum avem:

$$AA_1^2 - AA_2^2 = \frac{(m^2-1)(c^2-b^2)}{(1+m)^2} = \frac{(m-1)(c^2-b^2)}{1+m}$$

și relațiile analoge:

$$BB_1^2 - BB_2^2 = \frac{(m-1)(a^2-c^2)}{1+m} \text{ ; } CC_1^2 - CC_2^2 = \frac{(m-1)(b^2-c^2)}{1+m}.$$

Adunînd ultimele trei relații obținem:

$$AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2$$

3° Vom considera pe BC numai un singur punct A_1 astfel ca $\frac{BA_1}{A_1C} = m$. Pentru acest punct obținem ca la punctul anterior relația:

$$AA_1^2 = \frac{(1+m)(b^2 + mc^2) - ma^2}{(1+m)^2} \qquad (10)$$

Dacă $m = 1$ adică A_1 e mijlocul laturii BC, relația (10) devine după ce notăm $AA_1 = m_a$: $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$ de unde rezultă lungimea medianei $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$ și în același mod obținem lungimile medianelor m_b și m_c.

****

Dacă A_1 e piciorul bisectoarei din A atunci $m = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$ și relația (10) devine: $AA_1^2 = l_a^2 = \frac{\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(b^2+\frac{c^3}{b}\right) - \frac{c}{b}\cdot a^2}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} =$

$$= \frac{(b+c)(b^3+c^3) - bca^2}{b^2\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} = \frac{1}{(b+c)^2}[(b+c)(b^3+c^3) - bca^2] =$$

$$= \frac{b^4+bc^3+b^3c+c^4-a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{b^4+2b^2c^2+c^4-2b^2c^2+bc^3+b^3c-abc}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{(b^2+c^2)^2+bc(b^2+c^2-2bc-a^2)}{(b+c)^2} = \frac{(b^2+c^2)^2+bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

de unde:

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{(b^2+c^2)^2+bc[(b\cdot c)^2-a^2]}$$

în mod analog rezultă l_b și l_c.

D. M. Bătineţu, student matematici București

CALEIDOSCOP FIZIC

1. *Noi fîntîni ale lui Heron.* — Forma obșinuită de fîntînă atribuită mecanismului din antichitate *Heron,* este probabil cunoscut de cititori (v. G.M.F.-B, nr. 4, 1960). Înainte de a trece la descrierea unor modificări mai noi ale acestui aparat curios, voi reaminti aci instalația sa. Fîntîna lui *Heron* (fig. 1) este formată din trei vase: unul superior și deschis *a* și din două vase sferice *b* și *c* închise ermetic. Vasele sînt unite prin trei tuburi dispuse în modul în care se arată pe figură. Cînd în *a* este apă puțină, sfera *b* este umplută cu apă, iar sfera *c* cu aer, fîntîna începe să funcționeze: apa curge prin tub din *a* în *c*, împingînd de aci aerul în sfera *b*; sub acțiunea aerului apa din *b* pleacă din tub în sus și țîșnește ca un jet deasupra vasului *a*. În momentul cînd sfera *b* se golește, apa încetează de a mai țîșni.

Aceasta este forma antică a fîntînii lui *Heron.* Abia în ziua de astăzi, un profesor de liceu din Italia, stimulat la inventivitate de posibilitățile modeste ale laboratorului său de fizică, a simplificat fîntîna lu Heron modificînd-o în așa fel, încît aceasta poate fi realizată prin mijloacele cele mai simple (fig. 2). În locul sferelor el a folosit niște flacoane de farmacie; în locul tuburilor de sticlă sau metalice a folosit tuburi de cauciuc. Vasul de sus nu trebuie găurit: se poate, pur și simplu, introduce în el capetele tuburilor, așa cum se arată pe figura 2, sus.

În această variantă aparatul este mult mai comod de folosit: în momentul cînd toată apa din flaconul *b* va trece prin vasul *a* în vasul *c*, schimbînd între ele flacoanele *b* și *c*, fîntîna începe să funcționeze din nou; bineînțeles nu trebuie uitat să se mute vîrful pe celălalt tub.

Un alt avantaj al acestei fîntîni constă în aceea că el permite să se varieze arbitrar poziția vaselor și să se cerceteze modul în care diferența nivelelor dintre lichide influențează asupra lungimii jetului.

Dacă doriți să măriți mult înălțimea jetului, acest lucru se poate realiza înlocuind în flacoanele inferioare, apa cu mercurul, iar aerul cu

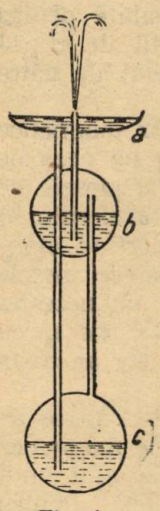


Fig. 1.

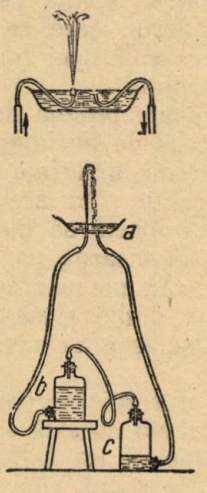


Fig. 2.

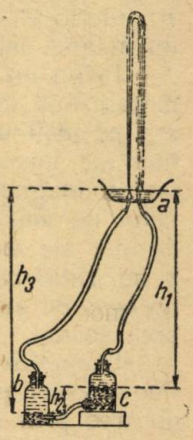


Fig. 3.

apa (fig. 3). Funcționarea aparatului este clară: mercurul curgînd din flaconul *c* în flaconul *b* scoate apa de aici obligînd-o să țîșnească ca o fîntînă arteziană. Știind că mercurul este de 13 ori și jumătate mai greu decît apa putem calcula la ce înălțime trebuie să se ridice jetul de apă. Notăm diferența dintre nivelele respective prin h_1, h_2, h_3. Să vedem, sub acțiunea căror forțe mercurul din vasul *c* (fig. 3) se scurge în vasul *b*. Mercurul din tubul care unește flacoanele este supus la presiune din două părți. În dreapta, asupra sa acționează o presiune, datorită diferenței h_2 a coloanelor de mercur (care este echivalentă cu presiunea unei coloane de apă de 13 ori și jumătate mai înaltă, $13\frac{1}{2}\ h_2$, plus presiunea coloanei de apă h_1; la stînga presează coloana de apă h_3. Ca rezultat, mercurul este supus la forța echivalentă coloanei de apă de:

$$13\frac{1}{2}\ h_2 + h_1 - h_3\ ;$$

însă, $h_1 - h_3 = h_2$; de aceea, înlocuind $h_1 - h_3$ obținem $13\frac{1}{2}\ h_2 - h_2$, adică $12\frac{1}{2}\ h_2$.

Așadar, mercurul ajunge în vasul *b* datorită presiunii provocate de greutatea unei coloane de apă cu o înălțime de $12\frac{1}{2}\ h_2$. De aceea, teoretic, jetul de apă trebuie să atingă o lungime egală cu diferența dintre nivelele mercurului din cele două flacoane înmulțită cu $12\frac{1}{2}$. Frecarea micșorează întrucîtva, această înălțime.

Cu toate acestea, aparatul descris permite să se obțină comod, un jet foarte înalt. Pentru a face ca fîntîna să bată pînă la o înălțime de 10 m este suficient să ridicăm unul dintre flacoane aproximativ la 1 m deasupra celuilalt. Este interesant că, după cum se vede din calcul, ridicarea talerului *a* deasupra flacoanelor cu mercur nu influențează cu nimic asupra înălțimii jetului.

2. *Ceasul și magnetismul.* — Cum putem să ne apărăm de acțiunea forțelor magnetice? Să ne ascundem de ele în spatele unui obstacol impenetrabil pentru ele? (fig. 4)

Oricît de ciudat ar părea, substanța care este impenetrabilă pentru forțele magnetice este chiar fierul, care se magnetizează atît de ușor! În interiorul unui inel de fier acul unei busole nu este deviat de către un magnet așezat în afara inelului.

Printr-un toc de fier se poate proteja de acțiunea forțelor magnetice mecanismul de oțel al unui ceas de buzunar. Dacă ați așeza un ceas de aur pe polii unui magnet puternic în formă de potcoavă, toate piesele de oțel ale mecanismului, în primul rînd arcul subțire al balansierului*) s-ar fi magnetizat și ceasul ar înceta să meargă bine. Îndepărtînd magnetul nu veți face ca ceasul să meargă ca mai înainte, deoarece piesele de oțel ale mecanismului vor rămîne magnetizate, iar ceasul va necesita o reparație radicală, înlocuind multe piese cu altele noi. De aceea, cu un ceas de aur nu trebuie să se facă asemenea experiențe — ele ar costa prea scump.

Dimpotrivă, cu un ceas al cărui mecanism este închis de capace de fier sau oțel, puteți face fără teamă această experiență — forțele magnetice nu trec prin fier și oțel. Apropiați un astfel de ceas de bobinajul unui dinam puternic — precizia mersului său nu se va modifica. Pentru

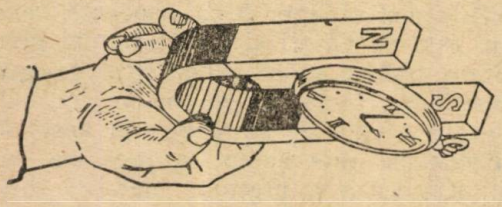


Fig. 4.

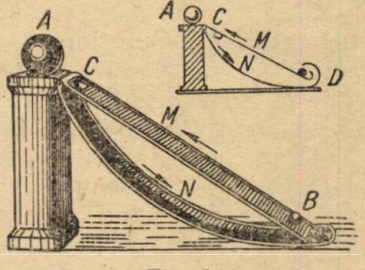


Fig. 5.

electrotehnicieni acest ceas ieftin de fier este ideal, în timp ce un ceas de aur sau de argint devine inutilizabil sub acțiunea magneților, într-un timp foarte scurt.

3. *Un perpetuum mobile magnetic.* — În istoria încercărilor de a se construi un perpetuum mobile, magnetul a jucat un rol de frunte. Nefericiții inventatori nu odată au încercat să folosească magnetul pentru a realiza un mecanism care să se miște singur. Iată proiectul unui astfel de mecanism (descris în secolul al XVII-lea de către englezul John Wilkens, episcop la Chester).

---

* Dacă „părul" nu este făcut dintr-un aliaj special numit invar — care este un metal ce nu se magnetizează, deși în componența sa intră fier și nichel.

Un magnet puternic A este așezat într-o coloană (fig. 5). De această coloană se prijină două jghiaburi M și N, unul sub celălat, cel de deasupra avînd un orificiu nu prea mare C în partea sa superioară, iar cel de jos este încovoiat. Dacă — raționa inventatorul — se pune pe jghiabul superior o bilă B, datorită atracției magnetului A, ea se va rostogoli în sus; ajungînd la orificiu va cădea în jgheabul de jos și se va rostogoli în lungul lui, se va întoarce pe rotunjirea D și va ajunge pe jghiabul superior; de aici, atras de magnet se va rostogoli din nou în sus, din nou va cădea în orificiu, din nou se va rostogoli înainte și înapoi, realizînd o mișcare perpetuă.

Care este absurditatea acestei invenții?

Nu este greu să o găsim. De ce credea inventatorul că bila care s-a rostogolit pe jghiabul N pînă la capătul său va avea o viteză suficient de mare pentru a se ridica în sus pe rotunjirea D? Aceasta s-ar fi întîmplat dacă bila s-ar fi rostogolit numai sub acțiunea forței de gravitație; în acest caz ea s-ar fi mișcat accelerat. Însă, bila se află sub acțiunea a două forțe: forța de gravitație și forța de atracție a magnetului. Aceasta din urmă — prin ipoteză — este destul de mare pentru a putea să oblige bila să se ridice din poziția B în poziția C. De aceea prin jgheabul N bila se va mișca nu accelerat, ci uniform întîrziat. Și chiar dacă ajunge în capătul inferior, în nici un caz nu va căpăta o viteză destul de mare pentru a se putea ridica pe rotunjirea D.

Proiectul descris a reapărut de multe ori, sub diferite aspecte. Unul dintre ele, oricît de ciudat ar părea a fost patentat în Germania în anul 1878, adică la 30 de ani după stabilirea legii conservării energiei! Inventatorul a mascat atît de bine ideea falsă care stătea la baza perpetuum-mobile — lui pe care îl făcuse, încît a reușit să inducă în eroare comisia tehnică care i-a eliberat patentul. Și, cu toate că, conform hotărîrii, patentele de invenție ale căror idei contrazic legile naturii nu trebuie să fi eliberate, de data aceasta invenția a fost patentată. Probabil că fericitul posesor al acestui patent unic în felul său a fost dezamăgit în scurt timp de opera sa, deoarece numai peste doi ani a încetat de a mai plăti taxa și curiosul patent și-a pierdut protecția legii: „invenția" sa a devenit un bun al tuturor. Totuși, nu are nimeni nevoie de ea.

NOTE MATEMATICE

DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE

Vom demonstra două inegalități trigonometrice cunoscute.

$$\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}; \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Fie $k = \cos A \cos B \cos C =$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]\cos C = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos C\right]\cos C.$$

Punînd $x = \cos C$, obținem ecuația de gradul II.

$$x^2 - \cos(A-B)x + 2k = 0.$$

Deoarece rădăcinile acestei ecuații trebuie să fie reale avem

$$\Delta = \cos^2(A-B) - 8k \geqslant 0 \text{ deci}$$

$$k \leqslant \frac{1}{8}\cos^2(A-B) \leqslant \frac{1}{8}.$$

În mod analog, A, B, C fiind unghiurile unui triunghi.

Fie $k = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

Punînd $x = \sin\frac{C}{2}$, obținem următoarea ecuație de gradul al II-lea

$$x^2 - x\cos\frac{A-B}{2} + 2k = 0.$$

Cum rădăcinile acestei ecuații trebuie să fie reale avem:

$$\Delta = \cos^2\frac{A-B}{2} - 8k \geqslant 0$$

de unde:

$$k \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

ceea ce trebuie demonstrat.

Zamfir D. Corneliu, elev ș. m. 3 Pitești

ASUPRA PROBLEMEI 4249

În G.M.F.-B nr. 7/1960 a apărut problema 4249 dată de tov. D. Flondor. În această notă dau o generalizare a punctului c) al acestei probleme.

Se dă triunghiul ABC și fie M un punct variabil în plan. Prin acest punct ducem două drepte arbitrare d_1 și d_2, care întîlnesc laturile AB și AC în punctele P și Q. Fie N al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor BMP și CMQ. Să se găsească locul geometric al punctului N cînd unghiul PMQ rămîne constant, punctul M variind în plan".

Se unește punctul N cu punctele B, C și M.

Se observă că unghiurile BNM și BPM sînt egale ca avînd aceeași măsură — jumătatea arcului BM. Analog se arată că și unghiurile MNC și MQC sînt egale. Deci putem scrie:

$$\sphericalangle BNM + \sphericalangle MNC = \sphericalangle BPM + \sphericalangle MQC.$$

Dar

$$\sphericalangle BPM + \sphericalangle MQC = (180° - \sphericalangle APM) + (180° - \sphericalangle AQM),$$

sau

$$\sphericalangle BPM + \sphericalangle MQC = 360° - (\sphericalangle APM + \sphericalangle AQM) = 360° -$$

$$- (360° - \sphericalangle PAQ - \sphericalangle PMQ) = \sphericalangle PAQ + \sphericalangle PMQ = \text{constant.}$$

Deci $\sphericalangle BNC = \sphericalangle PAQ + \sphericalangle PMQ = \text{constant.}$

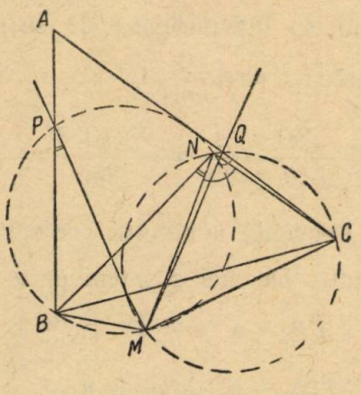


Fig. 1.

Cum punctele B și C sînt fixe iar unghiul BNC este constant rezultă imediat că locul geometric al punctului N este arcul capabil de unghiul $(\sphericalangle PAQ + \sphericalangle PMQ)$ subîntins de coarda BC.

Analog cazul cînd punctul N se obține de partea opusă lui A față de BC.

Observație: Cînd punctul M variază pe latura BC, iar dreptele d_1 și d_2 sînt paralele cu laturile AB și AC, obținem problema 4249.

Ghica Anton, șc. m. 1 Pitești

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4771

Un om fugind pe terasamentul unei căi ferate cu o viteză 2 m/s, aude un sunet de 400 Hz emis de fluierul unui tren care se apropie de el cu o viteză de 72 km/h.

a) *Care este frecvența sunetului emis de tren.*

b) *Va auzi omul același sunet dacă se îndepărtează de tren cu aceeași viteză de 2 m/s? Care este frecvența sunetului perceput în acest caz.*

c) Care este *viteza vîntului care suflă spre observator, dacă frecvența sunetului perceput de observatorul care se apropie de tren este de 398 Hz.*

Irina Fărcaș, elevă Oradea

Soluția autoarei. a) Dacă un observator se apropie de sursă cu viteza V_1, care se mișcă spre observator cu viteza v_2 și emite un sunet cu frecvența f, atunci frecvența sunetului perceput de observator este $f' = f\frac{v + v_1}{v - v_2}$ unde v este viteza sunetului în aer. Noi trebuie să calculăm f, adică:

$$f = \frac{f'(v - v_2)}{v + v_1} = \frac{400(340 - 20)}{340 + 2} = \frac{400 \cdot 320}{342} \approx 374\ Hz.$$

b) Cînd observatorul se îndepărtează de sursă, frecvența sunetului perceput se schimbă și este: $f' = f\frac{v - v_1}{v + v_2}$;

$$f' = 374\frac{340 - 2}{340 + 20} = \frac{374 \cdot 338}{360} = 350\ Hz.$$

c) În cazul acesta frecvența sunetului perceput este $f' = f\frac{v + u + v_1}{v + u - v_2}$ unde u este viteza vîntului. De aici scoatem pe u:

$$f'v + f'u - f'v_2 = fv + fu + fv_1$$

$$u(f' - f) = f(v + v_1) + f'(v_2 - v) \text{ de unde } u = \frac{f(v + v_1) - f'(v - v_2)}{f' - f} =$$

$$= \frac{374(340 + 2) - 398 \cdot 320}{398 - 374} \cong 22{,}8.$$

Viteza vîntului este $u = 22{,}8$ m/s.

Problema 4787

Se dau două cercuri (O) și (O') ce se întîlnesc în A și B. Fie M un punct variabil pe cercul O, iar dreptele MA și MB taie cercul O' respectiv în N și P. Să se arate că: a) înălțimile triunghiului MNP trec fiecare prin cîte uun punct fix, b) locul geometric al ortocentrului MNP este un cerc concentric cu cercul (O).

Virgil Nicula, student București

Soluție. Vom considera cazul cînd punctul M parcurge arcul AB al cercului (O) de puncte exterioare cercului (O').

Atunci $\sphericalangle MNV = \sphericalangle MPS = 90° - \alpha = \text{const.}$

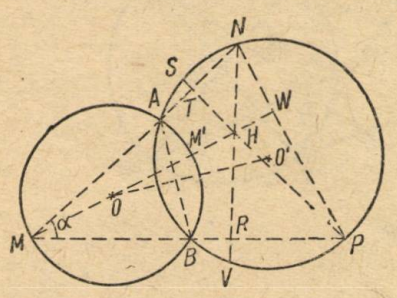
Cum A și B sînt fixe iar unghiurile de mai sus constante, rezultă că că V și S sînt fixe, deoarece $\overset{\frown}{BAS} = \overset{\frown}{ABV} = 2(90° - \alpha) = \text{const.}$

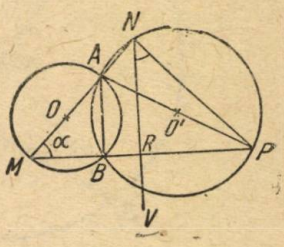
Așa dar înălțimile NR și PT trec prin cîte un punct fix. Cum $\sphericalangle SHV = 180° - \alpha$ iar S și V sînt puncte fixe, H descrie arcul capabil de unghiul $180° - \alpha$ subîntins de coarda SV.

Se arată asemănător cînd M parcurge arcul AB al cercului (O) de puncte interioare cercului (O'), că locul lui H este capabil de unghiul α subîntins de coarda SV; deci cînd M parcurge cercul (O), H, ortocentrul

triunghiului MNP descrie cercul în care SV este privită sub unghiul α din partea centrului O.

Dreptele MW și NP sînt perpendiculare. Însă $\sphericalangle MM'A = \sphericalangle MBA = \sphericalangle MNP$ unde M' este punctul unde MW întîlnește cercul (O). Deoarece și $\sphericalangle MM'A = \sphericalangle MNW$, rezultă $\sphericalangle MAM' = \sphericalangle NWM = 90°$. Așadar M este diametral opus lui M' în cercul (O), deci MW trece permanent prin centrul cercului (O) care este un punct fix.





Vom considera o poziție particulară a lui M, anume MB perpendicular pe AB. Atunci, e aproape evident că MN e perpendicular pe NP, iar $N \equiv S$, și $\sphericalangle NMP = \sphericalangle RNP = \alpha$. Deci locul lui M e, evident, cercul de rază ON și centrul O, deci concentric cu cercul (O).

Problema 4790

Să se construiască numai cu rigla axa radicală a două cercuri, centrele cercurilor fiind cunoscute.

Anghelache C. Tudorică, student București

Soluție. Vom distinge următoarele trei cazuri după poziția relativă a celor două cercuri:

1. *Cercurile nu se taie.*

a) Sînt exterioare $(R_1 > R_2)$.

Fie O_1, O_2 centrele celor două cercuri exterioare (fig. 1). O dreaptă oarecare intersectează cercurile (O_1), (O_2) respectiv în punctele A, B, C, D. Dreapta CB_1 (B_1 diametral opus punctului B) taie cercul (O_1) în C_1, iar dreapta BC_2 (C_2 diametral opus punctului C) taie cercul (O_2) în B_2. Dreptele BC_1 și B_2C se taie în P. Prin construcție patrulaterul BC_1B_2C este inscriptibil,

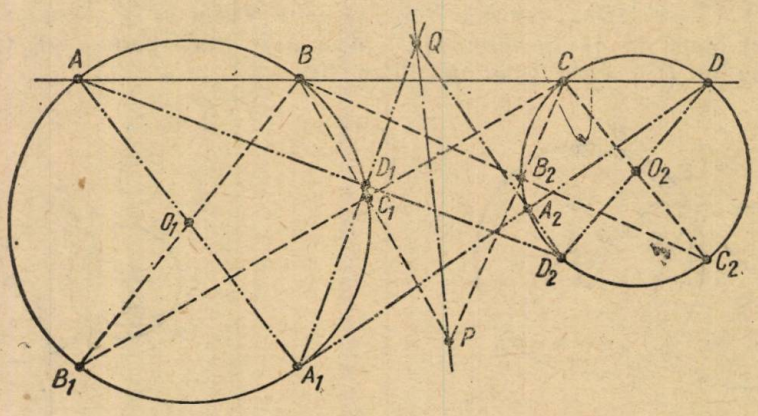
$(\sphericalangle B_1C_1B = \sphericalangle BC_1C = \sphericalangle BB_2C = \sphericalangle CB_2C_2 = 90°)$ deci: $PC_1 \cdot PB = PB_2 \cdot PC$,

adică punctul P aparține axei radicale.

Dreapta A_1D (A_1 diametral opus punctului A) taie cercul (O_2) în A_2, iar dreapta AD_2 (D_2 diametral opus punctului D) taie cercul (O_1) în D_1. Dreptele A_1D_1 și A_2D_2 se taie în Q. Patrulaterul $A_1D_1A_2D_2$ este inscriptibil (prin construcție $\sphericalangle A_1D_1D_2 = \sphericalangle A_1A_2D_2 = 90°$) deci și punctul Q aparține axei radicale. Axa radicală este dreapta PQ. Construcția ei s-a făcut numai cu rigla.

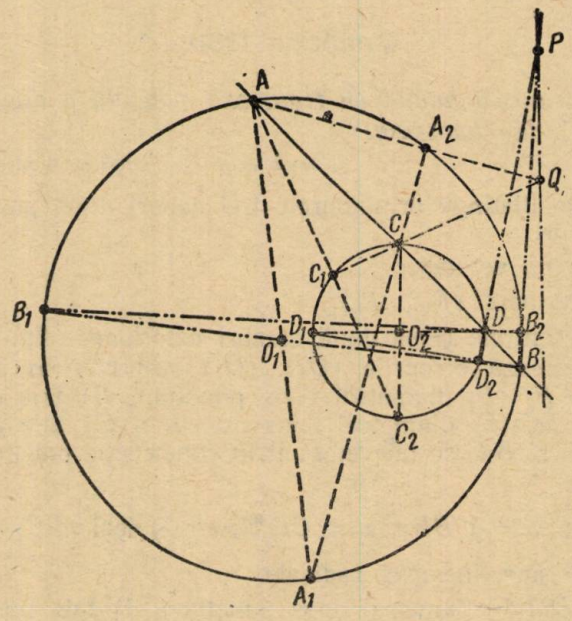
b) *Sînt interioare* ($R_1 > R_2$), fig. 2.

O dreaptă oarecare taie cercurile (O_1), (O_2) respectiv în punctele A, B, C, D. Dreapta D_1B (D_1 diametral opus punctului D) taie cercul (O_2)



în D_2, iar dreapta B_1D (B_1 diametral opus punctului B) taie cercul (O_1) în B_2.

Dreapta A_1C (A_1 diametral opus punctului A) taie cercul (O_1) în A_2, iar dreapta AC_2 (G diametral opus punctului C) taie cercul (O_2) în C_1.



Dreptele DD_2 și BB_2 se taie în P. Patrulaterul D_2DB_2B este inscriptibil pentru că:

$$\sphericalangle DD_2B = \sphericalangle D_1D_2D = \sphericalangle DB_2B = \sphericalangle B_1B_2B = 90 \text{ (prin construcție)}$$

deci:

$$\sphericalangle DD_2B + \sphericalangle DB_2B = 180°.$$

Deci punctul P aparține axei radicale.

Dreptele AA_2 și CC_1 se taie în Q. Patrulaterul AA_2CC_1 este inscriptibil pentru că:

$\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle AA_2C = 90^\circ$ (prin construcție), deci punctul Q aparține axei radicale. Axa radicală este deci dreapta PQ.

2. *Cînd cercurile sînt tangente* un punct al axei radicale fiind dat (punctul de tangentă) problema se reduce la construirea unui singur punct al axei radicale (la fel ca la 1).

3. *Cînd cercurile sînt secante* axa radicală este dreapta ce trece prin punctul de intersecție al celor două cercuri.

Problema 4795

Printr-un conductor de nichelină cu secțiunea de 0,25 mm² trec într-o secundă 21.10¹⁸ electroni. Știind că în 5 minute se ridică temperatura unei mase de apă de 1,2 kg cu 11°C, să se afle lungimea conductorului și tensiunea de la capetele lui.

$$\left(\varrho = 0{,}42\ \frac{\Omega mm^2}{m}\right).$$

Paxino Gh., elev Sinaia

Soluție. 1 $C = 6.10^{18}$ electroni; $I = \dfrac{21 \cdot 10^{18}}{6 \cdot 10^{18}} = 3{,}5\ A$

$Q = m \triangle t = 1200 \,.\, 11 = 13200$ calorii.

Din legea Joule - Lenz avem

$$Q = 0{,}24 \cdot RI^2t.$$

$$R = \frac{Q}{0{,}24 \cdot I^2 \cdot t};\quad R = \frac{13200}{0{,}24 \cdot 12{,}25 \cdot 300} \cong 4\,\Omega$$

$$R = \frac{\varrho l}{s};\quad l = \frac{Rs}{\varrho} = \frac{4 \cdot 0{,}25}{0{,}42} = 0{,}38\,m$$

$$U = IR = 3{,}5 \cdot 4 = 14\,V.$$

Problema 4799

Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg}(m+3)x \cdot \operatorname{tg} mx = \operatorname{tg}(m+1)x \cdot \operatorname{tg}(m+2)x.$$

C. V. Costăchescu, Constanța

Soluție. Avem $\dfrac{\operatorname{tg}(m+3)x}{\operatorname{tg}(m+1)x} = \dfrac{\operatorname{tg}(m+2)x}{\operatorname{tg} mx}$, sau

$$\frac{\operatorname{tg}(m+3)x - \operatorname{tg}(m+1)x}{\operatorname{tg}(m+3)x + \operatorname{tg}(m+1)x} = \frac{\operatorname{tg}(m+2)x - \operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg}(m+2)x + \operatorname{tg} mx}$$

de unde

$$\frac{\sin 2x}{\sin (2m+4)x} = \frac{\sin 2x}{\sin (2m+2)x}$$

sau

$\sin (2m+4)x = \sin (2m+2)x$. Prin urmare

$(2m+4)x_1 + (2m+2)x_1 = 2k\pi + \pi$. De unde $x_1 = \frac{(2k+1)\pi}{4m+6}$,

sau

$(2m+4)x - (2m+2)x = 2k\pi$. De unde $2x_2 = 2k\pi$ sau $x_2 = k\pi$

Observație. Soluția $x_0 = \frac{k}{2}\pi$ introdusă de $\sin 2x = 0$ nu corespunde decît pentru k par, căci altfel $tgmx$ și $tg(m+2)x$ *sau* $tg(m+1)x$ și $tg(m+3)x$, după cum m e fără sau cu soț, nu ar avea sens.

Problema E : 1703

Să se afle două numere, știind că raportul lor este $^6/_{11}$, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 1386.

I. Velescu, profesor C. de Argeș

Soluție. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale date este egal cu produsul acestor numere, împărțit prin cel mai mare divizor comun al lor.

Notînd numerele naturale date cu a și b. iar $c \cdot m \cdot m \cdot c \cdot m = M$ și $c \cdot m \cdot m \cdot c \cdot d$ al lor cu d, avem : $M = \frac{a \cdot b}{d}$.

Dacă $a = d \cdot a'$ și $b = d \cdot b'$, atunci

$\frac{a}{b} = \frac{d \cdot a'}{d \cdot b'} = \frac{a'}{b'}$. Dar $\frac{a'}{b'} = \frac{6}{11}$, deci $a' = 6$; $b' = 11$.

$$M = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{d \cdot a' \cdot d \cdot b'}{d} = a'b' \cdot d.$$

Înlocuim literele prin datele problemei ; avem : $1386 = 6 \cdot 11 \cdot d$.

Aflăm cel mai mare divizor comun al celor două numere (a și b) $d = \frac{1386}{6 \cdot 11} = 21$. Mai avem : $a = d \cdot a' = 21 \cdot 6 = 126$. De asemenea $b = 21 \cdot 11 = 231$.

Problema E : 1707

Trei pionieri au depus într-o săptămînă la CEC suma de 45 lei. Dacă suma celui de al doilea s-ar dubla, iar a celui de al treilea s-ar tripla, ei ar avea împreună 84 lei. În cazul că suma celui de al doilea se triplează, iar a celui de al treilea se dublează, suma crește cu încă 3 lei față de situația precedentă, Ce sumă a depus la CEC fiecare pionier?

Marica Ștefan, profesor Tr. Severin

Soluția autorului. 1. Dacă din 84 se scade 45 rămîne o sumă egală cu suma celui de-al doilea, și dublul sumei celui de-al treilea

$$84 - 45 = 39 \text{ lei}$$

2. Dacă din 87 se scade 45 rămîne un număr ce reprezintă suma depusă de al treilea și dublul sumei celui de-al doilea

$$87 - 45 = 42 \text{ lei}$$

3. Însumînd 39 lei cu 42 lei obținem de trei ori suma celui de al doilea și al treilea.

$$39 + 42 = 81 \text{ lei}$$

4. Împărțind 81 la 3 se obține cît au depus la *CEC* al doilea și al treilea.

$$81 : 3 = 27$$

5. Se face scăderea:
$45 - 27 = 18$ lei, suma depusă de primul pionier.
6. Pentru a afla cît a depus al treilea se face scăderea:
$39 - 27 = 12$ lei, suma depusă de pionierul al treilea.
7. Scăzînd din 45 suma depusă de primul și al treilea, rezultă suma secundului:

$$45 - 30 = 15 \text{ lei depune al doilea}$$

Problema E : 1709

Un tractorist pleacă de la S.M.T. la o gospodărie agricolă colectivă. După 45 minute se oprește într-un sat și află că mai era un km pînă cînd să parcurgă $\frac{1}{3}$ din întreaga distanță.

Mărește după aceea viteza tractorului cu 6 km/oră și ajunge la destinație după $1^1/_4$ ore. La ce depărtare se află gospodăria agricolă colectivă față de S.M.T.?

D. Mîrzan, profesor R. Vîlcea

Soluția autorului. Notăm cu x, viteza tractorului în kilometri pe minut.

$$2(45x + 1) = 75\left(x + \frac{6}{60}\right) - 1 \text{ ; sau}$$

$$90x + 2 = 75x + \frac{15}{2} - 1 \text{ ;}$$

$$180x + 4 = 150x + 15 - 2, \text{ de unde}$$

$$30x = 9 \text{ ; } x = 0{,}3$$

Calculăm depărtarea:

$$45 \cdot \frac{3}{10} + 75\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{27}{2} + \frac{45}{2} + \frac{15}{2} = \frac{87}{2} = 43{,}5 \text{ km.}$$

Problema E : 1717

Patru tractoare au arat împreună 125 de hectare. Partea arată de primul tractor, față de partea arată de tractorul al doilea se află în raportul de $\frac{2}{3}$; *partea arată de tractorul al doilea față de partea arată de tractorul al treilea se află în raportul de* $\frac{4}{5}$; *iar partea arată de tractorul al patrulea se află în raportul de* $\frac{6}{11}$. *Să se afle : cîte hectare a arat fiecare tractor.*

Mocanu Augustin, Zalău

Soluție. Notînd cu x_1, x_2, x_3, x_4 părțile arate de I, al II-lea, al III-lea și al IV-lea tractor, vom avea :

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{2}{3};\quad \frac{x_2}{x_3}=\frac{4}{5}\quad \text{și}\quad \frac{x_3}{x_4}=\frac{6}{11}.$$

Schimbînd mezii între ei în aceste proporții obținem :

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}\quad (1);\qquad \frac{x_2}{4}=\frac{x_3}{5}\quad (2);\qquad \frac{x_3}{6}=\frac{x_4}{11}.\quad (3)$$

Din proporția (2) aflăm :

$$x_2=\frac{4\cdot x_3}{5}$$

de unde împărțind ambii membri cu 3 obținem :

$$\frac{x_2}{3}=\frac{4x_3}{5\cdot 3}=\frac{4x_3}{15}=\frac{x_3}{\frac{15}{4}}.$$

Din proporția (3) aflăm : $x_3=\frac{6x_4}{11}$ de unde, împărțind ambii membri cu $\frac{15}{4}$ obținem

$$\frac{x_3}{\frac{15}{4}}=\frac{6x_4}{11\cdot\frac{15}{4}}=\frac{6x_4}{\frac{165}{4}}=\frac{2x_4}{\frac{55}{4}}=\frac{x_4}{\frac{55}{8}}.$$

Ținînd seama de rezultatele găsite vom avea :

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}=\frac{x_3}{\frac{15}{4}}=\frac{x_4}{\frac{55}{8}}\quad \text{sau :}\quad \frac{x_1}{16}=\frac{x_2}{24}=\frac{x_3}{30}=\frac{x_4}{55}.$$

Aplicînd proprietatea șirurilor de rapoarte egale vom avea :

$$\frac{x_1}{16}=\frac{x_2}{24}=\frac{x_3}{30}=\frac{x_4}{55}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{16+24+30+55}=\frac{125}{125}=1$$

de unde găsim că : primul tractor a arat 16 hectare, al doilea 24 ha, al treilea 30 ha, iar al patrulea 55 ha.

Problema E : 1720

O brigadă compusă din 12 lucrători poate termina săpatul unui canal în 25 zile. După ce brigada lucrează 5 zile, 6 lucrători pleacă în altă misiune. În cîte zile se va termina săpatul acelui canal?

B. Baieră, profesor Păunești

Soluția autorului. În cîte zile s-ar termina lucrarea de un singur lucrător? $12 \times 25 = 300$.

În cîte zile ar termina un muncitor lucrul efectuat de cei 12 lucrători în 5 zile? $12 \times 5 = 60$.

Aflăm zilele rămase de lucru:

300 zile — 60 zile = 240 zile.

Aflăm numărul de lucrători rămași după plecarea celor 6 lucrători: 12 lucrători — 6 lucrători = 6 lucrători.

Zilele necesare pentru terminarea canalului: 240 : 6 = 40.

Problema E : 1724

Distanța dintre două orașe este de 600 km. Din același oraș pleacă spre celălalt două trenuri la intervale diferite. Primul merge cu 50 km pe oră. Ce viteză are al doilea tren dacă primul pleacă cu o oră mai devreme și ajunge cu o oră mai tîrziu?

E. Titilici, profesor Focșani

Soluția autorului. Primul tren pleacă cu o oră mai devreme și ajunge cu o oră mai tîrziu. În acest timp străbate:

$$2 \times 50 = 100 \text{ km}.$$

Mai rămîne de parcurs: 600 km — 100 km = 500 km. Această distanță o străbate în: 500 km : 50 km oră = 10 ore.

timp în care al doilea tren străbate întreaga distanță de 600 km.

Al doilea tren are viteza de: 600 : 10 = 60 km pe oră.

Problema E : 1764

În triunghiul ABC se notează cu O mijlocul medianei AA'. Se duce BO pînă taie pe AC în B' și CO pînă taie pe AB în C'. Se cere:

a) *Să se arate că BC și B'C' sînt paralele;* b) *Să se arate că aria* $OB'C' = \frac{1}{18}$ *aria ABC.*

* * *

Soluție. — a) Ducînd $A'M$ paralelă la BB', ea va fi linie mijlocie în triunghiul BCB', deci $CM = MB'$.

În triunghiul $AA'M$, OB' fiind paralelă cu MA' va tăia și pe AM în două părți egale, $AB' = B'M$. Rezultă $AB' = B'M = MC = \frac{1}{3} AC$.

Ducînd $A'N$ paralelă cu CC' ea va împărți și latura BC' a triunghiului BCC' în două părți egale: $BN = NC'$.

În triunghiul $AA'N$, OC' fiind paralelă cu $A'N$ va împărți și pe NA în două părți egale, $NC' = C'A$ și rezultă $AC' = CN' = NB = \frac{1}{3} AB$.

Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $B'C'$ este paralelă cu latura BC a triunghiului ABC.

b) triunghiurile $OB'C'$ și OBC sînt asemenea și raportul de asemănare este $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3}$, deci, aria $OB'C' = \frac{1}{9}$ aria OBC. Însă aria $OBC = \frac{1}{2}$ aria ABC, triunghiurile avînd aceiași bază, iar înălțimile în raportul 1 : 2, rezultă că aria $OB'C' = \frac{1}{18}$ aria ABC.

Problema E : 1766

Se racordează la sistemul energetic republican un SMT și un GAS într-un punct T, astfel ca ST = GT (unde S reprezintă SMT-ul și G CAS-ul).

Știind că distanța GS = 41,2 km și că distanta de la GAS la firul ce leagă SMT-ul de punctul T este de 40 km se întreabă:

a) *Care este distanța de la T la cele două unități agricole socialiste;*
b) *Cum trebuie făcută legătura pentru a face maximum de economii;*
c) *De cîți stîlpi este nevoie în aceste condiții, știind că se prevede cîte un stîlp la 50 m de cablu.*

A. Deutsch, profesor Rădăuți

Soluție. — a) Însemnînd pe $ST = GT$ cu x, pe AG cu $d = 40$ km, pe GS cu $m = 41{,}2$ km, pe AS cu u și aplicînd teorema lui Pitagora triunghiurilor dreptunghice AGT și ASG obținem:

$$x^2 = (x - u)^2 + d^2$$

$$u^2 = m^2 - d^2$$

de unde rezultă: $2ux = m^2$ sau $x = \frac{m^2}{2u}$.

Dar $u = \sqrt{m^2 - d^2}$; înlocuind valorile date și efectuînd calculele obținem: $u = 9{,}87$ km și $x = 85{,}98$ km.

b) Legătura cea mai convenabilă este $TS + AG$. Într-adevăr,

$TS + AG < TS + TG$, căci $AG < TG$. La fel, $TS + AG < TS + SG$, căci $AG < SG$.

c) Întrucît $TS + AG = 85{,}98$ km $+ 40$ km $= 125{,}98$ km va fi nevoie de $125{,}98 \cdot 1000 : 50 \approx 2520$ stîlpi.

Problema E : 1779

Două brigăzi de la S.M.T. avînd împreună 25 tractoriști, ară în 12 zile 2 040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi, iar din a doua 8 ha pe zi. Se cere:

a) *Cîți tractoriști sînt în fiecare brigadă; b) cîtă economie au realizat cele două brigăzi dacă prima economisește 2 litri de combustibil la ha și a doua 1,5 decilitri la ha și dacă litrul de combustibil costă 0,44 lei.*

(Examenul de admitere în cl. VIII, iunie 1961, Brașov)

Soluție aritmetică. — a) Aplicăm metoda ipotezelor. Presupunem că toți cei 25 tractoriști sînt din brigada a doua. În acest caz, ei ar ara în total într-o zi, 8 25 = 200 ha, în timp ce într-o zi se ară 2.040 : 12 = 170 ha.

Diferența dintre suprafața care se ară într-o zi în realitate și cea care s-ar ara dacă toți tractoriștii ar fi în brigada a doua este de 200 — 170 = 30 ha. Direfența dintre suprafețele arate într-o zi de cîte un tractorist din fiecare brigadă (fiind de 8 — 6 = 2 ha, rezultă că în prima brigadă sînt 30 : 2 = 15 tractoriști, iar în a doua sînt 25 — 15 = 10 tractoriști.

b) Tractoriștii din prima brigadă ară în 12 zile : 15. 6. 12 = 1 080 ha, economisind 2 1 080 = 2 160 litri combustibil în valoare de 2160 · 0,40 = 864 lei.

Tractoriștii din brigada a doua ară în 12 zile 10 8 12 = 960 ha ecoonmisind 960 1,5 dl = 960 0,15 l = 144 litri combustibil care valorează 144 0,40 = 57,6 lei. În total se economisesc 864 + 57,6 = 921,60 lei.

Problema E. 760 (MFL)

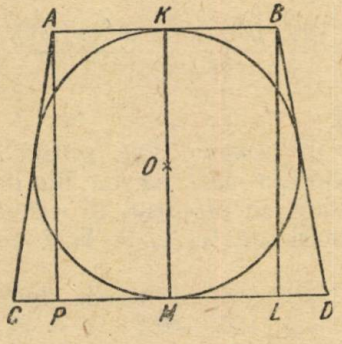
Să se calculeze laturile trapezului isoscel circumscris cercului cu raza de 2 cm cunoscînd că aria trapezului este de 20 cm².

Soluția dată de eleva *Terdik Erzsébet*, școala de 7 ani Nr. 4 din Sighet. Aria trapezului este

$$S = \frac{(AB + CD)\,KM}{2}, \text{ de unde}$$

$$20 = (AB + CD)\,2, \text{ sau } 10 = AB + CD, \qquad (1)$$

deoarece înălțimea trapezului este egală cu diametrul cercului.



Laturile opuse ale unui patrulater circumscris cercului au sume egale, deci $2AC = 10$, de unde $AC = 5$.

Din triunghiul ACP, pe baza teoremei lui Pitagora

$CP^2 = AC^2 - AP^2$, sau $CP^2 = 25 - 16 = 9$, de unde $CP = 3$.

Folosind relația (1) putem scrie că

$$2AB + 2CP = 10, \text{ sau } AB + 3 = 5, \text{ deci } AB = 2.$$

Laturile trapezului sînt $AB = 2$ cm, $CD = 2CP + 2$ cm $= 8$ cm și $AC = 5$ cm.

Problema E. 761 (MFL)

Să se demonstreze că dacă au loc relațiile

$$x + y = a + b \text{ și } x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

atunci sînt valabile și relațiile

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \text{ și } x^4 + y^4 = a^4 + b^4$$

Soluția dată de eleva *Török Anna*, școala medie Nr. 3 din Sibiu.

Ridicînd la patrat ambii membrii ai egalității $x + y = a + b$ și folosind relația $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, obținem că

$$xy = ab.$$

Din identitatea $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\ (x + y)$ rezultă egalitatea

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy\ (x + y)$$

sau, fiindcă

$$x + y = a + b \text{ și } xy = ab,$$

$$x^3 + y^3 = (a + b)^3 - 3\ ab\ (a + b).$$

De aici

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b) - 3\ ab\ (a + b) = a^3 + b^3$$

ceea ce era de demonstrat. Ultima se demonstrează analog.

Problema E. 762 (MFL)

Să se calculeze valorile care pot fi atribuite lui k, l, m și n pentru ca fracția

$$\frac{101 \cdot 102 \ldots\ldots 999 \cdot 1000}{2^k 3^l 5^m 7^n}$$

să aibă valoare întreagă.

Soluția dată de elevul *Demény Pál*, școala medie „Bethlen Gábor" din Aiud. Pentru ca expresia dată să fie un număr întreg, trebuie ca numărătorul să fie divizibil cu produsul $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n$. Vom stabili pe rînd puterile cele mai mari ale lui 2, 3, 5, 7 cu care numărătorul este divizibil.

De la 101 pînă la 1000 primul număr divizibil cu 2 este 102, iar ultimul este 1000, deci există $(1000-100) : 2 = 450$ numere divizibile cu 2.

Tot între 101 și 1000 primul număr divizibil cu 2^2 este 104, iar ultimul 1000, deci în numărător există 225 factori divizibili cu 4.

Primul factor al numărătorului divizibil cu 2^3 este 104, iar ultimul de 1000, deci există 113 factori divizibili cu 2^3. În mod analog putem stabili că există 56 factori divizibli cu 2^4, 28 factori divizibili cu 2^5; 14 factori divizibili cu 2^6; 7 factori divizibili cu 2^7; 3 factori divizibili cu 2^8 și 1 factor divizibil cu 2^9.

Deci, puterea cea mai mare a lui 2 pentru care expresia dată este un număr întreg este $l = 450+225+113+56+28+14+7+3+1 = 897$.

Primul factor al numărătorului divizibil cu 3 este 102, iar ultimul este 999. Există deci 300 factori divizibili cu 3.

Primul factor al numărătorului divizibil cu 3^2 este 108, iar ultimul este 999, deci există 100 factori divizibili cu 3^2. În mod analog putem stabili că între 101 și 1000 există 34 numere divizibile cu 3^3, 11 numere divizibile cu 3^4, 4 numere divizibile cu 3^5 și 1 număr divizibil cu 3^6.

Puterea cea mai mare a lui 3 pentru care expresia dată mai este egală cu un număr întreg este $l = 300 + 100 + 34 + 11 + 4 + 1 = 450$.

Începînd de la primul factor divizibil cu 5, adică 105 pînă la 1000 există 180 numere divizibile cu 5. Numărul factorilor divizibili cu 5^2 este 36, al celor divizibili cu 5^3 este 8 și al celor divizibile cu 5^4 este 1.

Puterea cea mai înaltă a lui 5 pentru care condiția problemei mai este satisfăcută este $m = 180 + 36 + 8 + 1225$.

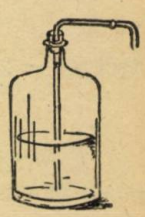
În mod analog stabilim puterea cea mai înaltă a lui 7 : $n = 128 + 18 + 2 = 148$.

În rezumat, condiția ca expresia dată să aibă valoare întreagă este ca numerele k, l, m și n să satisfacă relațiile $k \leqslant 897$, $l \leqslant 450$, $m \leqslant 225$ și $n \leqslant 148$.

Problema E. 763 (MFL)

Cum putem scoate din vasul ce se vede în figură, un pahar de apă fără scoaterea dopului sau înclinarea vasului.

Soluția elevului *Hegedüs István*, cl. VII-a a școlii de 7 ani nr. 4 din Petroșani. Din vasul reprezentat în figură, fără înclinarea lui sau scoaterea dopului putem scoate un pahar de apă suflînd mai întîi în tub. Prin aceasta presiunea de deasupra apei va fi mai mare decît cea din exterior. Apa atîta timp va curge prin tub, pînă cînd cele două presiuni se echilibrează. Același principiu îl au sticlele de sifon.



Heron a fost primul care a construit un dispozitiv pe acest principiu, care s-a numit mingea lui Heron.

Soluția elevului *Erdö, László*, cl. VI-a a școlii medii „Brassai Samuel" — Cluj. Răspunsul la întrebare l-am stabilit pe cale experimentală. Mai întîi am confecționat instalația din figură și am tras aerul prin tubul de sticlă. Apa a început să curgă, dar numai atîta timp, cît am tras. După aceia am suflat aer în tub, și după 2—3 suflări paharul s-a umplut cu apă.

Explicarea fenomenului. Coloana de apă este în echilibru întrucît ea este în contact cu atmosfera prin tubul de sticlă. Pentru ca apa să se ridice, trebuie să mărim presiunea aerului de deasupra lichidului. Acest lucru se realizează prin suflare în tubul de sticlă.

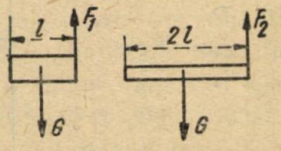
Problema E. 764 (MFL)

Două plăci de piatră cu aceiași greutate și lățime din poziție orizontală, așa cum se vede pe figură, le aducem în poziție verticală (prin rotire față de o muchie). Una din plăci este de două ori mai lungă decît cealaltă.

Care dintre ele necesită o forță mai mare pentru ridicare?
La ridicarea căreia se consumă un lucru mecanic mai mare?

* * *

Soluția elevului *Isky László*, cl. VI-a a școlii de 7 ani nr. 10 din Baia Mare. Ambele plăci de piatră le putem privi ca pîrghie, care are punctul de aplicație a rezistenței în centrul de greutate, iar punctul de



aplicație a forței active la marginea plăcilor.

Putem scrie: $G \cdot \frac{l}{2} = F_1 \, l$ și $G \cdot l = F_2 \cdot 2l$,

de unde

$$F_1 = F_2 = \frac{G}{2}.$$

Deci pentru ridicarea fiecărei plăci avem nevoie de aceeași forță. Lucrul mecanic necesar pentru ridicarea plăcii mai lungi este mai mare, întrucît deplasarea punctului de aplicație a forței este mai mare:

$$L_1 = \frac{G}{2} l \quad \text{și} \quad L_2 = \frac{G}{2} \cdot 2l,$$

deci $L_2 = 2L_1$.

Problema E. 765 (MFL)

Este oare periculoasă tensiunea din rețelele electrice aeriene, pentru păsările care se așează pe ele?

* * *

Soluția elevului *Jakab Imre*, cl. VII-a a școlii medii mixte din Bistrița. Tensiunea de rețeaua electrică aeriană nu este periculoasă pentru păsările ce se așază pe acești conductori, întrucît acestea vin în contact numai cu unul din conductori, și distanța între picioarele lor este foarte mică. Pericol prezintă numai atingerea concomitentă a ambilor conductori sau a unuia și a pămîntului, deoarece tensiunea între aceștia este mare.

Observația elevului *Horváth Huba*, cl. VIII-a a Liceului Unificat din Dej. În caz de ploaie, timp umed aerul devine bun conducător de electricitate, în astfel de cazuri se poate produce descărcare electrică între conductor și pasărea umedă, ceea ce are o influență mortală asupra păsării.

Problema E. 766 (MFL)

Lungimea AB a unui conductor metalic este $l = 20$ m, rezistența: $R = 35$ Ω. Capătul A al conductorului se conectează la o sursă de curent, care în acest punct menține o diferență de potențial constantă, de: $U = 100$ V. Capătul B al conductorului este legat la pământ. Care este intensitatea curentului?

Cît este potențialul în punctul C al conductorului, care se află la 7 m față de punctul A?

* * *

Soluția elevului *Füstös Attila*, cl. VIII-a á școlii medii „Ady-Șincai" din Cluj. Intensitatea curentului ce circulă prin conductorul metalic, neglijînd rezistența pămîntului la întoarcere, este:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{100\ V}{35} = 2{,}86\ A.$$

Potențialul în punctul C aflat la 7 m de punctul A, este:

$$U_1 = U - IR_1,$$

unde IR_1 este căderea de tensiune pe porțiunea AC, deci R_1 este rezistența pe porțiunea AC. Înlocuind:

$$U_1 = 100\ \text{V} - 2{,}86\ \text{A}\ \frac{35\ \Omega}{20\ \text{m}} \cdot 7\ \text{m} = 100\ \text{V} - 35\ \text{V} = 65\ \text{V}.$$

Problema 4613

Două oglinzi sferice concave O_1 și O_2 sînt așezate față în față astfel ca axele lor să coincidă. Distanța dintre oglinzi este de 50 cm, iar distanțele lor focale sînt 6 cm, respectiv 9 cm. Să se calculeze:

a) *Unde trebuie așezat pe axa comună a oglinzilor un obiect luminos pentru ca imaginile lui reale în ambele oglinzi să se facă în același loc pe axă?*

b) *Cît de mari sînt imaginile formate în cele două oglinzi, dacă obiectul luminos este de 2 cm?*

c) *La ce distanță de oglinzi se vor forma cele două imagini dacă oglinda O_1 se apropie cu 4 cm de obiect, iar oglinda O_2 se apropie cu 24,9 cm și ce fel de imagini sînt acestea?*

d) *Cît de mari sînt imaginile în această nouă poziție?*

Soluție. Notăm cu indicele *1* mărimile pentru O_1 ($f = 6$ cm) și cu indicele 2 maximile privind cealaltă oglindă.

Avem deci relațiile

$$p_1 + p_2 = 50; \quad (1) \qquad p_1' + p_2' = 50; \quad (2)$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{6}; \quad (3) \qquad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{9} \quad (4)$$

din (1) și (2) avem: $p_1 = 50 - p_2$; $p_1' = 50 - p_2'$

$$\frac{1}{50 - p_2} + \frac{1}{50 - p_2'} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{9},$$

$$p_2 = \frac{9p_2'}{p_2' - 9}, \quad \frac{1}{50 - \dfrac{9p_2'}{p_2' - 9}} = \frac{1}{50 - p_2'} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{(p_2' - 9)(50 - p_2') + 41p_2' - 450}{(41p_2' - 450)(50 - p_2')} = \frac{1}{6}$$

Notăm $p_2' = x$ și avem:

$$\frac{50x - 450 - x^2 + 9x + 41x - 450}{2050x - 22500 - 41x^2 + 450} = \frac{1}{6}, \text{ sau}$$

$600x - 6x^2 - 5400 - 2500x + 22500 - 41x^2 = 0$, de unde:
$7x^2 - 380x + 3420 = 0$, deci $x_1 = 41$ (nu are sens fizic) și
$x_2 = \dfrac{190 - 110}{7} = \dfrac{80}{7} = 11{,}4$ cm (are sens fizic).

Prin urmare: $p_2' = 11{,}4$ cm, $p_1' = 38{,}6$ cm, $p_1 = 7{,}1$ cm, $p_2 = 42{,}9$ cm, $I_1 = 11$, $I_x = \dfrac{1}{2}$

CHESTIUNI DE EXAMEN

5472. Se dă pătratul $OABC$ ale cărui vîrfuri au coordonatele $O(o, o)$ $A(a, o)$, $B(o, a)$, $C(a, a)$. Pe latura BC se consideră un punct variabil P. Perpendiculara dusă în P pe dreapta OP taie latura AC în punctul Q. Se cere:

a) Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptei OQ cu paralela dusă prin P la dreapta OB; b) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului OPB și apoi ecuația tangentei la cerc în punctul P. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al acestei tangente cu paralela la axa Oy dusă prin mijlocul segmentului OP.

Maturitate, august 1962, R.P.R.

5473. Se dă ecuația: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

a) Se cere să se rezolve ecuația: b) Rădăcinile sale în ordine crescătoare fiind a, b, c, d să se scrie ecuația elipsei cu semiaxele pe Ox și Oy egale, respectiv cu c și b, ecuația dreptei (D) care trece prin punctele $A(a, o)$ și $B(o, d)$, precum și ecuația tangentelor la elipsă paralele cu dreapta (D).

Maturitate, august 1962, R.P.R.

5474. Să se construiască graficul funcției $f(x) = \dfrac{x^2 - 16x}{x + 2}$

Maturitate, august 1962, R.P.R.

5475. Să se rezolve și să se discute ecuația :

$$\cos 2x = m(\cos x + \sin x).$$

Bacalaureat, iunie 1961, Camerun

5476. Se dau în spațiu, două segmente fixe OA și OB.

a) Care este figura constituită de toate dreptele $\triangle$ care trec prin punctul O astfel ca proiecțiile ortogonale ale punctelor A și B pe aceste drepte Δ să se confunde ?

b) Care este locul geometric al punctului H, proiecția comună a punctelor A și B pe dreptele $\triangle$?

(Bacalaureat, 1961, subiect tip, Franța)

5477. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x^2 - 4} = x - 4$, apoi să se discute ecuația $\sqrt{x^2 - a^2} = x - 2a$, unde a este un număr relativ dat.

(Bacalaureat, 1961, subiect tip, Franța)

PROBLEME PROPUSE *)

5478. Sirena unui vapor ce se apropie de mal este prevăzut cu un disc care are $m = 120$ orificii și o turație $n = 300$ rot/min. Un observator de pe mal aude sunetul ca și cum ar avea frecvența $\nu' = 629$ Hz. Care este viteza vaporului ?

* * *

5479. Să se arate că minimum funcției

$$f(x) = \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^3} + \frac{2}{\left(1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^3} + \\ + \frac{1}{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^4} + \frac{1}{\left(1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}\right)^4}$$

este $-\dfrac{25}{16}$ și corespunde pentru $x = 2{,}2$. Se poate rezolva fără derivate.

C. Ionescu-Țiu

---

* VIII (5482, 5487, 5488, 5496, 5499, 5506); IX (5481, 5483, 5490, 5491, 5492, 5494, 5495, 5498, 5502); X (5478, 5479, 5480, 5484, 5489, 5493, 5497, 5500, 5505); XI (5485, 5486, 5501, 5503, 5504).

5480. Un avion de recunoaștere execută fotografii de la înălțimea de 20 000 m cu un aparat fotografic avînd distanța focală a obiectivului 1 m. Ce mărime vor avea fotografiile făcute?

* * *

5481. În cît timp și cu ce putere se bate un pilot de lemn de 5 m lungime, cu o sonetă de 10 m înălțime și greutatea berbecului de 300 kgf. Se știe că rezistența terenului este de 50 t/m², iar soneta lucrează cu două lovituri pe minut.

* * *

5482. Să se arate că:

$$\frac{2}{(1+\sqrt{1\pm a})^3}+\frac{2}{(1-\sqrt{1\pm a})^3}+\frac{1}{(1+\sqrt{1\pm a})^4}+$$
$$+\frac{1}{(1-\sqrt{1\pm a})^4}=\frac{16-10\,a^2}{a^4}$$

* * *

5483. Fie un punct O pe linia mijlocie corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC. Dreptele BO și CO taie laturile AC și AB în B' și C'. Să se arate că aria $B'AC' = 2$ aria $B'OC'$.

Strătescu Ion, student, București

5484. Să se arate că:

$$\sin^8 a(1+\sin^2 a)+\cos^8 a(1+\cos^2 a)+9\sin^2 a\cos^2 a=7\sin^4 a\cos^4 a+2.$$

Liviu Pîrșan, București

5485. Pe o parabolă cu focarul în F se consideră un punct M. Dreapta MF și normala în M întîlnesc din nou parabola, respectiv în punctele R și N, iar tangenta în M taie axa de simetrie în T. Să se determine poziția punctului M în cazul cînd punctele N, R, T sînt coliniare.

Gh. Bazacov, profesor T. Severin

5486. a) Să se transforme în produs expresiile $E_1 = 1-4\sin^2 a$ și $E_2 = 1-4\cos^2 a$; b) Să se arate că: $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 3ka}{\cos ka}+4\sum_{k=1}^{n}\sin^2 ka=$

$$=4\sum_{k=1}^{n}\cos^2 ka-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 3ka}{\sin ka}=n.$$

V. Brînzănescu, elev, Constanța

5487. În triunghiul ABC notăm cu B_1 și C_1 picioarele înălțimilor din B și C, iar cu B' și C' proiecțiile lui A pe BO și CO, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cu centrul în O descriem două cercuri de raze OB' și OC' care taie pe OC și OB în punctele C_2 și B_2. Să se arate că $C_1B_1B_2C_2$ este paralelogram.

Strătescu Ion, student

5488. Să se arate că:

$$5[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\cdot[(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3]=$$
$$=6[(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5].$$

* * *

5489. Să se calculeze ce turație poate lua un motor de curent continuu de 13,6 CP care este conectat la o rețea de 110 V știind că indusul are o rezistență de 0,2 Ω și numărul de conductori $N=200$, iar fluxul dat de inductor este de 100 000 maxwelli.

* * *

5490. Să se arate că:

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^4}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^4}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^3}+$$
$$+\frac{2}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^3}=-1$$

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1{,}6}}\right)^4}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{1{,}6}}\right)^4}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1{,}6}}\right)^3}+$$
$$+\frac{2}{\left(1-\sqrt{1+\sqrt{1{,}6}}\right)^3}=0.$$

* * *

5491. Un fierar aruncă într-o apă în cantitate de 40 kg care se află la temperatura de 15°C, două piese de fier, una de 20 kg încălzită la 300°C, iar alta de 9 kg încălzită la 200°C, pentru răcire. Să se calculeze care va fi temperatura apei după răcirea pieselor cunoscînd că fierul are căldura specifică de 0,11.

* * *

5492. Într-o instalație se arde piatră de var care contine 85% $CaCO_3$ și se obține var nestins cu 90% CaO, 2% CO_2 (din $CaCO_3$ care nu s-a descompus) și 8% impurități. Care este consumul specific de piatră de var pentru a obține o tonă de var cu compoziția de mai sus și care este gradul de ardere al pietrei de var. Greutăți moleculare: $CaCO_3=100$, $CaO=56$, $CO_2=40$.

* * *

5493. Să se calculeze suma:

$$x^2+x(x+1)^2+x(x+1)(x+2)^2+x(x+1)(x+2)(x+3)^2+\ldots$$
$$\ldots+x(x+1)\ldots(x+n-2)(x+n-1)^2.$$

(Cl. X olimpiada 1961, Dnepropetrovsk)

5494. Să se simplifice expresia:

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}$$

dacă $x=\sqrt{ab}$, $a>0$, $b>0$.

(Cl IX, Olimpiada 1961, Lwov)

5495. Să se demonstreze că valoarea produsului

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2+1-\frac{2}{x+1}\right)$$

nu se schimbă dacă în fiecare factor se lasă de-o parte termenii fracționari.

(Cl IX, Olimpiada 1961, Lwov)

5496. Din două puncte A și B pornesc unul în întîmpinarea celuilalt, doi pietoni. Cînd primul a străbătut jumătate din drum, celui de-al doilea i-au rămas 24 km; cînd cel de-al doilea a străbătut jumătate din drum, primului i-au rămas de străbătut 15 km. Care este distanța dintre punctele A și B?

(Cl. VIII Olimpiada 1961, Lwov)

5497. Să se arate că oricare ar fi a, m și x reali, avem:

$$x^2-2x\sin a\cos a+\sin^2 a\geqslant 0,$$
$$x^2-2x\sin a\cos a+\cos^2 a\geqslant 0,$$
$$(1+m^2)^2x^2-4m(1-m^2)x+(1-m^2)^2\geqslant 0,$$
$$(1+m)^2x^2-4m(1-m^2)x+4m^2\geqslant 0,$$
$$m^2x^4+4mx^3+2(m^2+2)x^2-4mx+m^2\geqslant 0,$$
$$(m^2+1)x^4+4mx^3+2(m^2-1)x^2-4mx+m^2+1\geqslant 0.$$

În ce cazuri avem egalitate.

C. Ionescu-Țiu

5498. Pe o scară dublă de lungime l metri urcă un om cu greutatea F kgf. Să se calculeze forțele care acționează pe direcțiile celor două laturi ale scării (AB și AC) cînd omul e la mijlocul scării, la $^3/_4$ de la bază și în vîrful scării. Cele două laturi fac între ele un unghi de 60°.

Apostol Victor, Craiova

5499. La ora de lucrări practice un elev pilește suprafața unei piese apăsînd în așa fel cu mîinile încît pila să rămînă mereu în poziție orizontală. La un moment dat fiecare din mîini acționează asupra pilei cu cîte o forță a cărei direcție este înclinată la 60° față de orizontală. Forța care acționează asupra mînerului este de 18 N, iar cea care acționează la capătul pilei este de 12 N. Știind coeficientul de frecare $\mu = 0{,}4$ și masa pilei $m = 500$ g, să se afle accelerația pilei în momentul considerat.

Toacsen Livia, elevă Roșiorii de Vede

5500. Să se determine volumul tuturor piramidelor posibile în care fiecare latură este egală cu a.

(Clasa X, Olimpiada 1961, Lwov)

5501. Se dă șirul cu termen general U_n definit prin relațiile $U_{2k} = 3U_{2k-1}$; $U_{2k+1} = 3U_{2k} - 2$ și $U_0 = 3$ iar șirul cu termenul general V_n definit prin relațiile:

$$V_{2k} = 3V_{2k-1} + 2;\ V_{2k+1} = 3V_{2k} \text{ și } V_0 = 2$$

Să se arate că $U_n = V_n + 1$.

* * *

5502. Se dă în plan un cerc fix O și o dreaptă fixă Δ. Se mai ia în plan un punct fix M. Prin M se duce o dreaptă variabilă care taie cercul O în punctele B și C. Se ridică în M o perpendiculară pe BC care taie Δ în A. Să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

Oprișan Gh., elev Curtea de Argeș

5503. Două cercuri O și O' se taie în A și B. O secantă dusă prin A taie cercurile în C și C'. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului CC' cînd secanta variază.

Năstăsescu C., elev Pucioasa

5504. Un rezervor cilindric cu raza de 1 m și generatoarea de 8 m așezat orizontal de-a lungul unei generatoare conține 2 000 litri petrol. Să se afle ce cantitate de petrol s-a scos din rezervor, dacă nivelul lichidului a coborît cu 0,2 m.

Gh. Popescu, profesor Lugoj

5505. Un număr oarecare $N = 10a + b$ este divizibil printr-un număr de forma $10n + 1$ dacă $a - nb$ este divizibil cu $10n + 1$.

V. Pravăț, student Iași

5506. Un combinat siderurgic a produs în cursul anului 1959 o cantitate de 700 000 tone oțel și va produce în anul 1965 o cantitate de 2 100 000 tone. Dacă în fiecare an producția crește cu același procent față de anul precedent, să se calculeze producția anului 1963.

Dorin Alex., elev, București

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU CLASELE V–VIII *)

E: 1894. O brigadă de tractoriști a arat cu 750 ha mai mult de cît o altă brigadă, iar 2/5 din terenul arat de prima brigadă fac cît 4/9 din terenul arat de cealaltă brigadă. Cîte hectare a arat fiecare brigadă?

C. Al. Dobrescu, profesor Călărași

E: 1895. Se dau numere a căror sumă este 396. Dacă la primul se adaugă 5, din al doilea se scade 5, al treilea se înmulțește cu 5, iar al patrulea se împarte la 5 se obțin 4 numere egale între ele. Care sînt acele numere?

(Clasa VII, Olimpiada 1961, Lwov)

E: 1896. Împărțind un număr la 72 s-a obținut ca rest 68. Dacă același număr se împarte la 24 care va fi noul rest și cum se va schimba cîtul?

(Clasa VII, Olimpiada 1961, Lwov)

E: 1897. Dacă un număr întreg de cel mult patru cifre se divide cu 99, să se arate că suma cifrelor sale se divide cu 18.

* * *

E: 1898. Să se împartă cu ajutorul riglei și al compasului unghiul de 54° în 3 părți egale.

(Clasa VII, Olimpiada 1961, Lwov)

E: 1899. După ce o brigadă de tractoare a arat $\frac{1}{5}$ din suprafața de teren a unei G.A.C. și încă 31 ha, i-au mai rămas de arat $\frac{3}{4}$ din întreaga suprafață și încă 12 ha. Cîte ha de teren arabil are această G.A.C.?

D. Mîrzan, profesor R. Vîlcea

E: 1900. Să se arate că:

$$9(a^2+b^2+c^2)^2-8(a+b+c)(a^3+b^3+c^3-3abc)=$$
$$=[a^2+b^2+c^2-4(ab+bc+ca)]^2$$

I. Stamate, Cluj

---

* V (E: 1894, 1899, 1904); VI (E: 1897, 1901, 1903); VII (E: 1895, 1896, 1898, 1900, 1902, 1905, 1906).

E: 1901. O țesătoare a produs în 3 luni 4 275 metri pînză. În a doua lună a produs cu 90% mai mult decît în prima, iar în a treia $1\frac{1}{2}$ din cantitatea produsă în a doua. Cît a produs țesătoarea în fiecare lună?

* * *

E: 1902. Să se arate că:

$$\frac{2}{(1+\sqrt{2})^3}+\frac{2}{(1-\sqrt{2})^3}+\frac{1}{(1+\sqrt{2})^4}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})^4}=6.$$

C. Ionescu-Țiu

E: 1903. Care este puterea P a unui motor ce acționează asupra unui strung care prelucrează o piesă, dacă forța de așchiere a cuțitului strungului este $F = 2\,000$ kgf, diametrul piesei de prelucrat este $d = 200$ mm, iar turația motorului este $n = 90$ rot/min?

* * *

E: 1904. Pentru transportul a 200 elevi s-au folosit două feluri de camioane: camioane cu o capacitate de 30 elevi și camioane cu o capacitate de 40 elevi, în total 6 camioane. Cîte camioane de fiecare fel erau?

* * *

E: 1905. Să se arate că:

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3}=52;\quad \frac{1}{(2+\sqrt{3})^4}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^4}=194;$$

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^5}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^5}=724;\quad \frac{1}{(2+\sqrt{3})^6}+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^6}=2702.$$

C. Ionescu-Țiu

E: 1906. Să se arate că dacă $abc = 1$, atunci

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+3=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Ionel Atanasiu, profesor Gugești

CĂRȚI NOI (FIZICA)

1. **Virgil Atanasiu: Noțiuni de fizică generală vol. I (Mecanică și căldură)** Editura de stat didactică și pedagogică. Colecția Biblioteca Societății de Științe matematice și fizice din R.P.R. nr. 49, 1962.

Cartea cuprinde o parte introductivă unde se tratează despre măsurători și erori de măsurare, instrumente de măsură, sisteme de unități și noțiuni despre vectori.

Restul cărții este împărțit în două părți: „Mecanica" și „Căldura și termodinamica".

În prima parte se dau noțiuni despre cinematică, dinamică, statică, hidro și aeromecanică.

În partea a doua se tratează despre temperatură și căldură, dilatație, calorimetrie, fenomene moleculare în fluide, corpuri solide, schimbări de stare de agregare, propagarea

căldurii, termodinamică, aplicarea primului principiu la gazele perfecte și noțiuni de meteorologie.

Pe lîngă partea teoretică necesară tratării diferitelor capitole în carte se găsesc numeroase aplicații practice și tehnice ale cunoștințelor de fizică.

La fiecare capitol se dau probleme rezolvate și nerezolvate ca aplicații ale părții teoretice respective.

Cartea se adresează absolvenților de școli medii, studenților de la institutele pedagogice de 3 ani, profesorilor de fizică, precum și tuturor acelora care sînt interesați de problemele fizicii și aplicațiile ei. Costul lei 8,55 (230 pag.)

2. **D. A. Gherșgal — V. M. Fridman: Aparate cu ultrasunete**, Editura Tehnică 1962.

În carte se descriu principiile de funcționare și se dau datele tehnice principale ale aparatelor tehnologice, de control și de măsură bazate pe ultrasunete, folosite în medii lichide, gazoase și solide, fabricate în industria sovietică.

Sînt descrise, de asemenea, aparate și instalații pentru măsurarea principalilor parametri ai ultrasunetelor (amplitudinea și intensitate) la diferite frecvențe și se prezintă metodele de calcul al vibratoarelor cu ultrasunete și al receptoarelor și generatoarelor de vibrații elastice de frecvență sonore și ultrasonore.

Lucrarea se adresează inginerilor și tehnicienilor din diferite ramuri ale industriei, care utilizează în munca lor aparate cu ultrasunete, precum și profesorilor de fizică. Costul lei 27,70 (561 pag.)

3. **I. Negrescu**: Atomul, 1962.

În broșură se face un istoric al descoperirii atomului, se tratează apoi despre diferite modele de atomi și despre nucleul atomic (structură, izotopi, energie nucleară, particule elementare).

Broșura este o lucrare de popularizare a științei și se adresează elevilor și tuturor acelor care doresc să cunoască dezvoltarea concepției despre atom,
Costul lei 1,75 (65 pag.)

4. **I. Pascaru, D. Andreescu: „Stații interplanetare gări cosmice"**, 1962.

Broșura tratează despre cuceririle realizate în timp în domeniul cercetărilor cosmosului. Se arată ce sînt stațiile interplanetare și care sînt primele realizări în această direcție; ce este inponderabilitatea, cum se construiesc și la ce pot fi folosite stațiile interplanetare.

Broșura este o lucrare de popularizare a științei căutînd să informeze pe cititori în legătură cu domeniul cuceririi cosmosului. Se adresează tuturor acelora care sînt pasionați de știință. Costul lei 2 (86 pag.)

5. **I. M. Ștefan: „Cîte stele sînt pe cer"**

Broșura cuprinde unele informații cu privire la stele, instrumente de observație, caută să explice pe înțelesul tuturor ce sînt cometele, calea laptelui, spiralele albe, care este viața corpurilor cerești și care sînt învățămintele care rezultă din această cunoaștere.

Broșura este o lucrare de popularizare a științei. Se adresează tuturor celor care se interesează de problemele astronomice. Costul lei 0,90 (47 pag.)

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI *

Pînă la 15 septembrie 1962 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme cu cel puțin 35—40 soluții bune trimise odată la probleme propuse în G.M.F.-B., după cum urmează:

1. *Zisu Tudor* clasa XI Ș. m. 34 București; 2. *Maftei Radu* clasa VIII-a Ș. m. 1 Vaslui; 3. *Zisu Ana* clasa 10-a Ș. m. 34 București; 4. *Bejancu Aurel* cl. X Ș. m. Novaci (Oltenia); 5. *Vlase Aurelian* cl. VIII Ș. m. Medgidia (Dobrogea); 6. *Popescu Gh. Domițian* cl. XI Ș. m. 24 București; 7. *Zsidó László* cl. XI Ș. m. Unirea

* Au fost evidențiați și rezolvitorii din M.F.L. nr. 3, 4, 5/1962.

Brașov ; 8. *Andronescu Gheorghe* absolvent Ploiești ; 9. *Gurămultă Dan* cl. VII Sascutsat ; 10. *Dályai Pál* cl. X Ș. m. Bolyai Janoș Tg. Mureș ; 11. *Bădulescu Grigore* Ș. m. Topoloveni (Argeș) ; 12. *Vilcanu Sabin* student fizică București ; 13. *Pîrșan C. Liviu* student matematici București ; 14. *Gheorghe Constantin* absolvent Cîmpulung Succava ; 15. *Zsidó György* cl. VIII Ș. m. Unirea Brașov ; 16. *Zăgranu Marius* absolvent Năsăud ; 17. *Simion Alexandru* S. m. 1 Bacău ; 18. *Rabinovici Silviu* cl. XI Ș. m. 2 Fălticeni ; 19. *Spîrcu Tiberiu* cl. X Ș. m. 1 Arad ; 20. *Barth László* cl. IX Liceul Unificat Dej ; 21. *Toma Marin* cl. IX Ș. m. 1 Oradea ; 22. *Tigmeanu Ion* cl. VIII Ș. m. 1 Rm. Vîlcea ; 23. *Gereliu Dan* cl. VIII Ș. m. 3 Sibiu ; 24. *Kiss Lajos* cl. XI Ș. m. 4 Oradea ; 25. *Vlădoreanu Cornel* student Timișoara ; 26. *Olariu Adriana* cl. VIII Ș. m. 2 Turda ; 27. *Gajzágo Mária* cl. X Ș. m. Ady Endre Zalău ; 28. *Oprea Victor*, Ș. prof. Ștefănești Argeș ; 29. *Zegheanu Petre* absolvent Breaza ; 30. *Kópan Sándor* cl. VIII Ș.m. 1 Sighișoara ; 31. *Radu Dan*, absolvent București ; 32. *Semlyèn Janos* cl. VIII Ș. m. Ady Șincai Cluj ; 33. *Frankenfeld Georgian* absolvent București ; 34. *Chisăiță Adrian* student construcții Cluj ; 24 bis. *Crișan Victor* cl. 10 Ș. m. Avram Iancu Aiud ; 35. *Demeny Pál* cl. VI Ș. m. Betlen Gabor Aiud ; 36. *Fülop György* cl. V, Ș. Simion Bărnuțiu Zalău ; 37. *Leon Dorel* cl. 11 Ș. m. 1 Bacău ; 38. *Frajkó László* cl. VIII Ș. de 7 ani 19 Cluj ; 39. *Rosenberg Flavia* cl. 11 Ș. m. 1 Focșani ; 40. *Mura Ana* cl. VII Gr. școlar Simion Bărnuțiu Zalău ; 41. *Kovacs Ilona* cl. VII Gr. școlar Simion Bărnuțiu Zalău ; 42. *Munteanu Mihai* cl. 10 S. m. 5 Brașov ; 43. *Neacșu Viorel* cl. 10 S. m. 1 Ploiești ; 44. *Barth Ferencz* cl. VI, Ș. de 7 ani nr. 3 Dej ; 45. *Dana Dan* cl. IX Ș. m. 1 Lugoj ; 46. *Zsidó Agnes* cl. VI Ș. de 7 ani nr. 6 Brașov ; 47. *Chiriac Ion* absolvent Novaci ; 48. *Erdely Klara* cl. VII Ș. nr. 4 Petroșani ; 49. *Brînda Rodica* cl. VIII Ș. m. 1 Lugoj ; 50. *Jakab Ferenc* cl. VII Ș. de 7 ani nr. 18 Cluj ; 51. *Barsoni Andrei* cl. X Ș. m. 1 Oradea ; 52. *Zamfir Gh Ion* cl. XI Panciu ; 53. *Neagoe Victor* cl. VIII Ș. m. 1 Pitești ; 54. *Varga Somogy* cl. VI Ș. de 7 ani Satu Mare ; 55. *Olariu Ștefan* cl. 10 S. m. 1 Arad ; 56. *Hegedüs Istvan* cl. VII Ș. de 7 ani Petroșani ; 57. *Zamfir Cornel'u* cl. 11 Ș. m. 3 Pitești ; 58. *Anghel Vasile* cl. XI Ș. m. Mărășești ; 59. *Ifrimela Ștefan* absolvent Mediaș ; 60. *Pancu Adrian* absolvent Mediaș ; 61. *Costea Dumitru* student Timișoara ; 62. *Stănculescu Carmen* cl. X Ș. m. 1 Oradea ; 63. *Ene Ion* cl. XI Ș. m. Pucioasa ; 64. *Dănuță Ioan* cl. VIII Ș. m. 3 Sibiu ; 65. *Dumitru Cornelia* cl. 11 Ș. m. 17 București ; 66. *Moldoveanu Gabriel* cl. X Ș. m. 23 București ; 67. *Dolteanu Temistocle* absolvent Huși ; 68. *Jurca Ion* cl. VIII Ș. m. 1 Lugoj ; 69. *Popescu Dumitru* cl. VIII Ș. m. 1 Oradea ; 70. *Diaconu Nicolae* cl. X Ș. m. 3 Pitești ; 71. *Brenner Paul* cl. VIII Ș. m. 3 Ploiești ; 72. *Brănici Doru* absolvent Ploiești ; 73. *Nițescu Dan* cl. VIII Ș. m. Pucioasa ; 74. *Bucur Liliana* cl. VIII Ș. m. 3 Sibiu ; 75. *Ostap Ion* cl. VIII Ș. m. 3 Sibiu ; 76. *Elek Ana* cl. XI Ș. m. „Filimon Sîrbu" Sighet ; 77. *Niculescu Constanța* cl. VIII Ș. m. 3 Tîrgoviște ; 78. *Rujan Octavian* cl. X Ș. m. 1 Timișoara. 79. *Weinstein Jak* cl. VIII Ș. m. 2 Rădăuți ; 80. *Cornea Dumitru*, clasa X Ș. m. 2 Tr. Severin.

S-au primit soluții bune pînă la 15 sept. 1962, de la :

AIUD (Cluj) *Ș. m.* „*Avram Iancu*" cl. X *Crișan Victor* (5296—99, 302, 05—07, 10—15, 17—19, 27, 28, 32, 39, 40, 43—45, 47, 49, 50, 55—58, 84—87, 94, 95, 400, 03, 11, 14, 22).

ALBA IULIA. *Ș. m.* „H.C.C." cl. X Almași Eduard (5248—53, 59—61, 64, 66, 67, 70, 73, 81, 86, 83), Tulbure Dan (5248, 50, 51, 56, 57, 59—61, 62, 66, 92, 343—45).

ANINA (Banat) *Ș. m.* cl. VIII Petric Mircea (5327, 43, 45, E : 1843, 45—47, 57—60, 63, 64, 66, 67).

ARAD. *Ș. m.* „Ion Slavici" cl. IX Nemeth Miclos (MFL : 853, 55—57, 61—63), cl. X *Olariu Ștefan* (5248—53, 56—58, 60—62, 65—68, 70, 71, 74, 76, 81, 83, 86, 96—302, 05—17, 21), *Spîrcu Tiberiu* (5296—300, 02, 05—09, 12—21, 27—29, 31—37, 40, 43—45, 47, 55, 61, 63, 65, 68, 74, 75, 79—84, 86, 87, 92—96). S. m. „Ocsko Terez" cl. X Matekovitz Mihaly (M.F.L. E : 780, 824, 25, 36, 57).

BABADAG (Dobrogea) *Ș. m.* cl. X Băltoi Dorel (5248, 49, 50, 51, 53, 57, 59, 60, 67, 70, 72, 74, 78, 83—85, 96, 98, 99, 301, 02, 12—15, 19, 27, 35, 37, 49, 85, 87).

BACĂU. *Ș. m. I* Botezatu Liliana (5257, 59, 61, 62, 67, 83, 301, 15, 19, 37, 41), cl. XI Bejan Nicolae (5250, 51, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 67, 70, 74, 83, 86, 95, 302, 12, 14, 15, 35, 37, 41, 44, 45, 49, 55, 65, 92), *Leon Dorel* (5248—52, 56—62, 64—67, 70, 71, 74, 77, 83, 86, 95—97, 302, 06—08, 11—13, 15, 17, 27, 29, 32, 37, 44, 45, 51), *Simion Alexandru* (5296—302, 05—09, 11—15, 17, 19, 21, 27, 29, 31, 32, 34—38, 41, 43—45, 49—52, 54, 55, 58, 61, 62, 65, 66, 68, 73, 74, 84, 86—88, 95, 96). *Ș. m. 4* cl. VIII Buruiană D. (5256—59, 61, 62, E : 1830, 32,

35—37, 41), *Școala pedagogică* anul V Focșeneanu Ștefan (5248, 54, 59, 61, 62, 66, 67, 70).

BAIA DE ARAMĂ. cl. VII Pantelimon Vasile (E: 1830, 32, 36, 37, 41, 45—47, 49), cl. XI Umbreș Alexandru (5248, 58, 81, 95, 96, 302, 12, 13, 15, 19, 35, 37, 44, 45, 49, 55, 65).

BAIA MARE. *Ș. m.* cl. X Diénes Aron (M. F. L.: 853, 56—58, 65), *Șc. de 8 ani* nr. 3 cl. V Szekely Olga (M.F.L.E.: 793, 94, 96, 800, 01) Szeleczy Gizella (M.F.L.E.: 776, 93—96, 800, 01), cl. XI Székely Gyula (M.F.L.E.: 793, 94, 96, 800, 01).

BISTRIȚA. Absolvent Circu Ioan (5248—52, 54—64, 66, 67, 70, 71, 74, 75, 81, 83—88, 94), Verveagă T. (5308, 24, 27, 28, 36, 50, 55, 92, 96), *Ș. m.* cl. X Pușcașiu Anton (5248, 52, 58, 62, 70, 83, 96—98, 302, 12, 13, 43—45, 55) Sîrbu Ștefan (5249, 58, 62, 67, 70, 83, 96, 314, 15, 17, 27, 37, 41, 44, 45, 55, 92), Turdeanu Petru (5259, 62, 66, 70, 302, 11, 12, 15, 37, 41, 43, 54) cl. XI Horvarth Florin (5251, 52, 58, 59, 62, 66, 83, 86, 95—97, 314, 15, 32, 35), Preda Pompiliu (5248, 57, 58, 60—62, 67, 70, 77, 306, 11, 13, 27).

BÎRLAD. *Complexul școlar* cl. IX Coatu Suorica (5270, 57, 59, 70, 74, 86), cl. X Iordan Dumitru (5286, 88, 90, 92, 95, 97, 98), Școala de 8 ani nr. 1 cl. VII Iordan Mariana (5107, 262, 345, E: 1831, 58, 60, 63, 70, 86).

BOLINTINUL DE VALE *Ș. m.* cl. VIII Zaharia Radu (5270, 74, 84, 86, 355, E: 1830, 36, 37, 57, 58, 64).

BORȘA (Maramureș) *Ș. m.* cl. VIII Chiș Gh. (5208, 48, 57, 71, 94, E: 1816, 29, 30—32, 35—49, 51—53, 55, 56).

BOTENI (Argeș). *Șc de 8 ani* cl. VII Ivan Cornelia (E: 1824, 29, 43, 44, 47, 49, 50).

BOTOȘANI. *Ș. m. 2* cl. XI Wittinig Silviu (5248, 70, 74, 75, 77, 86, 96, 311, 32, 41, 44, 55).

BOZOVICI (Banat) *Ș. m.* cl. VIII Ignea Olimpia (E: 1830, 35—37, 41, 43, 51, 58, 60, 63, 66, 69, 70).

BRAD. *Ș m.* „Avram Iancu" cl. V Coordonescu Gabriel (E: 1843, 45, 59, 60, 63, 64, 71, 72, 75, 77), cl. VII Fornade Corneliu (E: 1850, 45, 49, 58—60, 62—64, 66, 67, 71—73, 75, 80).

BRĂILA. *Ș. m.* „N. Bălcescu" cl. VIII Lăzărescu Vasile (5343, 44, E: 1843—45, 47, 51, 64, 71—73, 75, 77, 79, 80), *Ș. m.* 3 cl. VIII Bibicu Mariana (5259, 61, 66, 70, 71, 77, 83, 345, E: 1831, 33, 37, 40, 43, 45, 47, 50—53, 57—60, 62—64, 66, 67), Stoianovici Dumitru (5256, 307, 13, 15, 22, 28, 36, 37, 73, 94, 95, 96).

BRAȘOV. *Ș. m.* 1 cl. VIII Bătătorescu Cristina (5372, 29, 39, 43, 44, E: 1844, 46, 51, 52, 69, 70), Vătui Florin (5277, 327, 29, 43, 45, 49, E: 1838, 33, 40, 43—55), *Ș. m.* 4 cl. XI Vulpe Victor (5301, 02, 13, 15, 39—41, 43—47), *Ș. m.* 5 cl. VI Zsido Agnes (M.F.L. E: 793, 95, 98—800, 01, 02) cl. VIII Zzido György László (M.F.L. 94, 95—804), cl. X Zsido Laszlo (M.F.L. E: 853, 60, 62—66), *Ș. elementară nr. 3* cl. VI Corniciuc Mircea (E: 1858—60, 63, 64, 66), *Ș. elementară nr. 4* cl. VI Bătătorescu Anton (E: 1836, 45, 57, 59, 60, 62, 66), *Ș. m* 5 cl. 10 *Munteanu Mihai* (5248—50, 57—61, 66, 67, 70, 71, 74, 81, 86, 92, 98, 302, 12—15, 19, 27, 32, 35, 37, 39, 40, 43—45, 47, 49, 55, 58, 63, 92).

BREAZA. (Ploiești) Absolvent *Zegheanu* Petre (5214, 37, 39, 41—51, 54—67, 70, 73—75, 78, 81, 83—89, 92—95).

BUCUREȘTI. Absolvenți: Covrig Mircea (5248, 49, 51—58, 63, 64, 67, 70, 71, 74, 81, 83, 85—89, 95), *Frenkenfeld Georgian* (5302, 05, 07, 08, 11—16, 27, 34—37, 40—48, 52, 55, 58, 71, 74, 92, 96), *Popescu Domițian* (5276, 79, 92, 96—301, 03, 05, 07, 21, 27, 31—33, 36, 39—48, 51, 53, 55, 57, 58, 72, 76, 79, 86, 89, 92, 93, 96), Raischi Constantin (5248—51, 53, 54, 56—63, 66, 67, 70, 71, 74, 81, 83, 85—88, 91, 93—95), *Radu Dan* (5207—14, 16, 17, 21—29, 31, 32, 34, 36, 38—42, 44, 45, 48—53, 56, 57, 59—64, 66—68, 70, 71, 73, 74, 76, 78, 81, 83—90, 94, 95), student *Pîrșan C. Liviu* (Fac. Matematică) 5207, 08—11, 14, 16, 21, 24, 26, 31, 36, 48, 53, 57, 59, 61, 63, 66, 70, 81, 83, 85, 86, 88, 98, 302, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 33, 34, 49, 76, 79, 92, 400, 19, 20, 22, 28, 30, P). Student *Vîlceanu Sabin*, fac. fizică (5116, 80, 81, 223, 25, 26, 28, 30, 50—53, 69, 71, 87—90, 94, 355, 61, 73—76, 79, 80, 84, 92—400, 02, 03, 05—10, 12, 15, 19, 20, 22, 25, 28, 30, 32). *Ș. m.* 1 cl. IX Arsene Ioan (5208, 16, 24, 48, 50, 51, 56, 57, 59, 61, 70, 86, 98, 311), cl. X Gersan Susana (5248, 50, 57—59, 66, 70, 74, 305, 13, 32, 51), Lăzărescu C. Toma (5248—53, 57—62, 64— 67), *Ș. m. 2* cl. XI Florescu Ilie (5248, 56—61, 67, 70, 86, 96, 98, 313, 32), Grigoriu Mihai (5248—50, 52, 53, 57—62, 64—67, 70, 71, 74, 77, 81, 83, 86, 92—95), *Ș. m. 3* cl. VIII Teodorescu Dumitru (5270, 343, E: 1830, 31, 35, 37, 41, 45, 47, 49, 63, 69), *Ș. m 4* cl. XI Niță Alexandrina (5296, 97, 302, 12, 13, 15, 28, 36, 37, 55, 92, 400), *Ș. m.* 5 cl. IX Dianu Mihai (5248, 50, 51, 60, 96, 98, 309, 11, 13, 27, 55, 92, 95), Ș. m. 7 cl. IX Bercovici Tzlida (5250, 51, 58, 77, 96—98, 302, 12, 13, 28, 45), *Ș. m. 8* cl. V Cinteză Mircea (E: 1858—60, 62—64, 66, 71—73, 77), cl. X Vătui Dan (5269—98, 302, 07, 09,

11—15, 17, 19, 27, 32, 35, 37, 44, 49), *Ş. m.* 10 cl. XI Negru Sanda (5296, 307, 08, 15, 35, 37, 44, 55, 80, 92, 96, 403, 22, 28, 30), *Ş. m. 11* cl. VIII Chircorian Liliana (5422, E: 1843, 45—47, 51, 58, 64, 66, 73, 80), Cojocaru Radu (E: 1843, 45, 47, 52, 58, 63, 64, 69—76), Dumitru Mihai (5313, 84, 85, 422, 26, 27, E: 1843, 47, 57, 51, 57, 58, 64, 66, 70), Gorăscu Adriana (5248, 57—59, 70, 71, 77, 96, 97, 392, 95; E: 1830, 31, 33, 35—37, 39, 40, 43, 45—47, 52, 57, 58, 60, 62—64, 66, 67), Iovan Constantin (5343, 45, E: 1831, 36, 37, 39, 41, 43, 45, 52, 58, 63, 66, 70), Medaru Doina (E: 1843—47, 58, 63, 66, 71, 73, 75, 77, 80), Stoian Georgeta (E: 1830, 35, 36, 45, 47—50, 63, 64), Tonceanu Dan (5257, 58, 61, 96, 384, E: 1830, 32, 35—37, 43—48, 51—53, 57—60, 63, 64), cl. X Raischi Victor (5248—51, 56—58, 60—62, 66—70, 71, 74, 81, 83, 86, 92, 93), Kahane Silviu (5248, 57, 59, 61, 62, 66, 311, 27, 45, 47, 55, 72), cl. XI Ursulescu Florin (5249, 50, 52, 53, 56, 58—60, 62, 65, 67, 74, 75, 81, 83, 85, 86, 95), *Ş. m. 12* cl. IX Cristescu Valentin (5208, 48—51, 57, 59, 61, 62, 66, 70), cl. X Ciobanu Mircea (5249—53, 56—62, 64—67, 70, 72, 77, 81, 83, 86), Deutsch Ştefan (5248—51, 57, 58, 60—62, 68, 70, 71, 86, 95), Gheorghe Constantin (5510, 16, 18, 64, 93, 95, 229, 42, 43, 45, 48, 50, 57, 61, 86, 332), Hajos Ladislau (5248, 59, 66, 70, 86, 314, 32, 45, 55, 92), Lazarovici Cristian (5248—53, 56—62, 64, 66, 67, 70, 72, 83, 85, 86), *Ş. m.* 13 cl. IX Hondor Paul (5248, 50, 57, 84, 86, 355, 74, 86, 87, 92), cl. X Aldea Ion (5248, 49, 52, 53, 57, 58—62, 65—67, 77, 84), cl. XI Horhoianu Valentin (5248, 56—58, 60—62, 66, 67, 70), *Ş. m.* 16 cl. IX Riessel Hélène (5248—51, 57—59, 61, 62, 70, 74, 86, 96—99, 305, 14, 45, 51), cl. X Moscovici Cornel (5317, 19, 21, 28, 29, 32, 36, 37, 49—51, 54, 55, 65, 66, 68, 72, 85—87, 92, 400, 09, 20, 22), *Ş. m.* 17 cl. VIII Almer David (5249, 58, 60—62, 64, 70, E: 1831, 34—37, 41, 43, 44), Blumenfeld Florin (5256, 58, 62, 30, 35, 36, E: 1858, 62, 63, 66, 67, 69, 70), Kanner Dan (5256, 58—60, 62, 66 E: 1833, 53, 58, 59, 62—64, 65, 66), cl. IX Einschenk Ilia (5250, 51, 68, 86, 98, 99, 317, 21, 32, 40, 46, 47, 51, 58) cl. X Ganea Cristian (5248, 49, 50, 57, 59, 60, 62, 64, 66, 67, 70, 84, 84, Gheorghiu Jana (5327, 35, 36, 41, 44, 45, 55, 65, 66, 72, 86, 92, 95, 96), Kaufman Marcel (5248—50, 52, 53, 57—62, 64, 66, 67), Telnic Persi (5207, 08, 10, 14, 16, 24, 29, 49, 50, 53, 58—62, 70, 74, 81, 83, 86, 95, 97), cl. XI Dumitru Cornelia (5095, 120, 54, 70, 83, 88, 212, 14, 18, 51, 81, 83, 96—98, 302, 06, 08, 09, 12—15, 17, 18, 27, 32, 35—37, 44, 45, 55, 65, 84, 92), *Ş m.* 18 cl. VIII Feder Marcel (E: 1844, 45, 47, 49, 58, 59, 63, 64, 69, 70), *Ş. m.* 19 cl. XI Feran Monica (5248, 50—53, 56—62, 65—67, 70, 71, 77, 87, 95), Popescu Breasta (5248, 50, 52, 56, 57, 59, 61, 62, 66, 67, 70, 83, 86).

Ş. m. 21. Cl. VII. Voiculescu D. V. (5355, 58, 70, 75, 82, 98, 403, 22, 27, 32, E: 1857—64, 67—71, 73—81).

Ş m. 22. Cl. IX. Ulpian Andrei (5248—51, 57, 59, 61, 62, 70, 74, 81, 86, 96, 98, 313, 14, 17, 27, 32, 55, 92). Cl. X. Arabadjian Petre (5248, 49, 51—53, 57, 59—62, 65—67, 70, 83, 84, 86, 95—98, 307, 09, 13, 15, 27, 28, 32, 39, 44, 45). Cl. XI. Anghel Ileana (5248, 50, 52, 56—59, 67, 70, 302, 11, 12, 32, 44, 45, 92, 93, 95), Dinescu Nicolae (5248, 49, 57—62, 64, 66, 70, 81, 86, 94—96, 98, 302, 05, 07, 11—15, 32, 35, 37, 45, 55, 92, 95).

Ş. m. 23. Cl. IX. Pelteanu Ioan (5249—51, 57—60, 67, 70, 98, 355), Stoica Vicenţiu (5249, 58, 62, 64, 74, 81, 84, 86, 96, 97, 313, 27). Cl. X. *Moldoveanu Gabriel* (5131, 34, 46, 71, 75, 96, 97, 227, 75, 97, 98, 302, 05, 06, 09, 11, 13, 15, 17, 97, 98, 302, 05, 06, 09, 11, 13, 15, 17, 19, 27, 29, 35, 37, 39—41, 43—45, 55, 63, 65, 72, 86, 88, 92—95).

Ş. m. 24. Cl. VI. Năstase Adrian (E: 1816, 18—22, 26—28, 31, 36, 43, 45, 48, 58—60, 63—66). Cl. 11. *Popescu Gh. Domiţian* (5216, 17, 21, 24—26, 28, 31, 36, 38, 40—47, 54, 58—60, 62—67, 302, 12—15, 17—19, 24, 28, 30, 34, 35, 37, 49).

Ş. m. 26. Cl. XI. Cocaranza Gabriela (5248—63, 60, 61, 96, 97, 302, 12, 35, 37, 40, 41).

Ş. m. 30. Cl. X. Conache Petru (5248, 50, 61, 64, 71, 81, 96, 305, 13, 15, 17, 27, 29, 34, 55, 63, 95, P).

Ş. m. 32. C. VIII. Florea Gh. (5216, 18, 24, 31, 48, 49, 70, E: 1816, 17, 23, 24, 29, 33, 35, 37, 40—42).

Ş. m. 34. Cl. IX. *Zisu Ana* (4911, 33, 35, 37, 38, 47, 52, 79, 80, 90, 5001, 12, 35, 37, 38, 47, 52, 79, 80, 90, 5001, 12, 22, 28, 29, 33, 35, 36, 69, 71, 80, 82—84, 86, 90, 99—102, 06—09, 15, 31, 35, 38, 58, 59, 200, 08, 11, 12, 14, 16—18, 21, 23, 24, 29, 31, 34, 36—40, 42—46, 48—51, 57—62, 64, 66, 67, 68, 70, 74, 77, 81, 83—86, 92, 94, 95, 302, 08, 09, 11, 12, 15, 16, 18—21, 32, 35, 37, 41, 48, 50). Cl. X. *Zisu Teodor* (4880, 81, 83, 911, 22, 25, 33, 35, 37, 38, 43, 50, 52, 74, 90, 93, 5001—28, 29, 30, 32, 33, 35, 35, 49, 51, 71, 102, 09, 50, 53, 99, 200, 07, 08, 10, 12, 14, 16—18, 21, 23, 24, 29, 31, 34, 36, 38—40, 42—46, 48—51, 53, 57, 62, 64, 66, 67, 69, 70, 74, 79, 81, 83, 84, 86, 90, 95, 101, 06, 08, 11, 17, 27, 31, 33, 51, 59, 62, 71,

97, 209, 11, 13, 21, 37, 47, 77, 87, 90—92, 309—11, 16—18, 20, 21, 27, 32, 34,39, 40—48, 50, 52).

Ş. m. 37. Cl. XI. Sachter Mauriciu (5250—53, 61, 64, 65, 67, 72, 95, 302, 15, 32, 44).

Ş. m. 39. Cl. X. Vasiliu Liviu (5258, 62, 64, 81, 84, 98, 302, 12, 13, 15, 19, 32, 35, 37).

Şc. elem. nr. 95. Cl. VI. Tiner Ernest (E: 1843, 45, 48, 49, 54, 58, 60, 63—66).

Şc. elem. nr. 130 Cl. VI. Leibovici N. (E: 1857, 58, 63, 67, 73, 77).

Şc. elem. nr. 135. Cl. VII. Motoi Marin (E: 1857— 81).

BUHUŞI. Absolvent. Fecioru Grigore (5207—12, 24, 36, 42, 44, 47, 48, 50, 57, 60, 61, 67, 74, 85, 88, 94, 95, 313, 15, 43—45).

BUŞTENI. Clasa VIII. Avram Doina E: 1830, 31, 36, 37, 45, 58, 63, 64, 66).

BUZĂU. *Ş. m. 1.* Cl. VIII. Cojanu Marius (E: 1834, 39, 40, 43—45, 47, 51—53, 58, 62, 63, 66, 67). Ionescu Constanţa (5256—59, 61, 66, 77, 343, E: 1830, 31, 36, 37, 43, 45, 47). Teodorescu Cătălin (5271, E: 1830, 31, 35, 36, 41, 43, 45, 47, 53, 58—60, 63, 64, 67). Clasa IX. Constantinescu Cristian (5296, 97, 305, 07, 10, 13, 14, 32, 40, 45). Clasa X. Toader 98, 302, 13, 15, 49, 55, 92). Clasa XI Costea Ion (5249, 58, 60, 62, 64, 66, 67, 84, 99, 300, 08, 17, 29, 35, 57, 58, 65, 68, 80, 85—87).

CARACAL. *Ş m. 1.* Cl. VII. Rădulescu Sever (E: 1843, 45, 47, 58, 62—64, 66, 70, 71).

CARANSEBEŞ. *Ş. m. 1.* Cl. VII. Cîmpian E: 1843, 45, 47, 50, 64, 66), Petrescu Viorel (5345 ,E: 1845, 47, 48, 61, 66, *ver* (E: 1843, 45, 47, 58, 62—64, 66, 70, 71).

71, 73, 78—80), Serengău Iancu (E: 1832, 37, 40, 41, 45, 47, 48, 49, 59, 60, 63, 61, 66, 70). Cl. XI. Dugan Doru (5230, 36, 37, 43, 45, 47, 57, 62, 64, 66).

CĂLĂRAŞI. *Ş. m* N. Bălcescu. Cl. IX. Apostol Dan (5248, 50, 51, 57, 58, 51, 52, 54, 59, 70, 71, 74, 81, 86, 96 97, 317, 27, 43, 45 47, 49), Negreanu Mircea (5257, 59, 61, 62, 66, 70, 74, 81, 86, 96, 98, 313, 28, 45, 57).

CÎMPINA. Şc. de 8 ani nr. 3. Cl. VII. Pădure Ion (E: 1845, 51, 53, 57, 63, 64, 66, 68).

CÎMPULUNG MUSCEL. Cl. VIII. Dinculescu Cornelia (5238, E: 1818, 24, 29, 30, 32, 45, 37, 39—41, 47, 50, 53, 58). Cl. XI. *Marinescu Mircea* (5139, 41, 75, 207—12, 42, 48, 50, 57, 59, 61, 67, 70, 85—88, 94, 96, 302, 12, 14, 15, 20, 24, 27, 28, 34—37, 44, 45, 48).

CMPULUNG MOLDOVENESC. Absolvent Procopiuc Gheorghe (5207—12, 16, 24, 26, 27, 36, 38, 40, 42, 44—47). *Gheorghe Constantin* (5296—98, 300, 02, 04, 05, 07, 12—15, 18, 19, 24, 28, 31—34, 36, 37, 97—99, 400, 04, 06 08, 09, 11, 12, 17, 22, 24, 27, 28, 30, 32, P).

CLUJ. Fruntaş Duţu Cornel (5256—64, 66, 67, 74, 77, 81, 84—88, 94), student Beştea Cătălin (5248—53, 56, 57, 59—62, 64—68, 70, 81). *Chisăliţă Adrian,* fac. Construcţii (5296—309, 12—15, 17—22, 27, 28, 30—37, 39, 43—45, 49—52, P). *Ş. m.* Ady Şincai. Cl. VIII. Semlyen Janos (MFL, E: 782, 83, 87, 89, 94—97, 801, 02, 04). *Ş. m.* Emil Racoviţă. Cl. VIII. Manea Viorica (E: 1830, 32, 35—37, 41, 43, 45, 47, 58, 59, 63, 64, 66). Cl. XI. Peteanu Lelia (5260, 62, 64, 65, 67, 70, 83, 96, 97, 302, 05, 12, 13, 15, 17, 37). *Ş. m.* Gh. Bariţiu. Cl. X. Man Eugenia (5258, 70, 74, 77, 96—98, 305, 13, 32). *Ş. m.* G. Coşbuc. Cl. VII. Jeflea Ana (E: 1836, 45, 48, 58, 63, 64, 66, 71, 73, 75), Vişan Marius (E: 1859 60 62—64, 66, 71—73, 75). Cl. XI. Jeflea Alexandrina (5251—53, 58—60, 62, 64, 70, 302, 05—09). *Ş. m. 11.* Cl. VIII. Kopusi Maria (MFL: 739—97). *Ş m. muzică.* Cl. VII. Farcaş Petru (E: 1830, 31, 35—37, 39, 43, 45, 46, 58, 60). *Şc. de 7 ani nr. 18.* Cl. VII. Frajko Laszlo (MFL, E: 793, 95, 96, 99, 801, 05), Jakab Ferenc (MFL, E: 793, 94, 96, 800, 01—03).

CORABIA. *Ş. m. 1.* Cl. X. Alexandru Nicolae (5251, 66, 70, 81, 86, 313, 14, 32, 40, 45—47).

COSTEŞTI (Argeş). *Ş. m.* Cl. VIII. Depărăţeanu Dan (5296, 97, 313, 17, 27, 45, 49, 55, 92, 95, 407, 15, E: 1843—47, 51, 53, 57—60, 62—64, 66, 67, 71—76, 79, 80). Cl. X. Nedea Constantin (5207, 10, 12, 14, 38, 45, 46, 50, 58, 62, 64, 66, 67, 70, 74, 84, 86, 95, 306, 14).

CRAIOVA. *Ş. m. 2.* Cl. VII. Bălăcescu Daniela (E: 1830, 31, 35, 36, 43, 58, 64, 66), Cojocaru Mariana (5227, 70, 77, E: 1830—37, 44—48, 52, 57, 59, 60, 62, 63; Vasile Constanţa (idem), Gîdea Liviu (5422, E: 1857—60, 62—64 ,66, 70, 72—76, 78—80), Niţulescu Elena (5248, 49, 58, E: 1843, 45, 47, 50, 58, 64, 66), Petrescu Ion (5248, 57, 61, 66, 70, 71, 83, E: 1830, 31, 34—37, 39), Rusu Aurelian (5327, 422, E: 1843, 45—47, 58, 60, 62, 64, 66, 71, 73, 80), Smarandache Emilia (5270, E: 1830, 31, 35—37, 43, 58, 64, 66), Stoiculescu Elena (E: 1831, 33, 36, 37, 43, 45—48, 50, 52, 57, 58, 60, 62—64, 66). *Ş. m. 3.* Cl. X. Săvescu Delia (5248—51, 57, 61, 62, 66, 74, 83, 86, 355). *Ş. m. 4.* Cl. VIII. Ţăndăreanu N. (5165, 93, 200, 12, 38, 42, 57, 61, 70, E: 1801, 02, 30, 35—37, 41, 45, 47, 57, 60). Cl. IX. Cri-

stescu Mărgărit (5249, 51, 57, 61, 64, 66, 70, 74, 77, 97, 311, 13, 32, 40, 43—45, P), Iordăchescu Anca (5248, 56, 59, 61, 62, 64, 66, 70, 313, 43—45, 84).

CUGIR (Hunedoara). *Ş. m.* Cl. VIII. Tindău Mircea (5229, 39, 43, 45, E: 1830, 31, 35, 37, 43, 47—49, 67, 69).

CURTEA DE ARGEŞ. *Ş. m.* Cl. X. Miu Constantin (5212, 14, 18, 24, 31, 38, 44, 48—51, 57—59, 61, 66, 70, 86, 96, 97, 313, 49, 55).

DEJ. *Ş. m unificată.* Cl. IX. Barth Laszlo (MFL, 840, 42, 47, 52—55, 57, 61, 62). *Şc. de 7 ani nr. 3.* Cl. VI. Barth Ferenc (MFL, E: 793—805).

DITRĂU (Mureş). *Ş. m.* Cl. VI. Szabo Marta (MFL, E: 757, 63, 65, 93, 94, 98—801). Cl. VIII. Ambruş Andras (MFL, E: 793—802), Szabo Arpad (MFL, E: 793—802).

DOROHOI. Absolvent Marin Marina (5248 50, 54, 56, 57, 59, 61, 66, 70, 81, 83, 85, 86, 94, 95, 305).

DRĂGĂNEŞTI. *Ş. m.* Cl. XI. Văleanu Ion (5248—50, 54, 57,—63, 66, 67, 73, 80, 85—88, 94).

FĂLTICENI. *Ş. m. 2.* Cl. VIII. Miţoşeru Eugen (5248, 57—59, E: 1830—45, 47). Cl. X. Nemţeanu Radu (5252—54, 58, 59, 61, 62, 81, 83, 86, 95). Cl. XI. *Rabinovici Silviu* (5296—99, 301, 02, 05—09, 12—15, 17—19, 21, 22, 27, 28, 31, 32, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 43—52, 54—56, 58, 65, 68, 74, 90, 81, 84, 86—89, 92—96).

FĂUREŞTI (Oltenia). *Şc. de 8 ani.* Cl. VI. Gheorghişor Gh. (E: 1830, 36, 43, 60, 63, 66, 67).

FETEŞTI (Bucureşti). *Şc. m.* Cl. VIII. Constantinescu Maria (5270, E: 1830, 33, 35—37, 41, 43, 45, 50), Dunăreanu Theodora (E: 1830, 35—37, 41, 43, 45, 50). Cl. IX. Pavel Maria (5221, 22, 96, 317, 47, 93, 407, 11).

FOCŞANI. *Ş. m.* Unirea. Dumitrache Dumitru (5250, 52, 53, 56, 64, 65, 67, 71, 74, 86, 95, 96, 302, 13, 55, 92), Rosenberg Flavia (5216, 79, 96, 97, 99, 301, 02, 05—09, 11—15, 17, 19, 21, 27, 32, 35, 37, 39, 41, 43—45, 47, 49—51, 54, 55, 88, 92, 95).

GALAŢI. Absolvent Gîţă Maria (5248—50, 54, 55, 57, 59, 61—63, 70, 71, 73, 74, 80, 81, 83, 85—88). *Ş. m. 1* Cl. X. Cahane Mendi (5259, 64, 98, 301, 02, 15, 32, 35, 39, 41—45), Hoiazi Cristina (5248, 53, 57, 62, 66, 67, 70, 74, 86, 95, 96, 335, 43, 45), Mihailovici Marcel (252, 53, 59, 64, 74, 332, 35, 39, 41, 43, 45, 55), Vasile Victor (5253, 58, 62, 74, 86, 95, 96, 313, 15, 35, 43, 45). *Ş. m.* 2. Cl. XI. Dodu Marian (5258, 60, 83, 86, 302, 32, 41, 44, 46, 55, 84, 93, 96). *Ş. m 3.* Cl. VIII. Codreanu Rodica (5296, 305, 28, 92, 93, E: 1846, 47, 57, 58, 61, 66, 67). Cl. IX. Zaharia Iftiie (5248, 50, 57—62, 66, 70, 74, 77, 81, 84, 86). *Ş. m. 5.* Cl. VIII. Andreiaş Nicolae (5251, 53, 66, 74, 83, 86, 98, 302, 11, 13, 28, 35, 55, 92, E: 1831, 33, 37, 39—41, 43, 45, 47, 53, 57, 60, 62—64, 68, 70), Lucaci Pompiliu (5250—53, 66, 74, 86, 302, E: 1831—33, 39—41), Maravela Tudorache (5248, 56—58, 70, E: 1830, 31, 34—36, 37, 41), Sterea Ene (5256—58, 60—62, 71, E: 1834, 35, 39, 40, 42, 56), Stoian Violeta (5270, E: 1840, 41, 47, 54, 55, 58—60, 63, 68, 70), Susoi Amalia (5384, 85, 92, E: 1853, 57—60, 63, 64, 66, 67—69). Cl. X. Lucaci Nicolae (5251, 53, 66, 74, 83, 86, 98, 313, 28, 55, 92), Scobici Elena (5214, 20, 86, 98, 307, 36, 37, E: 1830, 36, 82), Tănase Paul (5265, 48—50, 57, 59, 62, 302, 07, 12, 13, 22, 37, 41). *Ş. m.* V. Alecsandri. Cl. IX. Ionescu Mircea (5248, 50, 56, 57, 59, 61, 66, 98, 44, 45, 55, 92).

GIURGIU. Ş. m. Cl. VIII. Ivanov Ilie (5257, 67, 71, 97, 98, 305, 06, 09, 13, 14, 29, 32, E: 1860, 67), Soloiu Traian (5345, E: 1830, 31, 35, 36, 43, 45, 47, 71, 72, 73, 75).

GURA HUMORULUI. *Ş. m.* Cl. VIII. Prelicz Carol (E: 1816, 20, 22, 23, 30—32, 35—37, 41, 43—46, 49, 51).

HAŢEG *Ş. m.* Cl. IX. Petriu Emil (5248—51, 57—62, 77, 86).

HUŞI. Absolvent *Dolteanu Temistocle* (5296—98, 302, 05—09, 12, 13, 15, 18, 25, 28, 32, 35—38, 45, 49, 54, 55, 59, 61, 62, 65, 72, 82, 84, 86, 88, 91—94, 96).

IAŞI. *Ş. m. 1.* Cl. X. Goldenberg Daniel (5248—53, 56—62, 64—67, 70, 74, 85, 86, 92, 93). Haim Marcel (5314, 41, 47, 48, 55, 82, 84, 95, 400, 10, 22, 24). *Ş. m. 2.* Cl. VII. Bercovici Carola (E: 1843, 45, 46, 57, 58, 61, 64, 66, 73, 80; 5345, 422), Segal Ghizi (E: 1843, 45, 46, 57, 58, 61, 64, 73, 80, 5345, 422), Suiu Rodica (E: 1830, 31, 34—37, 43, 45, 58, 59, 64, 66). Cl. X. Leonte Mariana (5248, 49, 51, 61, 66, 67, 70, 74, 95). Cl. XI. Pasicina Valeria (262, 74, 84, 86, 64, 315, 32, 55, 72, 84, 92, 95). *Ş m. 3.* Cl. XI. Nechita Vasile (5248, 50, 51, 58, 59, 60, 61, 64, 67, 70, 74, 84, 86). *Ş. m. 4.* Cl. V. Linde Radu (E: 1843, 45, 59, 60, 63, 64, 66, 68). Cl. VI. Bulandra Mariana (E: 1859, 60, 63, 71, 72, 75). *Ş. m. 6* Cl. X. Bradu Brînduşa (5249, 50, 56, 58, 61, 62, 95, 306, 09, 13, 55, 65). Bolocan Mihai (5448, 50, 57—61, 93—96, 313, 15, 41, 44, 45). Cl. XI. Galecu Constantin (5251, 53, 56, 86, 301, 02, 08, 13, 27, 37, 53, 84, 85, 92, 95).

Ş. *m.* 7. Cl. VIII. Florescu Liviu (E: 1833, 36, 37, 41, 43, 46, 47, 57, 58, 61, 66, 67, 70, 6237, 70). Cl. IX. Nuhancovici Leon (5248, 50, 57, 59, 61, 62, 70, 83, 86, 92, 96, 98, 332). Student Matei Dragoş (5250, 52, 54, 57—63, 67, 74, 81, 83—88, 96, 307, 13, 15, 20, 22, 34, 37, 45).

INEU. Lt. Maj. Alexa Ioan (5248, 49, 52, 57, 59, 66, 67, 71, 81, 87, 94, 98, 302, 13, 14, 15, 17).

LIPOVA. Ş. *m.* Cl. X. Naforniţă Ion (5250—52, 58—61, 67, 78, 83, 86, 98, 301, 02, 07—09, 12, 15, 21, 37, 55, 58, 65, 66, 67, 87, 94). Pătrugan Victor (5250, 52, 56, 57, 62, 65, 68, 70, 74, 81, 83, 86, 95, 96, 99, 318, 19, 28, 32, 35, 36, 45, 55, 80, 90, 92, 96).

LUGOJ. *Şc. 7 ani nr. 3.* Cl. VII. Ciolacu Nicolae (E: 1830, 36, 37, 43, 45, 58, 60, 63, 64, 66, 67, 69). *Şc. 7 ani* nr. 5. Cl. VII. Plişcaru Gabriel (E: 1845, 58—60, 62—64, 66).

Şc m. 1. Cl. VIII. Brînda Rodica (E: 1835, 36, 40, 41, 43, 45, 47, 53, 58, 59, 62—64, 67, 68, 70, 71—80, 5256, 58, 59, 66, 70, 96, 306, 09, 11, 13, 43, 44, 45, 62, 92), *Jurca Ioan* (E: 1843—54, 47, 48, 51, 53, 54, 58—60, 62—64, 66, 67, 69—76 78—80). Cl. IX. *Daba Dan* (5248—51, 53, 57—62, 64—66, 68, 70, 71, 74, 75, 81, 83, 84, 86, 87, 96—98, 313, 14, 18, 19, 27, 28, 32, 34, 35, 39, 43—46, 49, 50, 52, 55, 92). Cl. X. Balaci Ioan (5248—51, 56, 57, 59—62, 66, 70, 71, 74, 81, 83, 84, 96, 97, 313, 14, 17, 21, 27, 32, 45, 47, 51, 55), *Vasiliu Dan* (5248—50, 52, 53, 57, 59—64, 66, 67, 71, 74, 81, 83, 84, 86—89, 96—98, 306, 13, 14, 17, 19, 21, 24, 27, 32, 34, 35, 39, 40, 43—45, 49).

MĂRĂSEŞTI. Ş. *m.* Cl. XI. *Anghel Vasile* (5199, 200, 18, 39, 40, 43, 69, 71, 72, 83, 97, 99—303, 20, 27, 29—31, 36, 39, 40, 43, 45, 46, 54, 55, 72—77, 84, 86, 88, 92—96).

MEDGIDIA. Ş. *m.* Cl. VIII. *Vlase Aurelian* (E: 1816—24, 26, 28—31, 33—37, 40, 41, 43—48, 50—52, 54, 208, 17, 18, 20, 24, 38, 42—44, 48, 49, 56—61, 64, 66, 77, 92, 93, 96, 97, 305, 06, 09, 10, 11, 39, 43, 45). Cl. IX. Stepan Ionel (5067—69, 110, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 26, 39, 40, 41, 44, 49, 52, 58, 60, 75, 83).

MEDIAŞ. Ş. *m* Cl. X. Brădişteanu Adrian (5296, 98, 305, 13, 18, 27, 28, 32, 39, 40, 43, 45, 46, 47, 55, 82, 84, 92). Absolvenţi: *Ifrimelea Ştefan* (5257, 59—61, 63, 70, 74, 82, 83, 85—88, 94—99, 312, 13, 14, 18, 21, 28, 32, 34—37, 39—45, 48, 49, 92), *Pancu Adrian* (5248, 53, 74, 84, 86, 89, 90, 94—99, 306, 07, 12, 14, 15, 17, 18, 21, 27, 28, 32, 34—37, 39—45, 47, 48, 82).

MARGHITA. Ş. *m.* Cl. IX. Soros Şandor (MFL: 824, 25, 32, 5255, 59, 63).

MIOARELE. *Şc. de 8 ani* Cl. VII. Ştefănescu Petre (E: 1871—78).

NĂSĂUD. Absolvent *Zăgreanu Marius* (5267, 74, 97, 98, 300, 07, 08, 11, 12, 14, 15, 16, 24, 30, 32 33, 35, 36, 44, 47, 48, 55, 58, 60, 61, 62, 65, 70, 71, 73, 75, 74, 77, 81, 82, 92, 94, 95, 96)

NOVACI. Ş. m. Cl. X. *Bejancu Aurel* (5206, 07, 09, 11, 12, 16, 18, 22—24, 31, 38—40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 52, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66—68, 70, 71, 74, 81, 83, 85, 86, 95—302, 05—08, 10—15, 17, 18, 21, 27, 28, 36, 37, 39—41, 43, 45, 47—51, 55, 72, 84, 92). Absolvent *Chiriac Ioan* (5256—63, 66, 67, 70, 74, 77, 80, 81, 83, 86, 90, 94, 302, 03, 05, 07, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 22, 34, 35, 39, 45, 50, 52, 55, 72, 84, 92, 95).

ODORHEI. Ş *m.* Petru Groza. Cl. VIII. Lorincz Blanka (MFL: 720, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 801).

ODOBEŞTI. Ş. *m.* Cl. VIII. Lupu Stela (E: 1857, 58, 62, 63, 64, 66, 67, 71, 72, 73, 75, 80, 5392).

OCNA MUREŞ. Ş. *m.* Cl. X. Horovitz Ossi (5296, 98, 300, 01, 02, 05—08, 13—15, 27, 32, 36, 40, 41, 43—47, 49, 55, 63, 84, 93, 94, 95, 96, 400, 09, 15, 22, 30).

ORAVIŢA. Ş. *m.* Cl. X. Guleşiu Adrian (5248, 50, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66).

ORĂŞTIE. Ş. *m.* Cl. VIII. Hindoran Constantin (E: 1831, 32, 34, 36, 37, 41, 70, 53, 43, 45).

ORADEA. Ş. *m.* 1. Cl. VIII. *Popescu Dumitru* (E: 1830, 31, 33, 35—37, 40, 43—45, 47, 48, 57—60, 62—64, 66, 70, 5248, 56, 57, 58, 61, 62, 75, 81, 311, 14, 44, 45, 72, 92, 95). Cl. IX. Borcea Sorin (5248, 49, 57, 58, 59, 61, 66, 70, 96, 97, 313, 45), Komhauser Alexandru (5248—50, 57, 59—62, 66, 70, 86), *Toma Marin* (5238, 43, 56, 65, 69, 82, 94, 95, 309, 10, 18, 20, 28, 29, 34, 36, 39, 40, 47, 48, 51, 52, 55, 57, 58, 65, 66, 74, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 93, 94, 95, 96). Cl. X. *Barsonyi Andrei* (5296—302, 05—09, 12—15, 19, 21, 28—32, 35—37, 39, 41, 44, 45, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 57, 65, 66, 74, 80, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 94, 95, 96). *Stănculescu Carmen* (5251, 56, 58, 62, 64, 65, 69, 72, 77, 84, 95, 96, 99, 300, 01, 06, 07, 09' 11. 14, 17, 19, 21, 27, 28, 29, 32, 35, 36, 37, 39, 40, 47, 48, 49, 51, 55, 82, 84, 92, 95).

Ş. m. 4. Cl. VIII. Balint Iozesf (MFL, E: 781, 83, 87, 89, 94, 95, 99, 801, 02). Cl. X. Filip Gheorghe (5248—51, 57, 61, 70, 74, 86, 87, 5327, 55).

OŢELUL ROŞU. *Ş m.* Cl. VIII. Cădariu Silviu (E: 1845, 47, 58, 59, 63, 64, 66, 67, 71, 72, 73, 74), Navligu Ioan (E: 1830—37, 40, 41, 43—47, 57—59, 63, 64, 67, 5270, 71, 327), Stănescu Dan (E: 1830, 31, 36, 37, 41, 43, 58, 59, 63, 66, 5248, 49, 57). Cl. XI. Miklosi Gheorghe (5234, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 64, 67, 70, 81, 86).

PANCIU. *Ş. m.* Cl. XI. Zamfir Gh. Ioan (5209, 10, 34, 41, 44, 47, 61, 82, 94, 97, 301, 24, 25, 27, 38, 46, 47, 50, 53—62, 64—66, 68—70, 72—74, 76, 80, 82—84, 86, 88, 89, 91—96).

PĂUNEŞTI. *Şc. de 8 ani.* Cl. VI. Apreotesei Elena (E: 1349, 58, 54, 59, 64, 66), Cantiş Gheorghe (E: 1840, 43, 49, 53, 64, 59, 66). Neagu Tinca (E: 1836, 41, 49, 54, 59, 64, 66), Popa Elena (E: 1830, 36, 41, 43, 48, 49, 55). Cl. VII. Berbece Marioara (E: 1836, 44, 43, 47, 49, 59, 64), Mania A. Tatiana (E: 1857, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 67, 70, 5295), Nica Costică (E: 1832, 36, 37, 40, 45, 48, 44, 51, 63, 64, 66).

PĂTÎRLAGELE *Ş. m.* Cl. VIII. Pavel Dumitru (E: 1832, 51, 57, 58, 64, 66, 5256, 59, 62, 71, 328).

PECINEAGA. Absolvent Moldoveanu Tudor (5248, 49, 57, 59, 61, 62, 66, 67, 73, 81, 85, 86, 87, 89, 96, 97, 98, 302, 05, 06, 12, 13, 14, 15, 28, 34, 35, 38, 41, 52).

PETROŞENI. *Şc elem.* Nr. 4. Cl. VIII. Hegedus Istvan (MFL, E: 793, 94, 97, 99, 800, 01, 04).

Ş. m 1. Cl. VIII. Oprişu Cornel (E: 1858, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 75, 76, 78, 79, 80, 5372, 84, 95, 406, 07). Cl. XI. Hîndorean Viorel (5248—50, 52, 53, 56—62, 66, 67, 83, 92, 93).

PIATRA NEAMŢ. *Ş. m. 2.* Cl. X. Teodorescu Voltaire (5302, 12, 15, 32, 37, 41, 44, 49, 55, 56, 88, 92). Cl. XI. Braister Ştefan (5216, 32, 57, 59, 96, 300, 02, 13, 14, 41, 44, 45). Absolvent Rosenberg Hary (5249—52, 56—62, 64, 67, 70, 71, 74, 86, 94, 96—98, 302, 05—08, 13—15, 17, 21, 32, 34—37, 44, 45, 48, 52).

PITEŞTI. *Ş. m. 1.* Cl. V. Cernătescu Carmen (E: 1843, 45, 49, 60, 63, 64, 66). *Păunescu Ştefan* (E: 1843, 45, 59, 60, 63, 75, 77). Cl. VIII. *Neagoe Victor* (E: 1830—54, 56—64, 66, 67, 68, 248, 49, 57—62, 66, 67, 70, 71, 77, 81, 83, 96, 97, 302, 05, 11, 12, 13, 15, 19, 27, 28, 31, 43, 45, 49, 82, 84, 85, 89, 95). Cl. IX. Cîrstea Marian (5360, 55, 60, 85, 86, 403, 07, 22, 23, 28, 29, 392). Cl. X. *Popa Nicolae* (5248, 50, 56—62, 64—67, 95, 96, 98, 202, 05, 08, 12, 15, 17, 27, 37, 40, 41, 43, 44, 45), *Tărăbuţă Mihai* (5248—54, 56—67, 70—72, 74—78, 81, 83—89, 96—302, 05, 07, 12—15, 17—19, 21, 27, 28, 30, 32, 35, 37, 43, 44, 49, 53—55, 57, 58, 65, 66, 68, 71—73). *Ş. m. 2.* Cl. X. Georgescu Nicolae (5257, 59, 60, 61, 64, 66, 81, 83, 302, 11, 12, 55). *Ş. m. 3.* Cl. X. *Diaconu Nicolae* (5208, 13, 14, 32, 38, 50, 52, 64, 79, 84, 96, 98, 309, 02, 05, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 21, 27, 32, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 46, 49, 55, 65, 73, 86). Cl. XI. *Zamfir Corneliu* (5249, 53, 76, 77, 88, 89, 96, 98, 302, 03, 07, 12, 13, 15, 19, 20, 22, 34, 35, 44, 45, 48, 52, 55, 57, 61, 68, 70, 73, 76, 80, 88, 95).

PLOIEŞTI. *Şc. elem. nr. 9.* Cl. VI. Tudor Ana (E: 1843, 45, 47, 58, 59, 63, 64, 66).

Ş. m. 1. Cl. VII. Butufei Sorina (E: 1830, 35, 37, 43, 45, 47, 63, 71, 72, 73, 75, 77, 79). Cl. VIII. Bîzu Marius (E: 1830, 31, 36, 37, 41, 43, 45, 46, 47, 48). Cl. IX. Nicolae Silvia (5248, 49, 50, 51, 57, 58, 59, 61, 62, 66, 70, 74, 77, 86), Tepşoiu Aurel (5248, 50, 56, 57, 59, 61, 62, 70, 74, 86, 96). Cl. X. Leonte Filip (5311, 13, 44, 45, 50, 57, 84, 92, 95, 96, 503, 22), Neacşu Viorel (5239, 44, 48, 49, 50, 52, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 70, 79, 81, 84, 85, 86, 95, 96, 98, 301, 02, 05, 11, 12, 13, 14, 15, 32, 35, 36, 37, 43, 44, 45, 55). Pîrvulescu Constantin (5265, 70, 71, 92, 93, 302, 05—09, 12, 13), Tomescu Dumitru (5242, 46, 48—50, 52, 53, 56—62, 64—67, 70, 74, 81, 84—86, 95, 96, 98, 301, 02, 11—15, 36, 37, 43, 44, 55, 92).

Ş. m. 2. Cl. VIII. Iosifescu Grigore (E: 1843, 46, 47, 49, 51, 52, 53, 57, 58, 60, 64, 66, 67, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 5296, 327, 43, 44, 45), Radu Dorel (E: 1835, 39, 41, 43, 47, 57, 58, 59, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 71, 73, 74, 76, 79, 80, 344), Vasile Silvia (E: 1830, 34, 35, 36, 37, 45, 47, 64, 66, (248, 61). Cl. X. Săvulescu Alexandru (5296—99, 302, 05, 08, 09, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 27, 35, 37, 39). *Ş.m.3* Cl. VIII. *Brenner Paul* (E: 1844—53, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 71—80, 5296, 305, 11, 27, 39, 43, 44, 45, 84). Cl. IX. Leca Octavian (5248—51, 56, 63, 64, 66, 67, 68, 70, 71, 74, 77, 83, 84, 86). Cl. X. Georgescu Cristian (5248—53, 56—62, 64, 66—68, 70, 71, 74, 77, 81, 83, 84, 86, 90, 95). Cl. XI. Stăvaru Cristina (5248, 50—53, 57, 59, 61, 62, 67, 70, 85, 302, 12, 13, 36, 37, 44).

Absolvent *Andronescu Gheorghe* (5248, 50—53, 57, 61—63, 72, 78, 81, 83, 85, 86, 88, 94—315, 17, 18, 29, 21, 27, 28, 30—32, 34, 35, 37, 39, 41, 43—45, 48, 49, 51, 54, 55, 65, 68, 69, 89), Brănici Doru (5248, 50, 56—63, 66, 67, 70, 73, 75, 81, 83, 85, 87—89, 302, 04, 06, 09, 13, 15, 19, 32, 34, 35, 37, 41, 44, 45, 52).

PREDEAL. Absolvent Boroș Andrei (5248, 51, 54, 57, 59, 60, 62—64, 83, 85, 87, 89, 94, 96, 97, 99, 305, 15, 27, 31, 32, 37, 43, 44, 45, 48).

PUCIOASA. *S. m.* Cl. VIII. Comănoiu Emilia (E: 1843, 35, 36, 55, 58, 60, 63, 64, 69, 71, 73, 79). Dinulescu Tiberiu (E: 1843, 45, 47, 51, 59, 64, 66, 76, 73, 74, 76, 79), Nițescu Dan (E: 1838, 39, 41, 45, 46, 47, 52, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 5256, 58, 59, 61, 66, 71, 97, 312, 27, 401, 22), Niță Maria (E: 1830, 32, 33, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 60, 64), Plîngă Mihai (E: 1830, 36, 37, 43, 45, 47, 50, 58, 64, 66, 71, 73), Popa Ana Maria (E: 1843, 45, 47, 58, 59, 64, 66, 73, 79, 80, 53527, 32), Rădulescu Anton (E: 1830, 31, 36, 37, 43, 45, 47, 48, 58, 63, 66), Stoica Cecilia (E: 1830, 35, 36, 37, 41, 43, 45, 64, 5248, 61, 62, 69, 345), Stănescu Dumitru (E: 1830, 31, 36, 37, 43, 45, 47, 48, 57, 63, 66), Scherer Elena (E: 1830, 36, 37, 43, 45, 58, 60, 63, 64, 69), Vlad Gheorghe (E: 1847, 48, 59, 63, 66, 70, 5248, 57, 58, 62, 66, 70), Zarmarovici David (E: 1843, 45, 47, 58, 59, 64, 66, 71, 73, 74, 76, 79). Cl. IX. Caloianu Gabriela (5248, 49, 57, 59, 62, 66, 67, 84, 85, 86, 313, 32, 55, 84, 92), Dragomir Gheorghe (5250, 57, 59, 62, 70, 74, 86, 311, 45, 55, 95), Mircea Cornelia (5248, 57, 59, 62, 66, 67, 70, 74, 84, 313, 32, 84, 92, 95), Neicea Titus (5257, 59, 61, 66, 70, 81, 96, 313, 43, 45, 48, 52, 55), Pascale Luminița (5248, 49, 57, 59, 62, 66, 74, 84, 85, 86, 313, 32, 55, 84, 82), Popescu Maria (5248, 49, 57, 84, 85, 86, 313, 32, 55, 84, 92), Ruxăndroiu Aurel (5249, 59, 50, 51, 56, 62, 70, 74, 85, 86, 96, 97, 345), Stanciu Eugenia (5249, 50, 57, 70, 74, 83, 98, 305, 14, 45), Stoica Florențiu (5248, 51, 54, 59, 61, 66, 70, 74, 81, 83, 96, 313, 43, 45, 48, 52, 55), Stănăsescu Corneliu (E: 1845, 47, 58, 59, 60, 63, 66, 71, 73, 76, 79). Cl. X. Lupu Victor (5248, 56, 61, 70, 96, 302, 12, 15, 37, 43, 45, 55), Manea Elena (5248, 49, 59, 60, 62, 67, 70, 71, 74, 83, 84, 86, 302, 03, 312, 13, 14, 15, 32, 35, 37, 43, 44, 45), Tîrcă Gheorghe (E: 1841, 43, 52, 4670, 73, 5287, 88, 300, 01, 41, 61, 67, 72), Cl. XI. Ene Ion (5248—53, 56—62, 64—67, 71, 74, 81, 86, 96, 97, 306, 08, 09, 11, 13, 14, 27, 28, 35, 55), Levițchi Cezarina (5248, 52, 56, 59, 66, 67, 70, 96, 339, 40, 41, 44, 45, 92).

RĂDĂUȚI. Ș. m. 2. Cl. VIII. *Weinstein Jack* (E: 1832, 39—43, 45—47, 49, 53, 56, 59, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 67, 70, 5248, 49, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 70, 81).

REGHIN. *Ș. m.* 1. Cl. VIII. Kacso Ferencz (MFL: 817, 19, 20, 21, 27, 28).

RÎMNICU-SĂRAT. *Ș, m. 1* Cl. IX. Manolache Ion (5248, 49, 51, 56—59, 61, 62, 70, 74, 86). *Ș. m. 2.* Cl. X. Micu Nicolae (5251, 52, 55, 57, 62, 63, 64, 66, 72, 74, 75, 78, 81, 85, 86, 87), Nelepcu Grigore (5298, 302, 05, 07, 12, 13, 15, 21, 37, 49, 55, 84).

RÎMINCU VÎLCEA. *Ș m. 1.* Cl. VIII. Țigmeanu Ion (E: 1816, 20, 22—24, 26, 29, 30, 32—37, 39—41, 43—45, 47—53, 57, 60, 63, 64, 66, 5216, 21, 48, 57, 61, 70, 337, 39, 45, 49, 57, 85). *Ș. m. 2.* Cl. VIII. Droașcă Bogdan (E: 1844, 49, 63, 64, 71, 74, 73, 76, 78, 79, 5339, 43, 45), Horinar Cornel (E: 1836, 43, 45, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 5248, 51, 59, 62, 66, 343, 45, 84).

ROMAN. Liceul mixt. Cl. X. Bîrjoveanu Dumitru (5296, 98, 332, 08, 11—15, 18, 19, 35, 36, 43, 44, 45, 49). Cl. XI. Niculescu G. (5251, 67, 77, 78, 83, 85, 86, 96, 97, 502, 12, 13, 15, 27, 28, 58).

ROȘIONII-DE-VEDE. Cl. XI. Nebunescu Alexandru (5248—50, 51, 53, 56, 57—62, 66—68, 70, 71, 81, 82, 96, 97).

RUPEA. *Ș. m.* St. O. Iosif. Cl. VIII. Diaconescu Nicolae (5084, 87, 97, 104, 66, 83, 98, 514, 36, 56, 06, 310, 11, 13, 14, 19, 32).

SALONTA. *Ș. m.* Arany Janos. Cl. VIII. Tudor Dan (1835, 36, 37, 43, 45, 47, 49, 50, 58, 59, 60, 63, 64, 66). Cl. XI. David Florea (5248—50, 52, 53, 355, 57, 59, 60, 61, 62, 65, 66, 67, 74).

SASCUT. Șc. elem. Cl. VII. Gurămultă Dan (E: 1816—26, 28—37, 39—41, 43—54, 56, 5231, 48, 49, 57, 59, 61, 62, 66, 67, 70, 83, 305, 13).

SATU-MARE. Liceul M. Eminescu. Cl. VI. Varga Somogy Nemere (MFL, E: 793, 94, 96, 99, 801, 02). Cl. VIII. Fisztenger Tiberiu (E: 1843, 45, 47, 63, 64, 66, 71, 73, 80, 5296, 423), Gozner Ștefan (E: 1830—37, 39, 41, 57, 58, 59, 62, 63, 66, 71, 72, 73, 75). Cl. X. Oran Adrian (5248, 57, 59, 61, 66, 81, 358, 60, 62, 70, 95). Liceul Kolczey Ferencz. Cl. X. Samuel Iuditha (5286, 97, 305, 13, 14, 18, 21, 27, 28, 45, 51, 55, 60, 84, 94, 400, 11, 22, 24, 27, 32).

SĂVENI. Ş. m. Cl. VII. Toler Aron (E: 1830, 36, 37, 40, 43, 44, 45, 47, 58, 63, 64, 66, 70). Cl. VIII. Andrei Mircea (E: 1843, 45, 47 58, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 343, 45).

SLATINA. Ş. *m.* Cl. VIII. Buicescu Radu (E: 1830, 32, 35, 36, 37, 39, 41, 57, 60, 62, 66, 68).

SLĂNIC. Ş. m. Cl. IX. Dragu Cornel (5264, 69, 74, 306, 11, 40, 43, 45, 55, 83, 92, 95). Salomeia Mugurel (5267, 64, 68, 74, 81, 84, 306, 11, 40, 43, 45, 46, 83). Cl. X. Soiman Liviu (5248, 50, 57, 62, 70, 96, 98, 345, 55, 92).

SF. GHEORGHE. Ş. *m. 2.* Cl. VI. Szasz Gyorgy (MFL, E: 793, 94, 95, 96, 97, 99, 800, 01, 12, 04).

SIBIU. *Şc de 8 ani nr. 12.* Cl. VII. Nicu Maria Eugenia (E: 1836, 48, 51, 52, 53, 71, 73, 75). Ş.m. 1. Cl. VIII. Marica Eugen (E: 1843, 45, 47, 63, 64, 70, 71, 73, 75, 79, 80), Păcuraru Iuliu (5249, 50, 52, 53, 57, 58—62, 64, 74, 83, 86), Rădoi Oliviu (E: 1850, 58, 62, 63, 64, 66, 70—73, 75, 76, 80). Cl. X. Geleriu Liviu (5248, 52, 56, 57, 59, 62, 66, 67, 70, 95, 96, 314, 43, 44). Cl. XI. Mihu Dumitru (5296, 97, 317, 18, 77, 55, 68, 72, 85, 92). *Ş. m. 2.* Cl. VIII. Dăncilă Gheorghe (E: 1871—80, 5343, 55, 84, 92, 95). *Ş. m. 3.* Cl. VIII. Albinaru Doina (5248, 49, 70, 96, 98, 327, 45, 49, 95). Bart Radu (E: 1843, 45, 47, 48, 50, 58, 59, 63, 64, 66), Boac Monica (E: 1858—60, 62, 63, 64, 66, 68, 70, 5392, 95), Boeriu Adriana (E: 1863, 66, 69, 70—74, 77), *Bucur Liliana* (E: 1819, 30, 31, 35, 36, 40, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 52, 53, 56, 58, 59, 60, 63, 66, 67, 5249, 58, 59, 66, 70, 71, 92, 97, 327, 45, 92), *Dăncilă Ioan* (E: 1851, 61, 65, 71—81, 5250, 51, 74, 81, 86, 98, 309, 11, 14, 17, 18, 43, 55, 59, 84, 93, 95, 98, 402, 03, 07, 15, 22, 27, 28), Dinulescu Aurelian (E: 1843, 48, 51, 53, 54, 56, 57, 60, 63, 67, 70, 5328), Dobrotă Brîndușa (E: 1844, 57—64, 66, 67, 5343), Elefterescu Mihail (E: 1832, 53, 55, 57—60, 62—64, 66, 68, 5260, 64, 71), Geleriu Dan (: 1843—47, 50—52, 55, 57—74, 76, 80, 5296, 97, 314, 27, 43—45, 55, 82, 84, 92, 422), Helju Doina (E: 1840, 44, 45, 47, 48, 50, 52, 56, 58, 59, 64, 71, 73, 74, 76, 81), Hermeczi Gizella (MFL, E: 757, 58, 65, 81, 93), Holanda Doina (E: 1857—61, 66, 68), Lașiță Ileana (E: 1853, 71, 73—78, 80, 81), Lefter Marilena (E: 1831, 35—37, 45, 55, 58—60, 63, 64, 66), Marinuș Radu (E: 1850, 61, 62, 65, 71, 73, 77, 79, 80, 5343, 422), Mihai Virginia (E: 1830, 36, 37, 45, 47, 50, 56, 64, 66, 71, 72, 73, 80). Moldovan Rodica (E. 1813, 18, 22, 29, 30, 32, 35, 36, 37, 39, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 55, 58, 59, 63, 64, 66. 71, 73, 80), Munteanu Rodica (E: 1843—47, 49, 53, 57—60, 69, 66, 67, 81, 82, 73, 75, 80, 5296, 327, 92, 422), Năstoiu Aneta (E: 1859, 63, 64, 66, 71—76), *Ostop Ioan* (E: 1843—47, 50—52, 57—61, 63—71, 73—78, 80, 529, 97, 345, 422), Pascu Ioan (E: 1843, 44, 47, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79), Părăian Sanda (E: 1830, 32, 35, 36, 37, 43, 45, 46, 47, 58, 59, 63. 64, 66, 71—76), Petrașcu Florian (E: 1944—46, 50, 58, 63, 64, 70, 71, 73, 75, 80), Poenaru Daniela (E: 1832, 33, 39, 5248, 49, 70, 96, 98, 327, 45, 49, 95), Popescu Adriana (E: 1833, 43, 45, 46, 44, 47, 48, 50, 57, 58, 59, 60, 64, 66, 67, 71, 72, 73, 75, 80, 5262, 77, 96, 97, 327, 72, 422), Popa Corina (E: 1830, 34, 36,37, 43, 45, 47, 49, 50, 58, 64, 66, 5270, 349), Popa Veronica (E: 1830—33, 35—37, 41, 60, 61, 70, 5257, 61), Soima Liliana (E: 1843—47, 50, 55, 57—59, 63, 64, 66, 71, 72, 73, 75, 80), Tănaseciuc Lucia (E: 1830, 32, 36, 37, 41, 43—45, 47, 48, 51, 52, 54, 55, 58, 59, 60, 63, 65. 66, 67, 70), Cl. IX. Artimon Doina (5251, 62, 66, 70, 96, 98, 5327, 45, 49, 50, 55, 95), Chiriță Maria (5246, 97, 99, 305, 21, 28, 45, 50, 55, 92, 95), Iacobovici Eva (5250, 51, 74, 79, 84, 86, 98, 99, 317, 18, 21, 32, 50, 51, 55, 56, 57, 60, 72, 74, 86, 87), Marinescu Ana (5245, 48—51, 57, 59, 61, 62, 66, 70, 88, 96, 98, 327, 49, 50, 55, 95), Tanovici Crăița (5245, 48—51, 57, 59, 61, 62, 66, 70, 86, 96, 98, 327, 49, 50, 55, 95), Voicescu Smaranda (5266, 96, 97, 98, 99, 317, 21, 27, 45, 55, 92, 95).

SIGHET. *Ş. m.* Filimon Sîrbu. Cl. IX. Iacobovici Maier (5250, 51, 56, 60, 61, 62, 64, 70, 74, 81, 86). Cl. XI. *Elek Ana* (MFL, 853, 54, 55, 56, 57, 59, 61, 63, 67, 70, 74, 81, 83, 84—86, 88, 94, 95).

SIGHIȘOARA. *Ş. m.* 1. Cl. VIII. Kopan Sandor (MFL: 793, 94, 95, 96, 98, 800, 01), Cl. IX. Floca Margareta (5257, 61, 66, 70, 84, 86, 311, 45, 49, 55, 84, 95), Cl. X. Urdea Viorel (5207, 08, 10, 12, 24, 29, 31, 40, 44, 48, 50, 53, 57, 59, 60, 61, 67, 70, 86, 337).

SINAIA. *Ş. m m.* Cl. VIII. Cătană Ilie (E: 1858—60, 62, 63, 65, 66, 67, 70, 5286, 313, 43, 55, 84, 92).

STREHAIA. *Ş. m.* Cl. IX. Bosica Manuela (5248, 49, 51, 70, 317, 32, 52, 55, 74), Epuran Ion (5067, 68, 69, 116, 67, 39, 75, 262, 74, 86).

ȘTEFĂNEȘTI (Argeș). Șc. profesională. *Oprea Victor* (E: 1844, 45, 47, 48, 50, 51—53, 57—60, 62—64, 66, 67, 71—80, 5297, 306, 07, 09, 11, 13, 17, 21, 27, 32, 43, 44, 45, 47, 51, 55, 93, 95).

SUCEAVA. *Ş. m. 1.* Cl. VIII. Racocea Cezar (E: 1831, 36, 37, 41, 42, 43, 45, 71, 73, 75, 86).

SUPLACUL DE BACĂU (MARGHITA). *Şc. de 7 ani* Cl. VII. Nagy Zsuzsa (MFL, E: 777, 80, 93, 800, 01).

TECUCI. Absolvent Theodor Teodor (5214, 30, 52, 57, 66, 67, 72, 74, 81, 83, 85, 86, 87, 88, 93, 94, 5315, 18, 19, 30, 32, 35, 36, 37, 49, 51, 52, 55, 56).

TÎRGOVIŞTE. *Ş. m. 1.* Cl. XI. Brînzaru Irinel (251, 52, 53, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 70, 71, 74, 81, 83, 86). *Ş. m. 2.* Cl. VIII. Erlich Octavian (E: 1833, 43, 45, 46, 47, 56, 58, 63, 64, 66, 67, 71, 73, 75, 80, 5270, 71, 96, 97, 311, 27, 92). *Ş. m. 3.* Cl. VIII. Ciuculete Gheorghe (E: 1830, 36, 37, 43, 45, 47, 58, 62, 63, 64, 66), Niculescu Constantin 1943—45, 48, 51, 52, 58—60, 62—64, 67, 68, 71—73, 75, 78—81, 5296, 97, 327, 32, 43, 44, 45, 50, 92, 422).

TÎRGU-MUREŞ. *Şc. de 8 ani nr. 9.* Cl. VI. Fabian Iren (MFL, E: 812, 69, 78, 88), Kacso Marta (MFL, E: 817, 19, 21, 78). *Liceul Bolyai Farkaş.* Cl. VIII. Racz Zsuzsa (MFL, E: 772, 94, 96, 98, 801). Cl. X. Dalay Pal (MFL, 853, 54, 55—59, 62).

TÎRGU-JIU. *Şc. de2 8 ani nr. 4.* Cl. VII. Măhăianu Emil (E: 1830, 31, 32, 36, 37, 43, 46, 47, 57, 58). *Ş. m. 1.* Cl. VIII. Bănică Marian (E: 1830, 31, 33, 36, 42—45, 63, 64), Isac Horaţiu (E: 1832, 46, 47, 57, 59, 70, 71, 84, 53, 28, 92).

TOPOLOVENI. *Ş. m.* Cl. X. *Bădulescu* Grigore (5264, 65, 68, 70, 71, 74, 81—86, 91, 94—302, 05—15, 17, 19, 21, 27, 32, 35, 36, 39—41, 44—47, 49—51, 55, 84—89, 92— 96).

TIMIŞOARA. *Ş m. 1.* Cl. X. Balogh Pal (MFL: 823, 24, 32, 35, 55, 56, 57, 64), Catalina Ioan (5251, 72, 94, 97, 302, 05, 12, 15, 19, 34, 44, 65, 92, 51), *Rujan Octavian* (5263, 72, 73, 76, 87, 88, 94, 97, 99, 308, 11, 19, 21, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 43, 55, 65, 60, 92, 93, 94, 95, 96). *Ş. m. 2.* Cl. XI. Szende Suzana (5267, 86, 95, 305, 11, 13, 14, 17, 32, 44, 92). *Şcoala de meserii.* Anul II. Rosenberg Petru (E: 1843, 45, 51, 57, 58, 59, 62—64, 66, 68, 70, 306, 09, 43, 44, 45).

Student electronică. *Costea Dumitru* (5248, 50, 57, 59—61, 63, 67, 70, 71, 74, 78, 81, 83, 85, 86, 88, 95, 96, 98, 302, 05, 07, 08, 12—15, 19, 22, 32, 34, 35, 37, 43—45, 52), *Vlădoreanu Cornel* (II matem.) (5237, 42, 48, 49, 50, 56, 60, 63, 92, 93, 96, 98, 302, 07, 09, 11, 14, 15, 17, 19, 22, 26—28, 32, 33, 43, 45, 52, 55, 70, 73—76, 79, 84, 91, 92, 95).

TURDA. *Ş. m. 1.* Păcuraru Liana (5249, 51, 57, 58, 59, 60. 61, 62, 64, 66, 67, 70, 74, 78, 83, 84, 86, 95). *Ş. m. 2.* Cl. VIII. Olariu Adriana (E: 1710, 17, 18, 76, 82, 86, 87, 814, 17, 22, 33, 43, 44, 46, 47, 57, 58, 59, 60, 63, 64, 66, 74, 71, 72, 73, 75. 76, 79, 80, 5073, 123, 39, 60, 216, 96, 327, 43, 44, 45, 92, 407, 22).

TURNU SEVERIN. *Ş. m. 1.* Cergan Petre (5242, 52, 60, 61, 67, 95, 300, 13, 27, 41, 44). Cl. XI. Nisipeanu Nelu (5257, 62, 302, 07, 09, 13, 15, 38, 41, 43, 44, 45, 55). *Ş. m. 2.* Cl. X. Arventie Vitalie (5248, 49, 51, 56, 57, 59, 60, 61, 66, 67, 70, 71, 82, 96, 97, 304, 08, 15, 19, 32, 35, 49, 55, 93, 95, 96), *Cornea Dumitru* (5250, 51, 53, 58, 60, 62, 66, 70, 71, 81, 84, 85, 95, 96, 97, 300, 02, 07, 11, 12, 13, 15, 18, 19, 27, 28, 32, 35, 37, 44, 45, 49, 50, 52, 55, 58, 65, 68, 80, 82, 92, 94, 95). Ş. m. 3. Cl. VI. *Lupulescu Adriana* (E: 1830, 31, 34, 36, 58, 60, 63, 66).

TURNU MĂGURELE. *Ş. m.* Cl. X. Dună Radu (5249, 51, 52, 53, 56. 60, 62, 70, 96, 97, 98, 302, 13, 15, 32, 36, 37, 55, 58), Predescu Emil (5297, 98, 301, 02, 07, 12, 13, 15, 17, 19, 27, 43—45), Predescu Corneliu (5296, 97, 98, 301, 02, 12, 13, 15, 17, 27, 29, 41, 43, 44, 45), Cula Constantin (5249, 50, 51, 52, 53, 58, 60, 62, 66, 67, 74, 81, 83, 95).

VASLUI. *Şc. de 8 ani nr. 2.* Cl. VII. Radu Daniela (E: 1843, 45, 59, 60, 63, 64, 66, 71, 73). *Ş. m. 1.* Cl. VIII. *Maftei Radu* (E: 1830, 32, 35, 36, 37, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59—67, 5248—51, 56—62, 66—71, 74, 83, 84, 86, 96, 97, 98, 305, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 27, 28, 32, 34, 45, 49, 50, 51, 58, 86, 87, 92, 95), Pencu Adrian (5248, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 66, 70, 311, 32, 43, 45), Radu Mihaela (E: 1843, 45, 47, 59, 60, 63, 64, 66, 71, 73, 75, 96, 5296, 311, 39).

VATRA DORNEI. Absolvent Moroşan Petre (5263, 74, 85, 86, 87, 88, 97, 332, 55, 62, 71, 73, 75, 76, 79). Alinei Dumitru (5296, 302, 08, 12, 13, 15, 23, 30, 34, 37, 55, 73, 76, 92).

ZALĂU. Şc. m. Ady Endre. Cl. X. Gajzago Maria (MFL: 840, 41, 57, 58, 61, 64, 65). Grupul şcolar Simion Barnuţiu. Cl. V. Fulop Gyorgy (MFL: 793, 94, 95, 800, 01, 02). Cl. VI. Kovacs Ilona (MFL: 793, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 800, 01, 02. 04), Mura Anna (MFL: 793, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 800, 01, 02, 04).

OKSZ MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Se primesc lunar într-un plic soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorul pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați. **Evidențiații trebuie să aibă cel puțin 36 soluții bune.**

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste,este rugat să arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerc, să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie făcute de mai multe ori înainte de a fi trimise, pentru ca redactarea lor să fie cît mai clară și concisă. Figurile să fie făcute separat. In redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie : $\parallel$ = ; $\sim$; .*. ; $\perp$; $\parallel$; Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor IX—XI sau studenții vor trimite soluții la problemele propuse pentru clasele VIII—XI. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.F.—B sau M.F.L. Problemele rezolvate de matematică și fizică vor fi expediate odată în cursul unei luni într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului.

Elevii claselor V—VII vor fi anunțați la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit cel puțin 7 probleme bine rezolvate, iar elevii VIII—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

— Colaboratorii G.M.F.-B, profesori și elevi, sînt rugați să trimită îndată redacției, fișa completată cu activitatea extrașcolară și în cercurile de elevi pe anul 1961—1962, conform celor publicate în nr. 1, 1962, pag. 30. Activitatea rezolvitorilor din nr. 11—12 ale G.M.F.-B se va trece de către redacție.

Evidențiații de cel puțin 2 ori pot trimite totalizarea problemelor rezolvate și anunțate în nr. 1—11 G.M.F.-B-1962, dacă au însumat minim 120.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Autorii sînt rugați să semneze clar la sfîrșitul lucrării personale pe care o trimit pentru publicat și adresa lor exactă.

In G.M.F.-B nr. 3, pag. 153 s-a publicat : *Un concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică.* Participanții la acest concurs pot fi : profesori, ingineri, maiștri, studenți sau elevi. Concursul se încheie la I.XI.1962.

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1.	E. RUSU	Bazele teoriei numerelor
2.	A. I. MARKUȘEVICI	Șiruri recurente.
3.	N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4.	P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor
5.	I. S. SOMINSKI	Metoda inducției matematice.
6.	GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităților.
7.	H. IONESCU	Calcule numerice.
8.	A. I. MARKUȘEVICI	Arii și logaritmi
9.	A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10.	O. SACTER	Despre conice și alte curbe
11.	ION IONESCU	Maxime și minime geometrice.
12.	F. I. ZIGHEL	Cometele
13.	S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14.	V. ATANASIU	Structura materiei.
15.	V. V. SARONOV	Soarele și observarea lui.
16.	O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial
17.	B. B. KUDRIAVȚEV	Experiențe simple cu ultrasunete.
18.	M. V. PENTKOVSKI	Nomograme
19.	A. KAHANE	Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20.	GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, ed. IV-a (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21.	A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22.	N. STĂNESCU	Electronul.
23.	V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24.	G. N. BERMAN	Cicloida.
25.	C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
26.	AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27.	M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28.	C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29.	I. S. DUBNOV	Erori în demonstrațiile geometrice.
30.	H. STEINHAUS	Caleidoscop matematic.
31.	C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura originea și evoluția lor
32.	C. DRÎMBĂ	Elemente de mecanică cerească
33.	C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34.	NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism
35.	GH. A. CHIȚEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36.	G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37.	C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38.	O. SACTER	Olimpiade matematice.
39.	A. I. MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme
40.	I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
41.	A. I. HINCIN	Fracții continue.
42.	V. A. USPENSKI	Unele aplicații ale mecanicii în matematică.
43.	V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44.	G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.
45.	A. IAGLOM și I. IAGLOM	Probleme neelementare tratate elementar.
46.	CIUCU și SÎMBOANU	Culegere de probleme de calculul probabilităților și statistică
47.	N. D. FEDOROV	Ciclotronul.
48.	O. SACTER	Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente.
49.	V. ATANASIU	Noțiuni de fizică generală. Vol. I.

Intreprinderea Poligrafică Nr. 6 — c. 4879

Lei 1,50

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XIII noiembrie 1962

11

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 11 — noiembrie 1962

SUMARUL

		pag.
1.	A patra Olimpiadă internaţională de matematică 1962, de Gh. D. Simionescu	641
2.	Tuburi electronice de Mircea Ianovici, Carei	652
3.	Cîteva noţiuni despre pol, polară şi figuri polare reciproce de Vasile Tuţuraş, Satu Mare	658
4.	Experienţe simple cu ajutorul tubului electronic, fotocelulei electrice şi a lămpii cu neon de Czimbalmoş Ladislau şi Kirnel Paul, Baia Mare	663
5.	Construcţia unui aparat de mărit foto de Iosif Nagy, Negreşti, Oaş	667
6.	Caleidoscop fizic şi matematic de Ion Giurgiu, Baia Mare	669
7.	Noutăţi din ştiinţă şi tehnică de Dumitru Silaghi, Baia Mare	672
8.	Probleme rezolvate (4811—4815; 4818; 4819; 4836—4838; 4850; 4858; 4860; 4866; 4874; E: 1807,1810; MFL: (E: 774—780)	674
9.	Probleme propuse (5507—5530)	691
10.	Chestiuni de examen (5531—5540)	695
11.	Exerciţii şi probleme pentru clasele V—VIII (E: 1907—E: 1914.	698
12.	Cărţi noi	699
13.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	700

ANUL XIII 11 NOIEMBRIE

O parte din materialele publicate în acest număr a fost asigurată de către filiala Baia Mare a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R.

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Cristea I.*, asistent; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Kiss E.*, conf. univ.; *Koch Fr.*, lector; *Kovacs K.*, conf. univ.; *Lévai Şt.*, asistent; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D. Gh.*, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

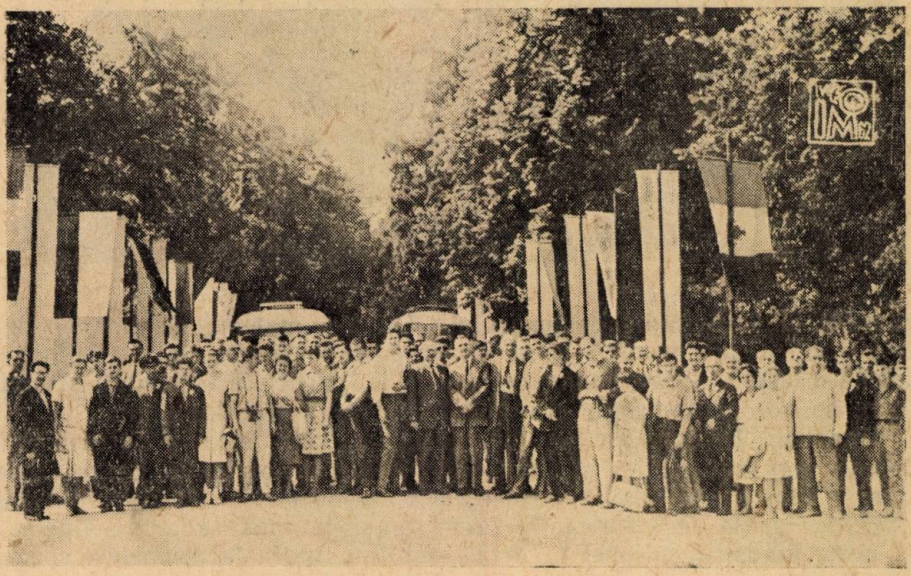
Anul XIII, nr. 11 noiembrie 1962

MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983 ORSZÁGOS

A PATRA OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

de Conf. univ. *GH. D. SIMIONESCU*

1. Anul acesta Olimpiada internațională de matematică (a IV-a manifestare de acest fel) s-a ținut în R.S. Cehoslovacă între 5 și 15 iulie 1962. Discutarea și alegerea problemelor de concurs au avut loc la Praga,



în zilele de 5 și 6 iulie; la 8 iulie toate delegațiile s-au deplasat cu autobuzele, la Ceske Budejovice unde au fost cazați atît elevii, cît și profesorii.

Concursul propriu zis și toate lucrările olimpiadei s-au desfășurat la castelul Hluboka (la 10 km de Ceske Budejovice) socotit ca cel mai frumos castel din R.S. Cehoslovacă (unde se află destul de multe). Menționăm că Ceske Budejovice se găsește în sudul Boemiei, la o depărtare de 150 km de Praga și în acest oraș a trăit Jaroslav Hașek, autorul „Soldatului Sveig". Aici se află fabrica de creioane cu renume mondial „Koh-i-noor" (Hardmuth), întreprinderea de materiale didactice „Logarex" și în împrejurimi fabrica de motociclete „Jawa", care au fost vizitate de participanți.

La această a IV-a O.I.M. au participat următoarele țări: R.P. Bulgaria, R.D. Germană, R.S. Cehoslovacă, R.P. Polonă, R.P. Română. R.P. Ungară și U.R.S.S., fiecare delegație fiind formată din 8 elevi și doi profesori însoțitori.

Forurile conducătoare cehoslovace au dat o deosebită amploare acestei întreceri internaționale, printre altele și pentru faptul că ea a fost

încadrată în festivitățile centenarului „Uniunii matematicienilor și fizicienilor din Cehoslovacia", care au început în aprilie cu sărbătorirea solmenă a celor 100 ani împliniți (la care au participat și invitați străini) și care se vor continua cu alte acțiuni, pînă la sfîrșitul anului.

Ministrul Învățămîntului, tov. Kahuda, care este și președintele „Uniunii matematicienilor și fizicienilor" a venit special la Ceske Budejovice, în ziua de 11 iulie, pentru a lua masa cu elevii și profesorii veniți la *O.I.M.*, iar la festivitatea de premiere și la masa comună finală a luat parte ministrul adjunct al învățămîntului, venit de asemenea special de la Praga.

Toate hotărîrile privitoare la desfășurarea O.I.M. au fost luate de către comisia internațională, în plenul ei, alcătuită din șefii delegațiilor țărilor participante și avînd ca președinte pe academicianul ceh. I. Novak.

★

2. Ca și în anii precedenți elevii participanți au fost supuși la două probe scrise: prima conținînd 3 probleme pentru care s-au acordat 4 ore de lucru și a doua avînd 4 probleme, cu 5 ore de lucru. Timpul de lucru pare prea lung pentru niște copii care încă nu sînt obișnuiți cu o concentrare a atenției de asemenea durată, însă s-au luat unele măsuri care să le ușureze condițiile de lucru. Astfel elevii puteau părăsi sala, cîte unul, pentru o durată de timp de 10—15 minute, apoi fiecare elev avea

pe masa de lucru un pachet cu mîncare și sticle cu răcoritoare sau apă minerală.

Spre deosebire însă de anii precedenți, lucrările nu au fost distincte, prima de aritmetică, trigonometrie și algebră, a doua de geometrie. Accentul a căzut în acest an pe geometrie, deoarece din cele 7 probleme, patru au fost de geometrie.

Vom trece în revistă problemele date la olimpiadă, * cu schițe de soluții și unele comentarii asupra lor.

3. **Prima lucrare scrisă** (timp de lucru 4 ore).

I. *Se cere să se determine cel mai mic număr natural n care are următoarele proprietăți:*

a) *numărul scris în sistemul zecimal se termină cu cifra 6;*

b) *dacă se suprimă ultima cifră și se scrie cifra 6 la începutul numărului se obține de patru ori numărul căutat. (R.P.P.).*

Soluția autorului problemei. Se scrie $n = 10x + 6$ și fie y numărul de cifre. Trebuie să avem

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x, \text{ adică}$$

$$13x = 2(10^{y-1} - 4) \qquad (1)$$

Trebuie cercetate numerele întregi 6, 96, 996, 9996,... care sînt de forma $10^{y-1}-4$ pentru a găsi pe primul dintre ele care este divizibil cu 13 Se găsește

$$99\,996 = 13 \cdot 7692$$

de unde $y = 5$, $x = 15\,384$ și numărul căutat $n = 153\,846$.

Unii dintre elevii noștri au folosit această cale. Alții însă au dat o soluție bazată pe un raționament strict aritmetic.

Anume notînd $n = a_p a_{p-1} \ldots a_1 6$ unde a_i reprezintă cifre ($a_0 = 6$), trebuie ca $4n = 6a_p a_{p-1} \ldots a_1$, de unde se deduce imediat că $a_1 = 4$; ($4.6 = 24$). Atunci $n = a_p a_{p-1} \ldots a_2 46$ și deci $4n = 6\, a_p a_{p-1} \ldots a_3 84$, de unde $a_2 = 8$. Prin urmare se pot obține succesiv cifrele numărului prin schema

$$\begin{array}{llll}
n = a_p\, a_{p-1} \ldots & a_1\, 6; & 4n = 4 \cdot a_p a_{p-1} \ldots a_1\, 6 = 6\, a_p \ldots a_2\, a_1 & ; \; a_1 = 4 \\
n = a_p\, a_{p-1} \ldots & 46; & 4 \cdot a_p\, a_{p-1} \ldots a_2\;\; 46 = 6\, a_p\, a_{p-1} \ldots a_2\, 4 & ; \; a_2 = 8 \\
n = a_p\, a_{p-1} \ldots & 846; & 4 \cdot a_p\, a_{p-1} \ldots a_3\; 846 = 6\, a_p \ldots a_3 \quad 84 & ; \; a_3 = 3 \\
n = a_p\, a_{p-1} \ldots & 3846; & 4 \cdot a_p \ldots a_4 \quad 3846 = 6\, a_p \ldots a_4 \quad 384 & ; \; a_4 = 5 \\
n = a_p\, a_{p-1} \ldots & 53846; & 4 \cdot a_p \ldots a_5\; 53846 = 6\, a_p \ldots a_5\; 5384 & ; \; a_5 = 1 \\
n = a_p\, a_{p-1} \ldots & 153846; & 4 \cdot a_p \ldots a_6 153846 = 6\, a_p \ldots a_6 15384 & ; \; a_6 = 6
\end{array}$$

Se observă că cifra care vine înaintea lui 1 este 6 și deci dacă luăm $p = 5$ avem $n = 153846$ și $4n = 615384$ și cum determinarea cifre-

---

* Enunțurile se găsesc și în *G.M.F.* seria *B* nr. 8.1962, pag. 502. Alte soluții sau generalizări primite de la colaboratori se vor publica în *G.M.F.-B.*

lor lui n s-a făcut succesiv, $p = 5$ reprezintă cea mai mică valoare a lui p care satisface condițiile enunțului.

La această problemă, șase dintre elevii noștri au obținut punctajul maxim (6), unul 4 puncte și unul zero puncte (nu a tratat deloc problema).

Unul din ei a dat o generalizare, iar altul a arătat, continuînd schema de mai sus, că forma generală a numerelor care se termină cu 6 și care prin mutarea cifrei 6 la început devin de 4 ori mai mare este

$$n = 153846153846153846 \ldots\ldots 153846.$$

II. *Să se determine toate valorile reale ale lui x care satisfac inegalitatea*

(R.P.U.)

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Soluție. De la început se observă că expresiile $(3-x)$ și $(x+1)$ nu pot fi negative deoarece radicalii ar da numere pur imaginare. Deci trebuie să avem

$$3 - x > 0; \qquad x + 1 \geqslant 0 \qquad \text{de unde} \quad -1 \leqslant x < 3 \tag{2}$$

Apoi neapărat $\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1}$ sau $3 - x > x + 1$, deci $x < 1$, care restrînge intervalul de la (2) la $-1 \leqslant x < 1$.

Cu aceste condiții se poate scrie

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}$$

care prin ridicare la pătrat dă $\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$. O nouă ridicare la patrat duce la inecuația

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0,$$

de unde

$x < \frac{8 - \sqrt{31}}{8}$ sau $x > \frac{8 + \sqrt{31}}{8} > 1$. Ținînd seama de intervalul $(-1 \leqslant x < 1)$ găsit mai sus, rezultă

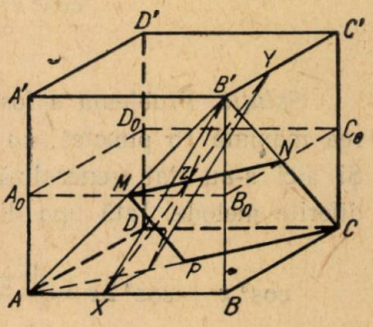
$$-1 \leqslant x < \frac{8 - \sqrt{31}}{8}.$$

Urmează apoi să se facă verificarea dacă valori din acest interval satisfac inecuația dată.

Din neatenție nici unul din elevii noștri nu a găsit corect intervalul și nici nu a făcut verificarea, din care cauză s-au scăzut puncte. În acest fel cinci dintre ei au obținut cîte 5 puncte, restul cîte 2—3 puncte.

III. *Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$, cu fețele $ABCD$, $A'B'C'D'$ și cu muchiile AA', BB', CC', DD' paralele. Punctul X parcurge cu o viteză constantă muchiile AB, BC, CD, DA, iar punctul Y parcurge cu aceiași viteză muchiile $B'C'$, $C'C$, CB, BB'. Punctele X și Y încep să se miște în același moment (X din A și Y din B'). Se cere să se determine locul geometric al mijlocului Z al segmentului XY și să se facă un desen.* (R.S.C.).

Soluție. Problema nu prezintă o dificultate deosebită, dar cere atenție la parcurgerea drumurilor lui X și Y. Fie A_0, B_0, C_0, D_0 mijloacele muchiilor AA', BB', CC', DD' și δ planul $(A_0B_0C_0D_0)$. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor A_0B_0, B_0C_0, AC și fie Z mijlocul segmentului XY.



a) Cînd X este în A și Y în B', mijlocul Z al lui XY coincide cu M; cînd X vine în B, iar Y în C', Z coincide cu N. Fie acum X pe AB și Y pe $B'C'$; este clar că mijlocul Z al lui XY este în planul δ. Luăm pe diagonala AC punctul E astfel ca XE să fie paralelă cu $B'Y$. Deoarece $AX=XE$ și $AX=B'Y$ rezultă că $XEYB'$ este dreptunghi (YB' perpendicular pe XB') și Z se află la mijlocul lui $B'E$. Se observă acum că dacă X descrie muchia AB, E descrie diagonala AC, iar *Z descrie segmentul MN care unește mijloacele laturilor $B'A$, $B'C$ din triunghiul $B'AC$.*

b) Cînd X și Y descriu respectiv muchiile BC și $C'C$ se vede imediat că Z descrie *segmentul NC.*

c) Cînd X și Y descriu respectiv CD și CB se observă tot așa de ușor că Z descrie segmentul CP.

d) în sfîrșit cînd X descrie muchia DA și Y muchia BB'. Se duce YF paralelă cu BC (F pe diagonala CB') și figura $AYFX$ este dreptunghi, de unde rezultă că Z, mijlocul lui XY este și mijlocul lui AF și deci cînd F descrie CB', *Z descrie segmentul PM.*

Figura $MNCP$ este un paralelogram cu toate laturile egale, deci un romb. Rezultă că locul geometric cerut este rombul $MNCP$.

Desigur că trebuie arătat apoi că reciproc orice punct al rombului aparține locului. De fapt este de ajuns să se arate pentru două laturi MN și NC, căci pentru celelalte se repetă raționamentele.

De pildă dacă se ia un punct Z pe MN, dreapta $B'Z$ dă punctul E din care rezultă X, iar XZ îl determină pe Y, astfel că $AX = B'Y$. Deci orice punct Z al segmentului MN este mijlocul unui segement XY din enunțul problemei. Pentru NC demonstrația este și mai simplă.

Trei dintre elevii noștri au obținut punctajul maxim (8 puncte) la această problemă.

Într-una din lucrări s-a dat o generalizare frumoasă pentru cazul cînd X și Y parcurg respectiv două poligoane în spațiu, cu anumite condiții pentru vitezele lui X, Y și de asemenea pentru poligoane.

Lipsa de atenție a dus însă uneori la scăderea de puncte, alteori chiar la rezultate greșite. De exemplu unul din elevi, după ce a găsit locul geometric, spune că trebuie demonstrată *și reciproca*, dar el demonstrează *teorema contrară*. Alții au afirmat că locul este un dreptunghi. În sfîrșt un elev a luat drept contur pentru Y, pătratul $A'B'C'D'$, ceea ce l-a făcut să găsească drept loc geometric pătratul $A_0B_0C_0D_0$.

4. **A doua lucrare scrisă** (timp de lucru 5 ore).

I. *Să se rezolve ecuația:*

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

(R.P.R)

Soluție. Problema a fost simplă și toți elevii noștri au obținut notarea maximă (5 puncte), cu excepția unuia singur care a avut 4 puncte. Și aici s-au dat generalizări. Pentru rezolvarea problemei s-au folosit diferite metode. Iată una din cele mai simple:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} = 1 + \cos x \cdot \cos 3x$$

Înlocuind în ecuația dată se obține

$$\cos x \cos 3x + \cos^2 3x = 0 \quad \text{sau} \quad 2 \cos x \cos 2x \cos 3x = 0$$

care se descompune în:

a) $\cos x = 0$; b) $\cos 2x = 0$; c) $\cos 3x = 0$, cu soluțiile

a) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$; b) $x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; c) $x = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$.

Însă soluțiile (a) sînt conținute în (c) pentru $k = 3k' + 1$, deci soluțiile distincte sînt

$$x_1 = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{și} \quad x_2 = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

II. *Se dă un cerc k și trei puncte diferite A, B, C pe acest cerc. Să se construiască un punct D pe cercul k astfel ca patrulaterul $ABCD$ să fie circumscris unui cerc (circumscriptibil).* (R.P.B.)

Soluție. Presupunem problema rezolvată, A, B, C punctele fixe, D punctul căutat și $BC > AB$. Patrulaterul $ABCD$ fiind înscris în cerc avem

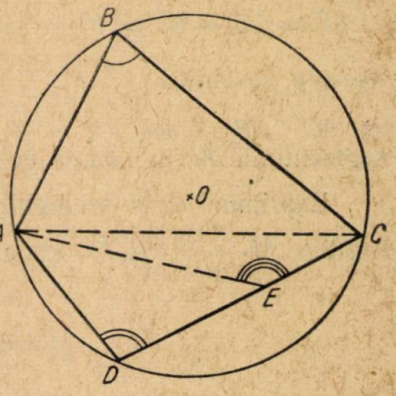
$$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$$

Același patrulater trebuie să fie circumscriptibil, deci trebuie să avem

$$AB + DC = AD + BC, \text{ sau}$$

$$DC - DA = BC - BA = l \text{ (cunoscut)}$$

Dacă luăm pe DC segmentul $DE = DA$, atunci $CE = l$, deci în triunghiul ACE avem cunoscute laturile AC și CE. Însă unghiul AEC se poate calcula astfel:



$$\sphericalangle AEC = 180° - \sphericalangle AED =$$

$$= 180° - \left(90° - \frac{D}{2}\right) = 90° + \frac{D}{2}.$$

Înlocuind pe $D = 180° - B$, se obține

$$\sphericalangle AEC = 180° - \frac{B}{2} > 90°.$$

Punctul E se poate construi deci: el se află la intersecția arcului de cerc ce trece prin A și C, capabil de unghiul $180° - \frac{B}{2}$ cu cercul de centru O și raza l.

Din cele două arce capabile de unghiul $180° - \frac{B}{2}$ se ia numai cel de partea opusă lui B față de dreapta AC, deci există *o singură soluție*.

Se va observa că în condițiile problemei arcul de cerc AEC se află în interiorul cercului (K) și deci punctul E este interior acestui cerc. Dreapta CE taie cercul dat (K) în D, al patrulea vîrf al patrulaterului căutat $ABCD$.

Aceasta a fost una din problemele care au pus în încurcătură elevii noștri. Nici unul nu a obținut punctajul maxim (7 puncte); patru au obținut 6 puncte și unul 5 puncte. Unii au dat o soluție în care au folosit faptul că $DC - DA = \text{const.}$, deci D se află pe o hiperbolă, dar nu au observat că $DC - DA > 0$, încît numai o ramură a hiperbolei trebuia considerată. De asemenea nu au observat că această ramură trece obligatoriu prin B, astfel că rămîne un singur punct D ca intersecție între cerc și ramura de hiperbolă. De aceea nu au tras concluzia că problema admite o singură soluție.

Faptul ne-a surprins fiindcă în general, elevii noștri sînt buni geometri și au lucrat multe probleme de acest fel.

III. *Se dă un triunghi isoscel. Cercul circumscris avînd raza r și cercul înscris raza ρ, se cere să se demonstreze că distanța centrelor acestor două cercuri este dată de formula*

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

(R.D.G.)

Soluție. Problema este de fapt o chestiune clasică, relația lui Euler, ce se cerea demonstrată în cazul particular al triunghiului isoscel. Fie ABC triunghiul isoscel cu baza $BC = a$ și $AB = AC = b$, O centrul cercului circumscris și I centrul cercului înscris.

Presupunem $a < b$, Avem $OA = r$, $IF = \rho$. Dacă E este mijlocul laturii AB, atunci $AE < AF$, deoarece $AE = \frac{b}{2}$, și

$$AF = AB - BF = b - \frac{a}{2}, \ (BF = BD) \text{ dar } \frac{b}{2} < b - \frac{a}{2} \text{ dacă } a < b.$$

Aceasta înseamnă

că $AO < AI$ și deci $OI = AI - r$. Toată problema se reduce la calculul segmentului AI în funcție de r și ρ.

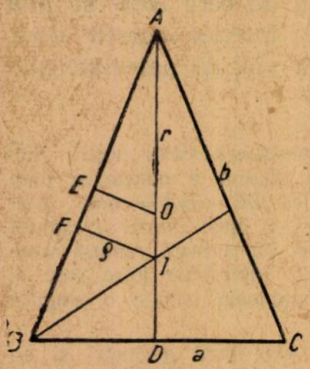
Exprimînd aria triunghiului ABI în două moduri diferite obținem imediat $AI \cdot \frac{a}{2} = b\,\rho$, de unde $AI = \frac{2b}{a}\,\rho$, deci

$$OI = d = \frac{2b}{a}\,\rho - r. \tag{3}$$

Din triunghiul AIF avem conform teoremei lui Pitagora

$$\frac{4b^2}{a^2}\,\rho^2 = \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \rho^2 \quad \text{de unde} \quad \rho = \frac{a}{2}\,\frac{2\,b-a}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

De altă parte din asemănarea triunghiurilor AOE și AIF rezultă



$$\frac{AI}{r} = \frac{\rho}{OE} = \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{2\rho}{\sqrt{4r^2 - b^2}}.$$

Înlocuind pe $AI = \frac{2b}{a}\,\rho$ se deduce $r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

Raportul dintre ρ și r ne dă

$$\frac{\rho}{r} = \frac{a(2b-a)}{2b^2} = \frac{a}{b} - \frac{a^2}{2b^2} \text{ sau } \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b} + 2\frac{\rho}{r} = 0$$

de unde se scoate

$$\frac{a}{b} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\rho}{r}}. \tag{4}$$

Această formulă atrage atenția dintr-o dată că este necesară o discuție, pe care o vom face mai tîrziu. Deocamdată în baza ipotezei inițiale trebuie să avem $\frac{a}{b} < 1$, deci vom lua

$$\frac{a}{b} = 1 - \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}} = \frac{\sqrt{r}-\sqrt{r-2\varrho}}{\sqrt{r}}, \quad \text{de unde}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}-\sqrt{r-2\varrho}} = \frac{r+\sqrt{r^2-2r\varrho}}{2\varrho}.$$

Înlocuind în (3) se obține

$$OI = d = \sqrt{r^2-2r\varrho}. \tag{5}$$

Discuție. Din (4) se observă că pentru ca să existe un triunghi isoscel cu laturile a și b trebuie ca $r \geqslant 2\varrho$. Cazul $r = 2\varrho$ ne conduce la triunghiul echilateral ($a=b$) unde $O \equiv I$. Excluzînd acest caz putem avea

I) $\frac{a}{b} < 1$ cînd $\sphericalangle A < 60°$, iar $OI = AI - r$;

este cazul studiat mai sus

II) $\frac{a}{b} > 1$ cînd $\sphericalangle A > 60°$ și $AO > AI$. Atunci $OI = r - AI$, iar în (4) se va lua semnul (+) plus.

În acest caz avem

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}+\sqrt{r-2\varrho}} = \frac{r-\sqrt{r^2-2r\varrho}}{2\varrho}$$

care înlocuit în $OI = r - AI$ ne conduce tot la relația (5).

Așadar relația (5) este valabilă pentru orice triunghi isoscel. (După cum se știe ea este adevărată pentru orice triunghi).

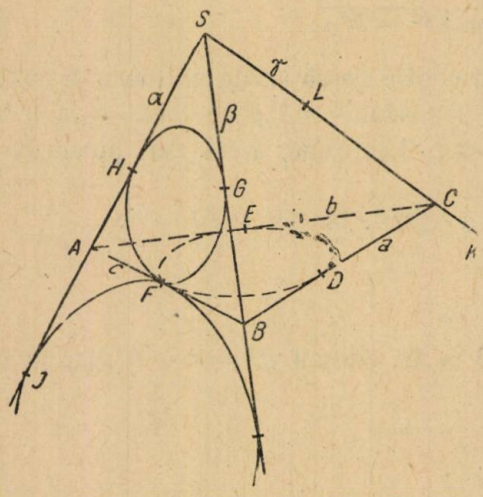
Această soluție are avantajul că relația (4) atrage imediat atenția asupra necesității unei discuții, deci a considerării cazurilor posibile.

Problema a fost rezolvată pe diferite căi de toți elevii noștri, cel puțin în unul din cazuri, dar numai trei au făcut discuția completă și au obținut punctajul maxim (6). Nici unul din ei nu a avut mai puțin de 4 puncte.

IV. *Se dă un tetraedru SABC, astfel că cinci sfere sînt tangente la toate cele șase drepte SA, SB, SC, AB, BC, CA. Atunci acest tetraedru este regulat. Invers, la orice tetraedru regulat există cinci sfere tangente la toate muchiile tetraedrului. Se cere să se demonstreze aceste două teoreme și să se facă un desen.* (U.R.S.S.).

Soluție. Problema fiind mai neobișnuită, a pus în încurcătură pe unii elevi, atît de la noi, cît și din alte țări.

Fie $SABC$ un tetraedru și să presupunem că există o sferă tangentă muchiilor AB, BC, CA. Planul (ABC) taie sfera după un cerc, evident tangent laturilor triunghiului ABC. Acesta poate fi cercul înscris sau unul din cercurile exînscrise triunghiului. Presupunem că este cazul cercului înscris și că punctele de contact sînt D, E, F. O sferă este definită de patru puncte nesituate în același plan. Dacă sfera este tangentă muchiei SB, în punctul G, interior ei, atunci punctele D, E, F, G definesc complet sfera. Ea nu este obligată să fie tangentă și celorlalte două muchii SA, SC. Dacă acest lucru se întîmplă, este clar că nu există decît o singură sferă tangentă tuturor muchiilor în interiorul lor. În acest caz însă trebuie ca $SH=SG=SL$; $AF=AE=AH$; $BD=BG=BF$; $CD=CE=CI$.



Dacă notăm $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$; $SA=\alpha$; $SB=\beta$; $SC=\gamma$ atunci rezultă imediat în baza egalităților precedente

$$\alpha+a=\beta+b=\gamma+c. \quad (6)$$

Se poate însă ca o sferă să conțină cercul DEF și să fie tangentă muchiei SB, în prelungirea ei, în punctul I. Atunci sfera este determinată de cele 4 puncte, D, E, F, I și nu este obligată să mai fie tangentă și la celelalte două muchii. Dacă acest lucru se întîmplă, atunci planul SAB taie sfera după cercul IFJ exînscris triunghiului SAB și va fi tangentă muchiei SC în K. O astfel de sferă are centrul în interiorul triedrului cu vîrful S. Deoarece tetraedrul are 4 triedre, numărul maxim de sfere de acest gen este patru. Adăogînd și sfera cu punctele de contact interioare muchiilor, sînt în total maximum 5 sfere care ar putea fi tangente tuturor muchiilor unui tetraedru.

Pentru sfera corespunzătoare triedrului cu vîrful S, avem

$$SI \quad SJ=SK;\ AE=AF=AJ;\ BD=BF=BI;\ CD=CE=CK,$$

Rezultă imediat

$$SA-SB=SJ-AF-(SI-BF)=BF-AF=BD-AE=BC-AC, \text{ deci}$$

$$\alpha-\beta=a-b \text{ sau } \alpha-a=\beta-b.$$

În mod analog pornind de la SB—SC se găsește că

$$\alpha-a=\beta-b=\gamma-c \quad (7)$$

Adunînd aceste egalități cu (6) se obține imediat

$$\alpha=\beta=\gamma \text{ și } a=b=c \quad (8)$$

Dacă se mai pune condiția să existe o a doua sferă de acest gen, corespunzătoare de exemplu vîrfului A, atunci se găsește în mod analog că trebuie să avem :

$$\alpha - a = b - \beta = c - \gamma \text{ sau ținînd seama de (8)}$$

$\alpha - a = a - \alpha$, de unde $\alpha = a$. Atunci $\alpha = \beta = \gamma = a = b = c$ și tetraedrul este regulat.

Reciproc, dacă tetraedrul este regulat se poate foarte ușor arăta că există o sferă de primul gen (tangentă muchiilor în interiorul lor) cu punctele de contact în mijloacele muchiilor și cu centrul în centrul tetraedrului. Este de ajuns să se arate că există și o sferă de al doilea gen, fiindcă atunci, din cauza simetriei figurii, există încă trei. Demonstrația se poate face ușor.

Dintre elevii noștri unul a obținut 7 puncte (maximum), doi au avut 6 puncte și doi 5 puncte, lucrările celorlalți, neprezentînd nici un interes.

6. Rezultatele obținute de echipa noastră sînt mai bune decît cele de anul trecut. Din discuțiile pe care le-am avut cu elevii, cît și din felul cum au prezentat lucrările am constatat că ei au citit cu atenție și articolul publicat în *G.M.F.* seria *B*, nr. 2 din 1962, cu privire la a III-a *O.I.M.* și au tras învățămintele necesare. În majoritatea lucrărilor a existat preocuparea de a demonstra și proprietatea reciprocă, s-au dat cîte două soluții diferite la aceeași problemă, s-au dat unele generalizări interesante etc. Chiar dacă comisia internațională nu a mai fost de părere anul acesta să se acorde puncte în plus pentru astfel de completări la soluția dată, delegația romînă a avut o deosebită satisfacție cînd s-a recunoscut în plenul comisiei și de către coordonatori și de către delegația cehă, că multe din lucrările elevilor romîni au avut asemenea studii suplimentare la tratarea problemelor.

De asemenea colegii cehi au făcut constatarea că echipa noastră a fost foarte omogenă întru cît toți cei 8 elevi s-au clasificat pînă la jumătatea numărului maxim de puncte (46—23 puncte).

Desigur unele deficiențe tot au mai existat. Astfel la problema a V-a nu au arătat că punctul E cade totdeauna în interiorul cercului și că există deci totdeauna o soluție a problemei și numai una, adică nu au discutat problema. De asemenea la problema a VI-a unii nu a considerat decît un singur caz de figură, deci nu au discutat dacă relația este generală sau nu.

Deficiența cea mai mare însă a fost *lipsa de atenție*. Din cauza aceasta s-a pierdut puncte la problemele a II-a, a III-a și a V-a. De exemplu nu se poate admite ca un elev bine pregătit, cînd scrie $DC - DA = BC - BA = \text{const}$, să nu observe imediat că punctul B aparține ramurii de hiperbolă, descrisă de D.

Mai trebuie lucrat cu elevii în sensul de a li se face educația atenției prin probleme a căror rezolvare nu este grea, dar cere o atenție mai deosebită.

Sperăm că progresul care s-a constatat efectiv anul acesta, să continue și să obținem rezultate și mai bune.

ELEVII PREMIAȚI LA CEA DE A IV-a O. I. M., 1962

Premiul I

1. *Bernstein Iosif* (U.R.S.S.) cu 46 puncte, 2. *Kery Gersson* (R.P.U.) cu 45 puncte, 3. *Gonciarova Lidia* (U.R.S.S.) cu 42 puncte, 4. *Sebestyen Zoltan* (R.P.U.) cu 41 puncte.

Premiul II

1. *Eckstein Gheorghe* (Timișoara, R.P.R.) cu 39 puncte, 2. *Kota Jozsef* (R.P.U.) cu 39 puncte, 3. *Kuczma Marcin* (R.P.P.) cu 39 puncte, 4. *Galfi Laszlo* (R.P.U.) cu 39 puncte, 5. *Buimovici Alexandru* (București, R.P.R.) cu 38 puncte, 6. *Szidarovsky Ferenc* (R.P.U.) cu 38 puncte, 7. *Bonev Boian Marinov* (R.P.B.) cu 37 puncte, 8. *Potepun Alecsei* (U.R.S.S.) cu 37 puncte, 9. *Margulis Grigori* (U.R.S.S.) cu 36 puncte, 10. *Hatala Peter* (R.S.C.) cu 35 puncte, 11. *Lustig Gheorghe* (Timișoara, R.P.R.) cu 35 puncte.

Premiul III

1. *Tetsch Karl Heinz* (R.D.G.) cu 34 puncte, 2. *Jezek Jaroslav* (R.S.C) cu 33 puncte, 3. *Tanușev Miroslav Svetloslavov* (R.P.B.) cu 33 puncte, 4. *Wolejsko Jacek* (R.P.P.) cu 33 puncte, 5. *Bădescu Lucian* (Cîmpulung Muscel, R.P.R.) cu 32 puncte, 6. *Benezur Andras* (R.P.U.) cu 32 puncte, 7. *Hănțilă Florea* (Brașov, R.P.R.) cu 32 puncte, 8. *Kațarov Bohidar Dimitrov* (R.P.B.) cu 32 puncte, 9. *Rempala Jan* (R.P.P.) cu 32 puncte, 10. *Simonovits Miclos* (R.P.U.) cu 32 puncte, 11. *Kuranov Ghenadin* (U.R.S.S.) cu 32 puncte, 12. *Danes Josef* (R.S.C.) cu 30 puncte, 13. *Hensz Ewa* (R.P.P.) cu 30 puncte, 14. *Mușțari Daniar* (U.R.S.S.) cu 30 puncte, 15. *Puha Radu* (Rădăuți, R.P.R.) cu 30 puncte, 16. *Vesely Karel* (R.S.C.) cu 29 puncte.

Pe echipe numărul cel mai mare de puncte l-au obținut : R.P.U. (289) ; U.R.S.S. (263) ; R.P.R. (257), însă o clasificare oficială a echipelor nu este încă prevăzută.

TUBURI ELECTRONICE

de *MIRCEA IANOVICI*, profesor, Carei

Principiul de construcție a tuburilor electronice

Metalele conțin mulți electroni semiliberi, care se află într-o continuă mișcare dezordonată, mișcare ce poate fi asemănată cu mișcarea unui roi de albine. În această mișcare electronii au o viteză de peste 100 km/s. Avînd o astfel de viteză, destul de mare, problema care se pune este, dacă electronii cu o astfel de viteză nu ar putea scăpa din metal.

Experiențele demonstrează că această viteză este insuficientă. Atunci, care este metoda pentru a face ca acești electroni semiliberi să scape din sfera le atracție a metalului ?

Se știe că teoria cinetico-moleculară ne arată că, viteza moleculelor crește o dată cu temperatura. Dacă am mări temperatura metalului, viteza de mișcare a electronilor ar crește și ar putea atinge valori pentru care ar putea să scape în spațiul înconjurător. Această viteză nu este însă

destul de mare, ea depinde de natura metalului. Viteza necesară trebuie să treacă cu mult peste 1000 km/s, însă pentru a obține această viteză este necesară o temperatură destul de mare, temperatură la care multe metale se topesc.

Edison, în 1883, obține pentru prima dată o emisiune de electroni prin intermediul energiei termice, folosind ca metal un metal greu fuzibil, inventînd pentru prima dată „tubul electronic" cu doi electrozi.

Emisiunea electronilor de către metale încălzite poartă numele de „emisie termoelectronică". Emisiunea termoelectronică poate fi asemănată cu evaporarea. Evaporarea la temperatură joasă este foarte înceată, o dată cu creșterea temperaturii viteza de evaporare crește.

Metalul, pentru a emite electroni trebuie încălzit, încălzire care se face cu ajutorul curentului electric. Metalul este de forma unui fir subțire numit filament și este greu fuzibil (tungsten, wolfram), Temperatura necesară trece de 2000°C și curentul folosit costă scump ; cu timpul s-au găsit căi de a micșora temperatura necesară emiterii electronilor de către metale.

Dacă metalele greu fuzibile se acoperă cu anumiți oxizi ai acestor metale se obține o emisie termolectronică la o temperatură cu mult sub 2000°C. Astfel de filamente poartă denumirea de „fifalemente activizate". La filamentele activizate nu este însă voie să depășim o anumită temperatură, deoarece stratul de oxid se evaporă și numai pot emite electroni.

Filamentul însă nu poate fi încălzit în aer pentru că el s-ar oxida și ar arde, de aceea este necesar ca filamentul să fie introdus într-un balon din care să fie scos aerul.

Rarefierea aerului trebuie să ajungă pînă la circa 10^{-7} tori.

Rarefierea aerului nu este necesară numai pentru a înlătura oxidarea filamentului, ci și pentru ca electronii să se poată mișca cît mai liber.

Rarefierea se face parțial cu ajutorul pompelor, de aici încolo se folosesc substanțe absorbante.

În tub se pulverizează fie pulbere de magneziu, bariu sau compuși de ai lor. Tubul este introdus apoi, într-o bobină străbătută de curenți de înaltă frecvență, substanța absorbantă ajunge la incandescență și se evaporă absorbind gazele din interior, depunîndu-se pe pereți, din care cauză tuburile au pereții argintii (pulbere de magneziu) sau lucie neagră (bariu).

Tubul cu doi electrozi. Dacă filamentul care emite electroni se găsește într-un balon cu aer rarefiat, electronii emiși vor forma în jurul filamentului un „nor electronic" care ar respinge alți electroni, ei căzînd înapoi pe filament, în felul acesta nu se poate produce o emisie electronică.

Pentru a obține o mișcare dirijată a electronilor se introduce în tub un cilindru metalic care înconjoară filamentul numit „anod" (fig. 1). Anodul se leagă cu polul pozitiv al unei baterii anodice (40—220 volți), iar filamentul la o baterie de încălzire de cîțiva volți. Electronii emiși, de filament vor fi atrași de anod, închizîndu-se circuitul ; curentul electric care trece prin tub se numește curent anodic, și va circula atîta timp cît filamentul va emite electroni. Viteza electronilor este de circa 10000 km/s. Acest tub cu doi electrozi poartă numele de *diodă* (fig. 2). Dioda, deoarece lasă să treacă curentul numai într-un singur sens se folosește ca

redresor de curent alternativ (diodă, valvă sau kenotron). Diodele se folosesc și pentru detecția semnalelor de radio.

Caracteristicile diodei. Emisiunea electronică cu cît va fi mai mare, cu atît și curentul anodic va fi mai mare. Emisiunea electronică depinde

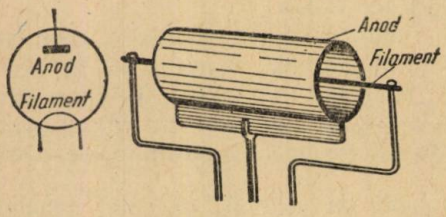


Fig. 1.

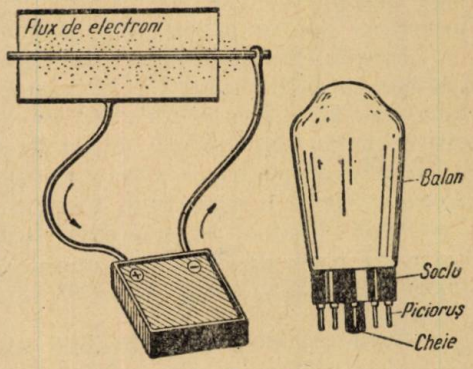


Fig. 2.

de temperatura filamentului și de tensiunea anodică. Curba care arată dependența curentului anodic I , de tensiunea anodică U_A, poartă numele de „caracteristica diodei".

Cînd tensiunea anodică este nulă, curentul anodic este și el nul, deoarece electronii nu sînt atrași de anod. O dată cu creșterea tensiunii crește și curentul anodic, la început încet, după aceea mai repede, iar la un moment dat la creșterea tensiunii, curentul anodic nu mai crește; în acest caz curentul anodic a ajuns la „saturație" (fig. 3). De asemenea curentul anodic crește o dată cu creșterea temperaturii filamentului (fig. 4) în acest caz crește și curentul de saturație.

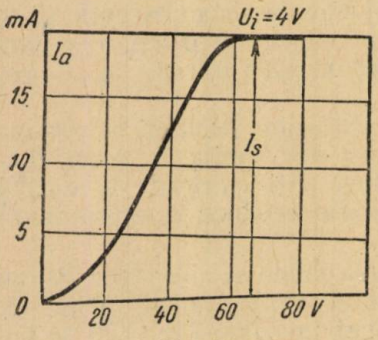


Fig. 3.

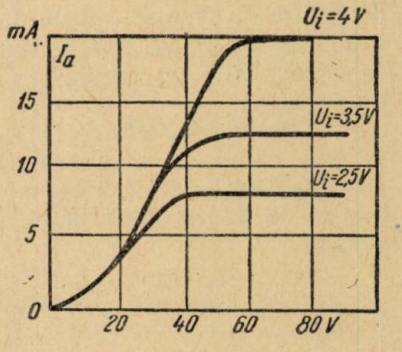


Fig. 4.

Tubul cu trei electrozi. Radiotehnica a luat o dezvoltare mare din momentul în care au apărut tuburile cu mai mulți electrozi.

Dacă la o diodă se intercalează între anod și catod un al treilea electrod „grila", care este o rețea din sîrmă sau o spirală care încon-

joară catodul, se obține tubul cu trei electrozi „trioda" (fig. 5). Grila dă tubului proprietăți foarte importante.

Acțiunea grilei este de a comanda fluxul de electroni. Dacă grilei nu-i aplicăm nici o tensiune, ea nu influențează fluxul de electroni; dacă

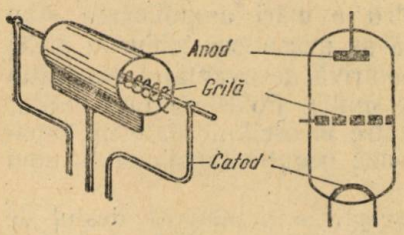


Fig. 5.

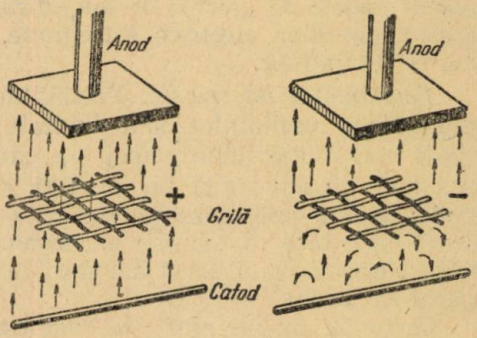


Fig. 6.

îi aplicăm o tensiune pozitivă, atunci curentul anodic crește; dacă i se aplică o tensiune negativă, atunci curentul anodic scade (fig. 6).

Caracteristica triodei. Variația curentului anodic în funcție de tensiunea aplicată grilei se numește „caracteristica triodei".

Dacă tensiunea de grilă este negativă, curentul anodic este blocat. Pe măsură ce reducem sarcina negativă curentul anodic crește la început mai încet, apoi mai repede. Cînd aplicăm o tensiune pozitivă grilei, curentul anodic crește. La o anumită tensiune pozitivă aplicată grilei, curentul anodic nu mai crește, ajungînd la valoarea maximă „curentul de saturație" (fig. 7).

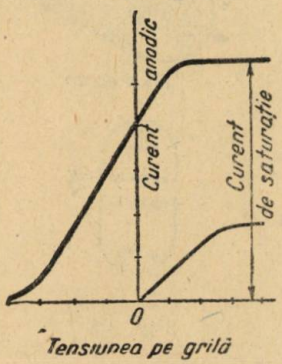


Fig. 7.

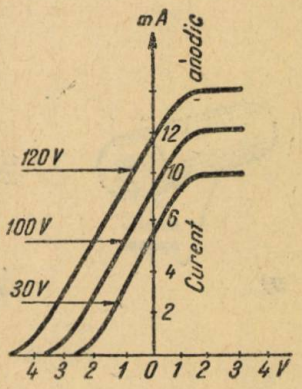


Fig. 8.

Dacă tensiunea anodică nu este constantă, atunci pentru fiecare tensiune de grilă, se obține cîte o curbă caracteristică (fig. 8).

Studiind familia caracteristicilor de grilă se constată că modificarea curentului anodic se poate face pe două căi: fie prin modificarea poten-

ţialului de grilă, fie prin acelui anodic. Variaţiile tensiunii de grilă influenţează însă mai intens fluxul electronic, decît variaţiile tensiunii anodice.

Numărul care arată de cîte ori variaţia tensiunii de grilă influenţează mai intens curentul anodic decît aceeaşi variaţie a tensiunii anodice poartă numele de „factor de amplificare". Trioda se foloseşte pentru obţinerea oscilaţiilor electrice întreţinute, pentru detectare şi pentru amplificarea oscilaţiilor.

Fenomentul de reacţie. Posibilităţile tubului cu trei electrozi privind amplificarea oscilaţiilor sînt limitate. Pentru a mări amplificarea s-au folosit mai multe tuburi, apoi s-a căutat să se micşoreze ochiurile grilei care însă nu aduc nici un avantaj, ci dimpotrivă dezavantajul (curentul anodic devine mic, curentul de grilă creşte mult). Folosirea mai multor tuburi însă, face ca tuburile electronice să intre în oscilaţie datorită capacităţii electrozilor şi acest fenomen influenţează negativ funcţionarea unui aparat de radio.

Grila şi anodul sînt doi conductori aşezaţi la o distanţă destul de apropiată. Datorită acestui fapt între ei există o anumită capacitate (fig. 9 a). Condensatorii conduc curentul alternativ şi în special cînd frecvenţa curentului este mai mare. Spaţiul anod-grilă poate fi parcurs de un curent alternativ, iar capacitatea dintre electrozi cuplează circuitul anodic cu cel de grilă. Tensiunile alternative din circuitul anodic influenţează circuitul de grilă şi creează în acest circuit o tensiune care acţionează asupra curentului anodic. Acest fenomen poartă numele de „reacţie" (fig. 9 b). „Reacţia este însă folosită pentru producerea curenţilor de înaltă frecvenţă la posturile de radio emisie.

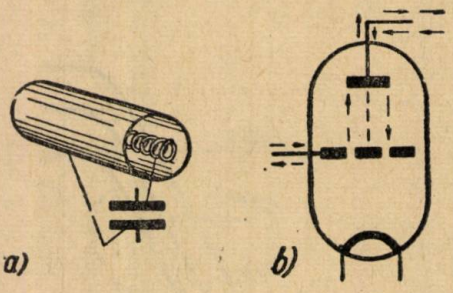


Fig 9

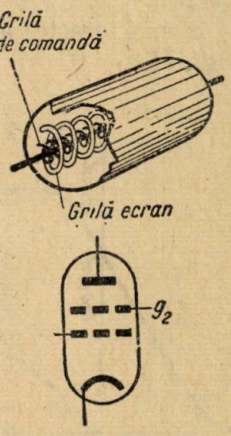


Fig. 10

Reacţia este folositoare numai acolo unde este necesară şi cînd valoarea ei poate fi reglată. Dacă reacţia are loc arbitrar ea împiedică funcţionarea în condiţii optime a unui aparat de radio. Capacităţile dintre eletcrozii triodelor favorizează apariţia acestui fenomen. Reacţia poate fi eliminată dacă între grilă şi anod se intercalează o grilă suplimentară care are rolul de a ecrana grila faţă de anod. Valoarea capacităţii anod-

grilă se reduce foarte mult. Această grilă se numește „grilă ecran". Un astfel de tub poartă numele de „tetrodă" (fig. 10). Grila ecran permite totodată să se mărească și factorul de amplificare. Totuși pe lîngă avantajele pe care le prezintă tuburile cu patru electrozi, ele au și un dezavantaj: prezintă *„efectul dinatronic"*. Viteza cu care ating electronii anodul este foarte mare, viteză de ordinul miilor de kilometri pe secundă,

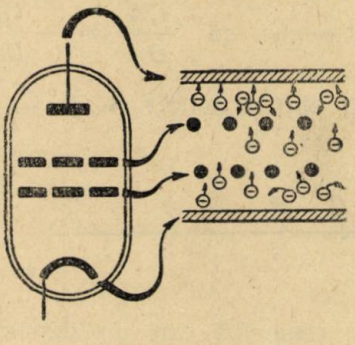


Fig. 11

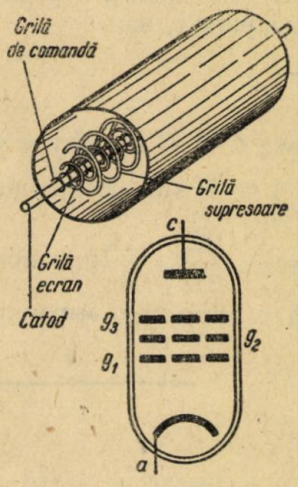


Fig. 12

fapt care face ca din suprafața anodului să fie eliminați electronii secundari care avînd o anumită viteză se deplasează la o anumită distanță de anod (fig. 11). Ei vor fi atrași de electrodul a cărui tensiune este mai mare. Dacă ei se deplasează înspre grila ecran atunci se va forma un curent al cărei sens este invers celui anodic, din această cauză curentul anodic scade. Acest fenomen se numește *„efect dinatronic"*, care micșorează posibilitatea de amplificare a acestor tuburi. Acest efect apare atunci, cînd tensiunea anodică este mai mică decît tensiunea grilei ecran, de obicei însă, tensiunea grilei ecran este mai mică, dar în timpul funcționării tubului se poate ajunge ca tensiunea anodică să fie mai mică.

Pentru a elimina efectul dinatronic între grila ecran și anod se intercalează o nouă grilă care se leagă cu catodul și are rolul de a elimina acțiunea grilei ecran asupra electronilor secundari. Această grilă se numește „grilă supresoare" sau antidinatronică. Un astfel de tub se numește „pentodă" (fig. 12). Factorul de amplificare al pentodelor este foarte mare, de ordinul miilor. În afară de tubul cu cinci electrozi se construiesc tuburi mult mai complicate, cu un număr mai mare de electrozi, îndeplinind de obicei, mai multe funcțiuni.

Dacă cunoaștem principiile de funcționare a tuburilor cu doi, trei, patru sau cinci electrozi, se poate înțelege funcționarea unui tub oricît de complicat ar fi, deoarece tuburile compuse pot fi întotdeauna împărțite în tuburi de tipul celor patru.

CITEVA NOȚIUNI DESPRE POLI, POLARĂ ȘI FIGURI POLARE RECIPROCE

de *VASILE TUȚURAȘ*, Satu Mare

a) *Diviziune armonică.* Reamintim că un segment AB este împărțit armonic de două puncte C și D cînd raportul distanțelor punctului C la A și B este egal în valoare absolută cu raportul distanțelor lui D la aceleași puncte, sau :

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \qquad (1)$$

Punctele C și D se numesc conjugate armonic în raport cu A și B. Reciproc, A și B sînt conjugate cu C și O pentru că $\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$ sau $\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD}$. In condițiile arătate, cele 4 puncte A, B, C, D formează o diviziune armonică.

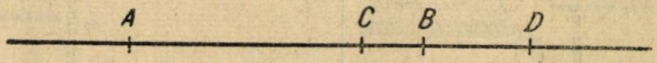


Fig. 1

Un exemplu de astfel de diviziune armonică este diviziunea armonică realizată de picioarele bisectoarelor unghiurilor interioare și exterioare față de baza unui triunghi.

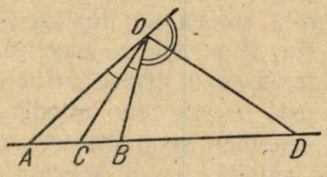


Fig. 2

Observația 1. Dacă se ia ca origină a segmentelor mijlocul O al segmentului de bază relația (1) ia o formă particulară. Să determinăm punctele A, B, C, D prin abscisele lor raportate la originea O.

Putem scrie : $CA = OA - OC$; $CB = OB - OC$ și $DA = OA - OD$, $DB = OB - OD$.

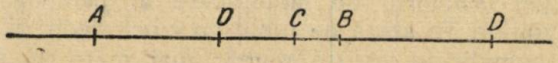


Fig. 3

Inlocuind în (1) avem :

$$\frac{OA - OC}{OB - OC} = -\frac{OA - OD}{OB - OD}$$

sau: $(OA-OC)\ (OB-OD) = -(OB-OC)\ (OA-OD)$,
putem apoi scrie:

$$OA\cdot OB - OA\cdot OD - OC\cdot OB + OC\cdot OD = -OB\cdot OA + OB\cdot OD + OC\cdot OA - OC\cdot OD,$$

dacă înlocuim pe OB cu $-OA$ și schimbăm semnul ajungem la relație

$$OA^2 = OC\cdot OD \qquad (2)$$

Deci, jumătatea unui segment de dreaptă este medie proporțională între distațele de la mijlocul acestui segment la două puncte care îl împart armonic.

b) *Fascicol armonic.* Se numește fascicol armonic ansamblul a patru drepte care trec printr-un același punct O și prin patru puncte A, B, C, D care formează o diviziune armonică. O este centrul fascicolului iar OA, OB, OC, OD se numesc raze.

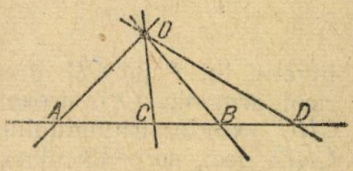


Fig. 4

Razele OC și OD se numesc conjugate armonic în raport cu OA și OB și invers. Se mai zice că OC și OD împart armonic unghiul OAB la fel OA și OB pe COD. Se poate arăta ușor că razele unui fascicol armonic împart armonic orice transversală.

c) *Pol și polară.* a) Polara față de un unghi. Dacă dintr-un punct A din planul unghiului xOy se duce după voie, o secantă AMN și pe MN se determină conjugatul P al punctului A în raport cu M și N, locul geometric al punctului P este o dreaptă Oz ce trece prin O. Într-adevăr, dreptele ce unesc pe O cu A, M, N, P formează un fascicol armonic. Deci, putem spune că orice secantă $AM'N'$ dusă din A va fi împărțită armonic de acest fascicol și conjugatul P' al lui A față de $M'N'$ se va găsi pe Oz.

Dreapta (Oz) se numește polara punctului A în raport cu unghiul xOy; punctul A se numește polul lui Oz.

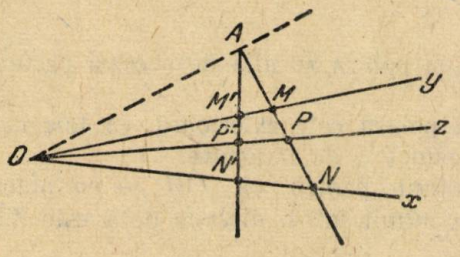


Fig. 5

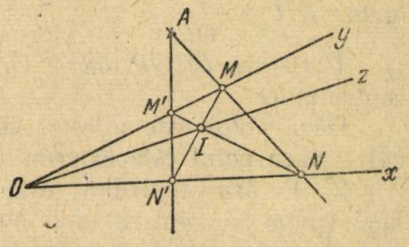


Fig. 6

Corolar. Dacă dintr-un punct A așezat în planul unghiului xOy ducem 2 secante AMN, $AM'N$, locul geometric al punctului de intersecție I al dreptelor MN' și $M'N$ este polara punctului A adică Oz. Avem astfel indicat un fel de a construi polara cu rigla.

d) Dacă printr-un punct P luat în planul unui cerc ducem o secantă oarecare PCO locul geometric al conjugatului armonic al punctului P în raport cu C și O este o perpendiculară a diametrului ce trece prin P.

Se observă că și conjugatul armonic al lui P față de A și B este determinat prin întîlnirea dreptei AB cu dreapta ce unește simetricul C' al punctului C față de AB, cu punctul D. Pe de altă parte, M fiind con-

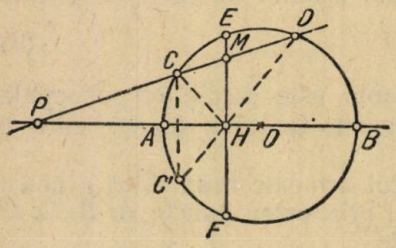


Fig. 7

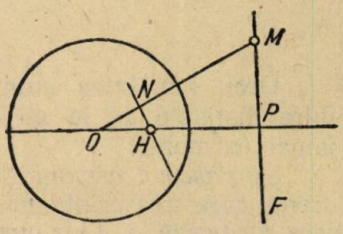


Fig. 8

jugatul lui P pe CD, dreptele HC și HD; HP și HM formează un fascicol armonic. Ori, dreapta HP este bisectoarea interioară a unghiului CHC' exterior triunghiului CHD și HM este bisectoarea unghiului interior CHD. deci, perpendiculară pe PAB; putem atunci zice că punctul M este determinat.

Același raționament putem face și cînd punctul P este interior cercului. Dreapta HM poartă numele de *polara punctului* P în raport cu cercul și punctul P se numește polul lui HM.

Consecințe: Polara este perpendiculara diametrului care trece prin pol.

— Polara unui punct exterior circumferinței se confundă cu coarda ce unește punctele de contact ale tangentelor duse din acel punct la cerc.

— Raza cercului este medie proporțională între distanțele de la centru, la pol și la polară (relația 2).

Punctul H fiind conjugatul armonic al lui P față de A și B, iar O fiind mijlocul lui AB avem: $OA^2 = OP \cdot OH$ sau: $R^2 = OP \cdot OH$, de unde: $OH = \frac{R^2}{OP}$.

1° Pentru că OP, $OH > O$, polul și polara se află de aceeași parte a centrului O.

Dacă polul este interior cercului polara este exterioară, ea taie cercul — dacă polul este exterior — în punctele de tangență.

2° Polara centrului este la infinit pentru că $OH \to \infty$ putem apoi spune că: polara unui punct la infinit într-o direcție dată este diametrul perpendicular acestei direcții.

3° Polara unui punct de pe cerc este tangenta în acel punct.

Teoremă. Polarele tuturor punctelor unei drepte trec prin polul acestei drepte și reciproc, polii tuturor dreptelor ce trec printr-un punct fix se găsesc pe polara acestui punct.

Fie o dreaptă EF al cărei pol este H. Să luăm pe EF un punct oarecare M și să arătăm că polara lui M trece prin H (polul lui EF). Pentru

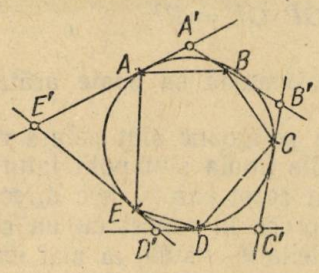


Fig. 9

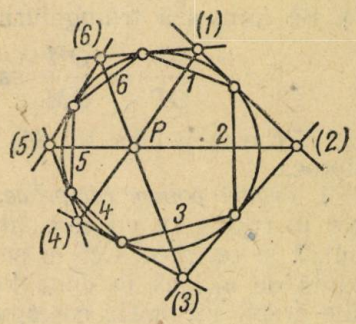


Fig. 11

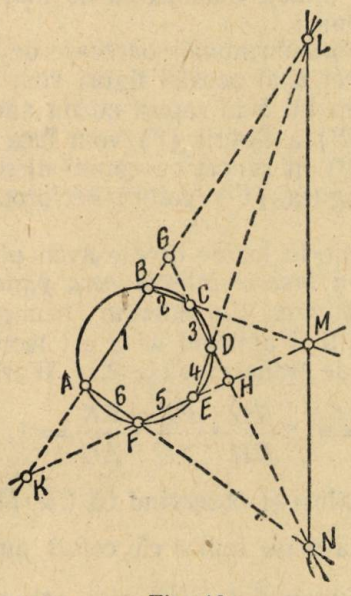


Fig. 10

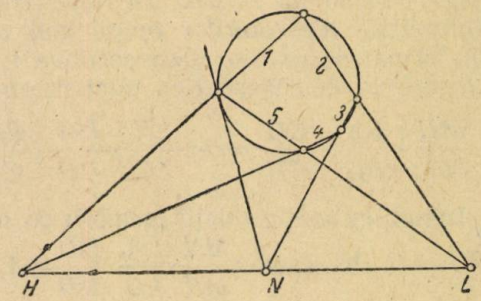


Fig. 12

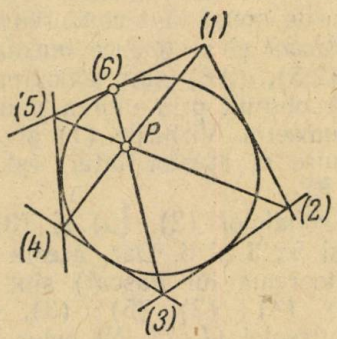


Fig. 13

aceasta ducem perpendicularele HM și OP pe cele două drepte (OM și EF). Se formează triunghiurile asemenea ONH și OPM. Avem

$$\frac{ON}{OP}=\frac{OH}{OM} \text{ sau: } ON\cdot OM=OP\cdot OH=R^2$$

deci, HN este polara lui M. Folosind aceiași metodă se poate arăta și reciproca.

2. *Figuri polare reciproce.* Zicem că două poligoane sînt polare reciproce în raport cu un cerc, atunci cînd vîrfurile unuia sînt polii laturilor celuilalt și reciproc. Cercul se mai numește în acest caz și cerc director. Rezultă de aici că în două figuri polare reciproce în raport cu un cerc, liniile drepte ale uneia corespund punctelor celeilalte. Astfel, la mai multe puncte în linie dreaptă ale uneia din figuri corespund în cealaltă un număr egal de drepte care se taie în același punct. Concluziile de mai sus ne permit să trecem la o generalizare anume:

Fie o figură (F) formată de exemplu, dintr-un număr oarecare de segmente de dreaptă și de puncte, fiecărui punct a al acestei figuri vom face să-i corespundă o dreaptă (A) anume, polara lui a în raport cu un anumit cerc ales, cercul director. Fiecărei drepte (B) a figurii (F) vom face să-i corespundă un punct b, anume polul lui (B) în raport cu cercul director. Dreptele A și punctele b vor constitui figura (F') polara reciprocă a lui (F).

Problema se poate extinde în spațiu unde în loc de drepte avem plane.

f) *Teorema lui Pascal. În orice exagon înscris într-un cerc punctele de intersecție ale laturilor opuse sînt colineare.* Considerăm triunghiul HGK format de laturile neconsecutive 1, 3, 5 și aplicînd de 3 ori teorema lui *Menelaus*, considerînd ca tăiat pe rînd de transversalele 2, 4, 6 avem:

$$\frac{MH}{MK}\cdot\frac{BK}{BG}\cdot\frac{CG}{CH}=1;\ \frac{LK}{LG}\cdot\frac{DG}{DH}\cdot\frac{EH}{EK}=1;\ \frac{NG}{NH}\cdot\frac{FH}{FK}\cdot\frac{AK}{AG}=1.$$

Înmulțim aceste relații membru cu membru și observînd că $CG\cdot DG=$ $=BG\cdot AG$ etc., avem: $\frac{MN}{MK}\cdot\frac{LK}{LG}\cdot\frac{NG}{NH}=1$, care ne indică că cele 3 puncte K, M, N luate pe prelungirile laturilor triunghiului GHK sînt colineare.

Teorema lui Brianchon. În orice exagon circumscris unui cerc diagonalele care unesc vîrfurile opuse sînt concurente. Această teoremă este corelativă teoremei lui *Pascal* și se deduce imediat din aceasta.

Diagonalele (1;4), (2;5), (3;6) sînt concurente în P. Poligonul cu laturile (1, 2, 3, 4, 5, 6) obținut prin unirea punctelor de tangență este polar reciproc celui circumscris. Vîrfurile (1) și (4) fiind polii laturilor 1 și 4, punctul de întîlnire al acestor laturi este polul diagonalei (1), (4) (teorema de la fig. 8).

Tot astfel, polii diagonalelor (2), (5) și (3) (6) sînt punctele de întîlnire ale laturilor 2 și 5; 3 și 6. Dar, aceste trei puncte de întîlnire (de felul L, M, N din teorema lui Pascal) sînt în linie dreaptă; prin urmare, polarele lor (1), (4); (2), (5); (3), (6) se taie în același punct P, care este polul dreptei (L, M, N) celor trei puncte de întîlnire.

Observații. Teorema lui *Pascal* există oricare ar fi lungimile laturilor. Ea este adevărată și cînd două vîrfuri se confundă în unul singur. Atunci

dreapta care le unește devine tangentă. La fel și în cazul lui *Brianchon*. În acest mod exagoanele devin pentagoane. Procedînd în felul acesta în continuare vom găsi un patrulater înscris, apoi un triunghi. Astfel, 1 și 4; 2 și 5; 3 și 6 (tangenta) sînt colineare.

Teorema corelativă: În pentagonul oarecare circumscris diagonalele (1), (4) și (2), (5) și (3), (6) sînt concurente în *P*.

În orice triunghi înscris laturile întîlnesc tangentele vîrfurilor opuse în trei puncte colineare sau: În orice triunghi circumscris dreptele care unesc punctele de contact ale laturilor opuse se întîlnesc în același punct.

EXPERIENȚE SIMPLE CU AJUTORUL TUBULUI ELECTRONIC, FOTOCELULEI ELECTRICE ȘI AL LĂMPII CU NEON

de *CZIMBALMOS LADISLAU* și *KIRNER PAUL*, Baia Mare

Uriașa dezvoltare a radiotehnicii și a electrotehnicii care a avut loc în ultimele decenii ale secolului nostru, cere de la fiecare om cult să cunoască și practic funcționarea tubului electronic. Pentru acest motiv s-au introdus în ultimul an în școala medie cunoștințe despre tuburile eletcronice. Se pune astfel problema ca realizarea experiențelor celor mai simple, dar importante, să fie posibile și ușor de efectuat în laboratoarele școlilor mai puțin dotate (sau chiar de către elevi pe cont propriu).

Pentru executarea experiențelor avem nevoie de un tub electronic de orice fabricație cu singura condiție ca filamentul să fie bun. Un astfel de tub se poate procura ușor de la orice atelier de reparații radio unde se schimbă tuburi uzate (cu putere micșorată dar totuși în stare de funcționare) cu tuburi noi. Un astfel de tub parțial uzat poate fi folosit dînd rezultate satisfăcătoare în laboratorul școlar.

Pentru trasarea caracteristicilor unui tub electronic avem nevoie de următoarele aparate de măsură:

1. Un ampermetru pentru măsurarea curentului de încălzire cu domeniul de măsurare pînă la 1A.
2. Un miliampermetru cu domeniul de măsurare 5mA — 50mA — 500 mA.
3. Un voltmetru cu domeniul de măsurarea tensiunii anodice, tensiunii curentului de încălzire și pentru măsurarea tensiunii în circuitul grilei.
4. Un potențiometru.
5. O baterie anodică și o baterie de buzunar sau acumulator.

Scopul articolului de față este ca și fără aceste aparate de măsură să studiem și să dovedim proprietățile cele mai importante ale tubului electronic.

În lipsa aparatelor necesare nu putem vorbi despre măsurători. În locul experiențelor cantitative vom face experiențe calitative. Avem nevoie, în acest sens, de un indicator de curent care funcționează la tensiunea de 220V, atît la curent alternativ cît și la curent continuu. Indicatorul de curent trebuie să ne permită distingerea curentului alternativ de cel continuu, dar cea mai importantă condiție din punctul nostru de vedere este ca el să poată fi ușor procurat din orice oraș al țării. Tuturor acestor

cerințe le răspunde lampa cu neon de fabricație M.G.I. Electrofar. Lampa cu neon de tipul N-25 are putere de 2 W.

Lampa cu neon deși dă lumină roșie se deosebește prin construcție de becul cu incandescență. În timp ce la acesta din urmă lumina e dată prin încălzirea filamentului, în lampă cu neon sînt electrozi, dar aceștia nu sînt legați între ei printr-un conductor metalic și nici nu luminează electrozii, ci gazul care se află între ei, atunci cînd este ionizat. Construcția lămpii cu neon este foarte simplă constînd dintr-un balon umplut cu gaz (neon) în care sînt introduse două plăci conductoare. Lampa cu neon are o proprietate specifică și anume, se aprinde numai la o anumită tensiune. Tensiunea de aprindere variază după tipul lămpii. Cele mai frecvente valori variază între 75—80 volți. La tensiune mai mică decît tensiunea de aprindere lampa nu se aprinde, în cazul acesta rezistența lămpii este practic infinit. După aprindere se comportă în așa fel, parcă electrozii ar fi legați între ei cu un conductor. În aceste condiții rezistența lămpii variază foarte mult. Rezistența lămpii după aprindere devine foarte mică și dacă nu limităm intensitatea curentului care trece prin lampă, același fenomen îl observăm și la scurt-circuit (se arde siguranța, se topesc contactele lămpii de neon sau crapă balonul de sticlă). Pentru aceasta se folosește o rezistență suplimentară. În unele cazuri rezistențele suplimentare sînt montate în duliile lămpilor. În lămpile N-25 rezistența suplimentară nu este montată în dulie. Pentru aceasta la folosirea lămpilor trebuie legat în serie rezistența de 20 k Ω la 120 V și 40 k Ω la 220 V. Sensibilitatea de curent a lămpii cu neon este foarte mare. Cu ajutorul lămpii cu neon se poate observa și curent, de ordinul fracțiunilor de miliamperi. Un mare avantaj al acestei lămpi este că electrozii se pot deosebi foarte ușor unii de alții ; unul în forma de inel și celălalt cu suprafață circulară.

Lampa cu neon o dată procurată, devine neînlocuită în laboratoare și în săli de lucru, deoarece cu aceasta se pot face foarte multe experiențe frumoase și interesante.

1. *Recunoașterea tipului curenților.* Polul sursei se leagă prin rezistența suplimentară cu lampa cu neon. În cazul curentului continuu numai gazul din jurul catodului ilumineză. La curentul alternativ vedem că ilumineză electrozii, cu toate că și aici numai stratul de gaz din jurul catodului luminează, electrozii însă se schimbă de 50 de ori pe secundă. Această schimbare rapidă însă nu o putem urmări cu ochiul liber, din această cauză amîndoi electrozii îi vedem în iluminație mijlocie (fig. 1).

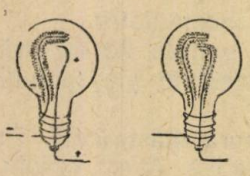


Fig. 1

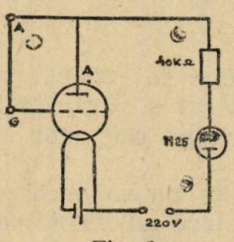


Fig. 2

2. *Deosebirea între o fază și nul.* Unul din polii prizei îl legăm în serie printr-o rezistență suplimentară cu unul din polii lămpii cu neon. Celălalt pol al lămpii cu neon îl atingem de mai multe ori cu degetul. Dacă lampa cu neon în momentul atingerii se aprinde am găsit faza. În caz contrar avem de-a face cu conductorul nul.

3. *Funcționarea diodei.* Trioda o putem modifica în diodă astfel: legăm grila cu anodul. Ca tensiune anodică putem folosi tensiunea alternativă de 220 V. În circuitul anodic al diodei legăm lampa cu neon cu rezistența suplimentară (fig. 2).

Dacă încălzim catodul pînă la incandescență lampa cu neon arată curent continuu. Deci dioda se poate folosi pentru redresarea curentului alternativ. Aceasta este cea mai importantă întrebuințare practică a diodei.

Dacă avem o baterie anodică de 120—150 V, atunci ne putem convinge ușor că dioda are un efect de supapă. Dacă sensul curentului tehnic este dinspre anod spre catod lampa cu neon indică curent. Prin schimbarea polilor lampa cu neon nu se aprinde; curentul anodic este nul deși are curent la filament și tensiune anodică, dar dioda în acest sens nu conduce curentul.

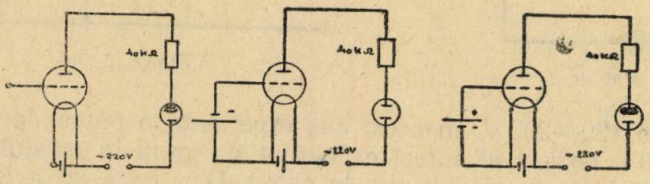


Fig. 3

4. *Funcționarea triodei.* Dacă desființăm legătura între grilă și anod avem trioda pentru experiență. Lumina slabă a lămpii cu neon ne arată micșorarea curentului anodic. În triodă, din cauza grilei, anodul se depărtează de catod. Din cauza aceasta rezistența internă a tubului crește, ceea ce ne arată micșorarea curentului anodic. Dacă grila nu primește sarcină, trioda redresează la fel ca și dioda.

Dacă legăm grila cu polul negativ al unei baterii de buzunar și catodul de polul pozitiv curentul anodic, va fi nul, adică dacă tensiunea la grilă este —4,5 V, tubul este închis. Schimbăm acuma polii astfel încît grila să primească o tensiune de +4,5 V. Lampa cu neon în acest caz luminează mult mai viu decît în cazul cînd grila nu primește tensiune (fig. 3).

În felul acesta am arătat că, cu ajutorul tensiunii grilei putem influența intensitatea curentului anodic. O altă aplicație a triodei este de a produce oscilații neamortizate. Demonstrarea acestei funcții este o problemă mai grea. Pentru aceasta vom reveni în alt număr.

5. *Executarea experiențelor.* Executarea practică a acestor experiențe este foarte simplă. Tubul electronic și lampa cu neon se fixează pe o placă verticală ca în fig. 4. Dacă e posibil, placa să fie confecționată dintr-un material izolant. Dacă nu este altă posibilitate, putem fixa și pe o placă din lemn, dacă este uscată. În acest caz conductorii aflați sub tensiune trebuie izolați separat. În timpul experienței trebuie să fim foarte atenți și să nu atingem conductorii aflați sub tensiune. Înainte de oricare modificări să întrerupem circuitul, să folosim conductori bine izolați.

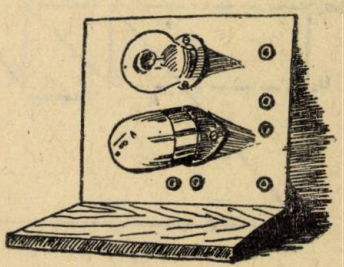


Fig. 4

6. *Funcționarea fotocelulei electrice.* Fotocelula, în zilele noastre, este foarte răspîndită și se găsește la orice întreprindere cinematografică. În afară de aceasta, în multe cazuri, se folosește ca releu fotoelectric. Principiul de funcționare al fotocelulei electrice îl putem arăta foarte ușor, cu ajutorul lămpii cu neon. Curentul care trece prin fotocelulă electrică este foarte mic, dar este suficient pentru aprinderea unei lămpi cu neon.

Fotocelula electrică o legăm în serie cu rezistență suplimentară și cu lampa cu neon (fig. 5). Dacă avem la dispoziție o baterie anodică cu

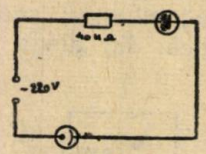


Fig. 5

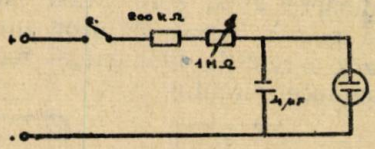


Fig. 6

o tensiune de 120—200 V, în acest caz experiența o putem face cu curent continuu. Polul pozitiv al sursei de curent îl legăm la anodul fotocelulei, și polul negativ al sursei îl legăm la catod. Dar, dacă nu avem o baterie anodică, experiența o putem face și cu curent alternativ. În acest caz polii îi putem lega după plac. Dacă în sală e întuneric, prin fotocelulă nu trece curent și nu se aprinde nici lampa cu neon. Dar, dacă în fața fotocelulei ținem un chibrit aprins, gazul din jurul catodului lămpii cu neon va lumina, ceea ce înseamnă că fotocelula electrică, sub influența luminii, conduce curentul. Dacă experiența o executăm cu ajutorul curentului alternativ, și în acest caz gazul luminează însă numai în jurul unui electrod al lămpii cu neon. Aceasta înseamnă că fotocelula electrică, în același timp și redresează curentul alternativ, ceea ce reiese din principiul de funcționare.

Fotocelula electrică se poate procura de la intreprinderi cinematografice unde fotocelulele uzate 50% se scot din funcționare. O astfel de fotocelulă corespunde perfect pentru a executa experiența calitativă. Înainte de a începe experiența, trebuie să cunoaștem tensiunea de lucru a fotocelulei, deoarece o tensiune mult mai mare distruge fotocelula.

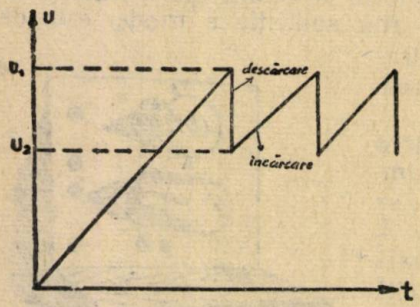


Fig. 7

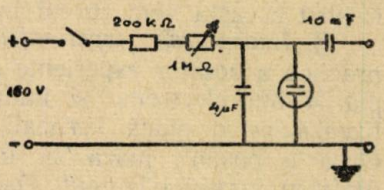


Fig. 8

7. *Oscilator cu ajutorul lămpii cu neon.* Lampa cu neon o putem folosi pentru producerea oscilațiilor de felul dinților de fierăstrău. Producerea vibrațiilor se bazează pe acea proprietate a lămpii cu neon, că tensiunea de stingere este mai mică decît tensiunea de aprindere.

Condensatorul se încarcă prin rezistență, iar cînd tensiunea la bornele condensatorului atinge tensiunea de aprindere a lămpii cu neon, ea se aprinde și tensiunea scade brusc pînă la tensiunea de stingere (fig. 6, 7).

Frecvența oscilațiilor se poate regla cu ajutorul tensiunii de alimentare, cu valoarea rezistenței și cu capacitatea condensatorului. Frecvența oscilațiilor crește o dată cu creșterea tensiunii de alimentare și cu micșorarea rezistenței, deoarece încărcarea conductorului se face mai repede și se micșorează cu creșterea capacității condensatorului întrucît astfel crește timpul încărcării și descărcării.

Astfel se produc oscilații de forma dinților de ferăstrău. Natural că aceasta se poate vedea numai cu ajutorul oscilografului catodic. Însă cu ochiul liber se poate observa aprinderea și stingerea periodică a lămpii cu neon.

Oscilațiile produse pot fi auzite dacă printr-un condensator de 10 000 pF facem legătura la picupul unui aparat de radio. Astfel vom auzi pocnituri în ritm periodic. Această instalație o putem folosi în loc de metronom, bătăile putînd fi reglate cu ajutorul potențiometrului (fig. 8).

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

CU MIJLOACE PROPRII NE PUTEM CONSTRUI UN APARAT DE MĂRIT PENTRU CERCUL FOTO

de *IOSIF NAGY*, Negrești-Oaș

Prețul ridicat al aparatelor de mărit precum și necesitatea, determinată de ridicarea nivelului cultural al elevilor noștri prin cît mai variate mijloace, face ca să ne îndreptăm gîndurile către cercetarea și folosirea la maximum a mijloacelor ce le avem în laboratoarele noastre, făcînd economii și totuși, procurîndu-ne ce ne lipsește.

În cadrul Cercului de fizică din școala noastră am făcut impracticabile aparatele ce pot fi folosite și în alte scopuri.

Materialul necesar: a. lentila obiectiv: se va folosi lentila obiectiv de la epidiascopul „Lumina", împreună cu portobiectivul (1) (v. fig. 1).

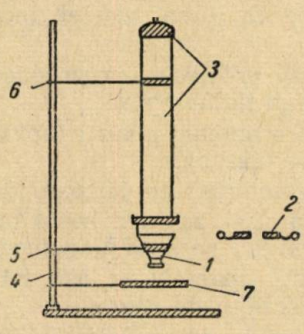


Fig. 1

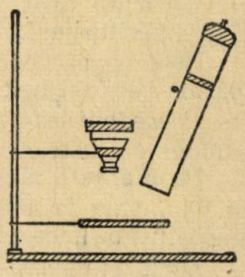


Fig. 2

b. portfimul (2) se va folosi tot de la aparatul mai sus menționat, dar se va demonta geamul metalic, pentru a permite proiectarea filmelor care depășesc dimensiunile de 20×26 mm.

c. izvorul de lumină: se va lua de la bancul optic I.M.D. împreună cu lentila convergentă, care va avea rolul condensatorului (3). Becul găsit în tub (3) are puterea de 30 W (6 v; 5 A), care trebuie alimentat de la

redresorul cu seleniu de 15 V. Alimentarea se va face cu curent alternativ de 6 V.

Ca sursă de curent se poate folosi și transformatorul școlar întrebuințînd bornele bobinei secundare de 8 V și un reostat cu cursor de 24 Ω, 5 A. În caz de lipsa acestor piese ca sursă de lumină putem folosi și un bec electric de 6 W, 220 V găsite în comerț de tip Tungsram — Superba — bec mat.

În acest caz se va scurta timpul de expunere. În cazul becului de 60 W dimensiunile coincid aproximativ cu cele de 30 W, 6 V. Folosind un bec de 60 W, 220 V se poate alimenta de la rețea electrică printr-un întrerupător.

d. un stativ cu inel și cleme (4).

e. rama de mărit. (7).

Construcția aparatului. Prin rotirea portobiectivului (1) se poate demonta de pe suportul condensorului aparatului epi-diascop. După demontare (deșurubare) îl introducem într-un inel (5) inițial fixat pe stativ (4). Diametrul inelului nu va depăși diagonala patratului portobiectivului. Cu ajutorul clemei (6) se poate fixa tubul cu sursa de lumină cu lentila convergentă existentă în tub — condensorul.

Rezultatele bune se pot obține și atunci cînd între tubul (3) și portobiectivul (1) se va pune o sticlă mată în loc de condensor.

Performanța aparatului crește considerabil, dacă vom folosi drept condensor, tocmai condensorul epidiascopului și o sticlă mată deasupra lui.

Funcționarea aparatului de mărit. Piesele se vor monta în ordinea arătată mai sus: Vom așeza o hîrtie albă pe placa de bază, în rama de mărit care poate să fie fixată pe un alt inel (7), aflat sub inelul cu portobiectivul (5). Introducînd filmul (negativul) în portfilm, vom realiza „punerea la punct", a aparatului, prin înșurubarea sau deșurubarea obiectivului sau prin ridicarea respectiv coborîrea platformei cu hîrtie albă (rama de mărit). (7), în care introducem după punerea la punct hîrtia fotosensibilă.

De aici înainte se va lucra cum se lucrează cu un aparat de mărit obișnuit.

Cu acest aparat se pot face și reproduceri de pe suprafața documentelor, tipăriturilor, fotografiilor etc.

Este un procedeu economic pentru faptul că ne scutește de a procura aparate sau dispozitive speciale.

Procedeul este următorul: În lăcașul filmului — portfilm — se pune o imagine foarte clară și se aprinde becul lanternei.

Pe planșeta aparatului se pune documentul ce urmează a fi reprodus. Se va „pune la punct" aparatul în așa fel ca mărimea imaginii să fie egală cu mărimea obiectului de reprodus.

După stingerea luminii se va înlocui filmul găsit în lăcașul său, cu o bucată de film virgin, atît cît trebuie pentru a fi strîns în portiță.

În cazul cînd se va folosi un film ortocromatic înlocuirea se poate face la lumina roșie, pentru cele pancromatice la lumina verde sau pe întuneric deplin.

În continuare scoatem lanterna aparatului de mărit — tubul cu sursa — în locul ei se va pune o bucată de pînză neagră, care nu va permite intrarea luminii la peliculă.

După aprinderea becului lanternei se va lumina documentul, plimbînd lanterna deasupra lui.

Timpul de expunere depinde de : luminozitatea obiectului, sensibilitatea filmului etc.

În timpul lucrului nu se va mișca aparatul nici suportul cu obiectivul.

De acum înainte se va prelucra filmul expus în condiții obișnuite.

Pentru iluminarea documentelor pe care o facem folosind lumina artificială, vom ține seama de următoarele indicații : suprafețele să fie uniform luminate, lumina să nu fie reflectată de pe suprafața hîrtiei documentelor, deoarece în locul unde se reflectă apar pete albe. Pentru a asigura planitatea documentelor se va utiliza o placă de sticlă foarte dreaptă curată și fără zgîrieturi.

Ținînd cont de utilizarea aparatului de mărit și de ușurința construcției lui, mai sus menționate, consider că ea va fi utilă cercurilor de elevi și va duce la îmbogățirea activității lor.

CALEIDOSCOP FIZIC ȘI MATEMATIC

de prof. *IOAN GIURGIU*, Baia Mare

Transformări de energie și alimentarea aparatului de radiorecepție. 1) Funcționarea aparatului de radioemisie se caracterizează printr-un mare număr de transformări ale unei forme de energie în altă formă de energie. Avem mai multe feluri de transformări. Energia chimică a elementelor galvanice se transformă în energie electrică ; energia electrică din filamentele de încălzire a tuburilor se transformă în energie termică ; energia termică se transformă parțial, din nou în energie electrică, accelerînd electronii pînă la viteza necesară pentru emisiunea lor de filament, adică favorizează formarea curentului anodic. În beculețul indicator cu neon, energia electrică se transformă parțial în energie termică, încălzind gazul și balonul becului și parțial, în energie luminoasă dînd naștere la luminozitatea roșie a gazului.

Această luminozitate constituie un rezultat al transformării triple a energiei : chimică și electrică, apoi electrică și termică și în fine, termică și luminoasă.

Ultima verigă a șiruiui de transformări îl constituie transformarea de către difuzor a energiei electrice în energie mecanică-acustică etc. Se știe că trecerea unei forme de energie în alta este însoțită întotdeauna, de o micșorare a cantității de energie inițiale.

Este interesant de urmărit transformarea energiei magnetice în energie electrică pentru care se utilizează capul de redare al magnetofonului. În acest caz energia magnetică a benzii de magnetofon nu se micșorează. Cîmpul magnetic al benzii induce, datorită energiei motorului, în capul de redare un cîmp magnetic variabil a cărui energie se consumă pentru a crea în spirele bobinajului un curent electric. Transformarea energiei magnetice în energie electrică se face doar în ultima etapă între cîmpul magnetic al capului și înfășurarea bobinei, și nu între cîmpul magnetic al benzii și bobinajul capului, în consecință cîmpul magnetic al benzii nu devine cu nimic mai slab. În mod practic, se poate observa că energia

magnetică a benzii nu se micșorează, deoarece în acest caz fiecare redare succesivă ar fi mai slabă decît cea dinaintea ei.

2) *Are omul suficientă forță pentru a alimenta un receptor de radio?* Un receptor de radio, de clasa a II-a, de exemplu în genul „Balticii" consumă circa 70 wați. S-a stabilit că omul poate să dezvolte un timp relativ îndelungat o putere de aproximativ 0,1 C.P.

Relația de legătură între wați și C.P. este:

$$1 \text{ C.P.} = 75 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{s} = 75 \cdot 9{,}81 \frac{J}{s}$$

dar, $1 \frac{J}{s} = 1$ wat, deci 1 C.P. = 736 wați; 0,1 C.P. = 73,6 wați.

Din ultima relație rezultă că omul în condiții normale, poate să dezvolte o putere de aproximativ 73,6 wați, adică atît cît trebuie pentru alimentarea unui radioreceptor de clasa a II-a.

Un receptor de radio poate fi alimentat un timp limitat și de cantitatea de energie pe care o pierde sub formă de căldură, un pahar de ceai care se răcește. Într-adevăr, un pahar de ceai (0,2 litri) cu capacitatea de 200 cm^3 răcindu-se de la 100°C la 20°C va pierde o cantitate de căldură Q care se poate calcula:

$$Q = m \cdot c\,(100° - 20°); \quad c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grad}}$$

$$Q = 0{,}2 \cdot 80; \quad Q = 16 \text{ kcal.}$$

Această cantitate de căldură Q corespunde la un anumit lucru mecanic echivalent după relația cunoscută: $j = \frac{W}{Q}$, unde $J = 427 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kcal}}$ și se numește echivalentul mecanic al caloriei.

$$W = J \cdot Q$$

și înlocuind pe J și Q cu valorile lor: $W = 427 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kcal}} \cdot 16$ kcal, $W = 6832$ kgf.m.

Se poate calcula ușor că acest lucru mecanic este capabil să ridice un automobil „Moskvici" încărcat cu patru pasageri adulți la o înălțime de 6,2 m. Acest rezultat este greu de imaginat și surprinzător.

Să vedem însă, cum va putea alimenta aparatul de radiorecepție „Baltica" — acest „atlet invizibil într-un pahar de ceai", cum îl numește pe bună dreptate I. Perelman în una din cărțile sale.

Pentru calcul să vedem care este echivalentul unui kilogramforțămetru în unități electrice:

$$1 \text{ kgfm} = 9{,}81 \text{ watt. secundă sau } 1 \text{ kgfm} = \frac{9{,}81}{60} \text{ watt. minute}$$

$$1 \text{ kgfm} = 163{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ watt. minute.}$$

Ținînd seama că avem 6832 kgfm ne vor da energia:

$$E = 163{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6832 \text{ watt, minute}; \quad E = 1\,115 \text{ watt. minute}$$

Puterea consumată de „Baltica" este 70 waţi şi va funcţiona timp de numai 16 minute. Calculul se face aplicînd expresia puterii :

$$P = \frac{W}{t}$$

$$t = \frac{1115 \text{ watt. minute}}{70 \text{ waţi}}; \quad t \approx 16 \text{ minute}$$

„Atletul" care poate să ridice automobilul „Moskvici" cu patru pasageri la înălţimea de 6,2 m alimentează aparatul nostru un timp relativ scurt de 16 minute, după care forţa lui se va epuiza complet.

Algebra zborului pe Lună. Mulţi oameni nu cred în posibilitatea zborului spre lună, cu ajutorul unor rachete deoarece diametrul aparent al Lunii pentru un observator de pe Pămînt este de aproximativ 0,5°. Un studiu mai amănunţit al zborului rachetei arată că dacă aceasta va putea trece mai departe de punctul de egală atracţie a Pămîntului şi a Lunii ea se va deplasa spre Lună numai sub acţiunea atracţiei ei.

Punctul în care un corp aflat între Lună şi Pămînt este supus la forţe de atracţii egale se poate afla potrivit legii atracţiei universale a lui Newton:

$$F = K \frac{M m_2}{d^2}$$

în care M, este masa Pămîntului, m masa corpului K este forţa cu care se atrag două mase de cîte un gram la distanţa de 1 cm, iar d, este distanţa între centrele de greutate a corpurilor care interacţionează. Forţa cu care pămîntul va atrage un gram de masă a corpului (rachetei) considerat va fi dată de expresia :

$$F_p = K \frac{M}{x^2}$$

în care x este distanţa de la Pămînt la corp.

Forţa cu care Luna va atrage un gram de masă din acelaşi corp

$$F_L = k \frac{m_1}{(1-x)^2}$$

unde l este distanţa Pămînt-Lună (considerăm corpul de masă „m" între Pămînt şi Lună şi pe dreapta care uneşte centrele lor), iar m_1 masa lunii.

În aceste condiţii trebuie să avem : $F_p = F_L$, deci

$$\frac{kM}{x^2} = K \frac{m_1}{(l-x)^2}, \quad \text{sau} \quad \frac{M}{m_1} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}$$

Se ştie că raportul $\frac{M}{m_1} = 81{,}5$ deci

$$\frac{x^2}{1^2 - 2lx + x^2} = 81{,}5$$

de unde ecuația :

$$80{,}5\, x^2 - 163\, 1x + 81{,}5\, 1^2 = 0$$

rezolvînd ecuația în raport cu x obținem :

$$x_1 = 0{,}1\ 1,\ x_2 = 1{,}12\ 1$$

Aceste două soluții ale ecuației ar conduce la concluzia că există două puncte în care corpul considerat între Pămînt și Lună va fi atras la fel de cele două planete ; unul situat la distanța de 0,9 1 de centrul Pămîntului, al doilea la distanța de 1,12 1 de același centru.

Cunoscînd distanța 1 între cele două planete 1 = 384 000 km unul din punctele căutate va fi la distanța de 346 000 km. Se știe însă că aceeași proprietate o au toate punctele situate pe un cerc care trece prin cele două puncte avînd ca diametru segmentul care le unește. Prin rotirea acestui cerc în jurul liniei, care unește centrele Pămîntului și al Lunii, el va genera o sferă a cărei suprafață se bucură de proprietatea că toate punctele ei satisfac cerințele problemei puse. Diametrul acestei sfere este egal cu diametrul cercului care se calculează din diferența :

$$1{,}12\ 1 - 0{,}9\ 1 = 0{,}22\ 1 = 84\,000 \text{ km}.$$

Ținta în care trebuie să nimerească o astfel de rachetă lansată spre lună are un diametru mai mare decît 0,5° și anume de circa 12°.

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ

de *DUMITRU SILAGHI*, Baia Mare

1. *Semiconductoarele* servesc — de curînd — și la... ceasornice ? Un astfel de ceas este dotat cu o mică stație de radioemisie. O microbaterie creează un contur oscilant, ale cărui unde sînt captate de semiconductoare minuscule și transformate în oscilații mecanice de mare precizie. Aceste ceasornice care merg cu o mare exactitate și care nu au acel zgomot de tic-tac se produc deja, în serie în fabricile din Japonia.

2. *Plasma interplanetară* este gazul ionizat care se găsește în spațiul interplanetar sub două forme a) Gaz staționar compus din particule cu sarcină (electroni și ioni liberi) care au o mișcare relativă mică. b) Sub formă de fluxuri corpusculare solare care se deplasează dinspre Soare cu viteze de mii da kilometri pe secundă. Concentrația acestei plasme a dus la discuții contradictorii și s-a lămurit în mare măsură, abia după lansarea sateliților artificiali ai Pămîntului și a rachetelor cosmice. Aparatele instalate pe sateliți au arătat că, concentrația particulelor cu sarcină din gazul staționar nu depășește cifre de cîteva particule la centimetru cub. Deci, în spațiul interplanetar există foarte puțin gaz ionizat staționar. Cantitățile de fluxuri de plasmă care se mișcă dinspre Soare sînt de asemenea mai mici decît cele găsite anterior. În medie ele nu depășesc 10^8—10^9 la centimetru pătrat pe secundă. Caracteristicile fluxurilor corpusculare din spațiul interplanetar au o mare influență asupra perturbațiilor cîmpului magnetic al Pămîntului, provoacă aurorele polare și furtunile ionosferice care

au o mare influență asupra radiocomunicațiilor terestre și interplanetare. O mare importanță are cunoașterea acestor caracteristici și pentru astronautică. Fluxurile de ioni pot provoca evaporarea învelișului rachetei și vătămarea persoanelor din nave. De asemenea, concentrația particulelor cu sarcină în spațiul interplanetar trebuie cunoscută pentru alegerea corectă a lungimilor de undă necesare pentru radiocomunicațiile dintre nave pe de o parte, și dintre nave și Pămînt, pe de altă parte. Cercetarea științifică a spațiului interplanetar în mod nemijlocit este doar într-o fază inițială și datorită importanței pe care o are pentru comunicațiile interplanetare se va dezvolta foarte mult în viitorul apropiat.

3. *Spărgătorul de gheață „Lenin"* este prevăzut cu 3 reactori unitari. Fiecare reactor este încărcat cu 80 kg uraniu 235. Astfel el poate naviga 3 ani fără a se alimenta cu combustibil. Energia dezvoltată de reactori este preluată de agentul termic care este apa obișnuită la o presiune de 200 at, unde este generat aburul care pune în mișcare 4 turboreactoare, care alimentează electromotoarele elicei. El a parcurs pînă în prezent, peste 30 000 mile, dintre care mai bine de jumătate printre ghețari. Astfel de curse lungi sînt necesare pentru explorarea extremului Nord și pentru dezvoltarea economiei acestor regiuni.

4. *Probleme noi de încălzire ale construcțiilor industriale.* Diferitele sisteme utilizate pînă în prezent la încălzirea întreprinderilor constituie o cotă-parte importantă din totalul cheltuielilor necesare pentru funcționarea acestor întreprinderi.

De aceea se caută înlocuirea vechilor sisteme de încălzire prin altele noi, care să fie mai economice, mai igienice, fapt care influențează în mare măsură randamentul muncii oamenilor care își desfășoară activitatea în aceste întreprinderi.

Astfel, un nou sistem cu mari șanse de reușită, în special la încălzirea întreprinderilor industriale cu suprafață mare, este sistemul de încălzire cu panouri radiante, care transmit căldura primită de la agentul termic prin fenomenul cunoscut de radiație de căldură.

Rolul unei astfel de instalații de încălzire este acela de a asigura organismului uman o anumită cedare de căldură, cuprinsă între anumite limite, astfel încît omul să se simtă bine, să-și poată desfășura activitatea în cele mai bune condiții.

Se știe că trecerea căldurii de la om către mediul înconjurător se face prin :

— convecție către aer,
— radiație către suprafețele înconjurătoare,
— conducție, de la picior la pardoseală,
— prin evaporare (expirație, transpirație).

Ultimele două căi, față de primele două se pot considera neglijabile, întrucît sînt foarte mici aceste pierderi.

Organismul uman are nevoie de o anumită cantitate de căldură pe care o ia din alimentele pe care le consumă, care prin ardere continuă degajă această căldură. O parte din această căldură este consumată de organism, iar altă parte este cedată mediului exterior prin căile arătate mai sus, astfel ca temperatura corpului să se mențină aproximativ constantă.

Viața omului este condiționată de permanenta cedare a căldurii către mediul înconjurător. Dacă la un moment dat aceasta nu se produce, omul

moare sufocat, iar dacă se produce prea puternic această cedare a căldurii către mediul exterior, omul de asemenea moare, însă din cauza frigului. De aceea, rolul unei bune instalații de căldură este acela de a asigura omului o astfel de cedare de căldură ca el să se simtă cît mai bine în încăperea încălzită.

Într-o încăpere încălzită prin convecție (cu sobe, radiatoare, aeroterme), adică cu aer cald, temperatura aerului este totdeauna mai ridicată decît temperatura suprafețelor înconjurătoare, deci, omul va pierde mai multă căldură prin radiație, către suprafețele înconjurătoare, decît prin convecție către aer.

Într-o încăpere însă, în care sînt montate sub tavan niște suprafețe calde, panouri radiante cu temperaturi ce depășesc cu mult temperatura omului, schimbul de căldură între om și mediul înconjurător se produce cu totul altfel. În acest caz, omul pierde o cantitate de căldură către aer și către toate suprafețele mai reci decît corpul său, dar în același timp primește prin radiație o cantitate de căldură de la panourile radiante, care au o temperatură de 100—200°C.

Printr-o judicioasă alegere și dimensionare a acestor panouri radiante putem face ca omul să nu aibă senzații neplăcute, chiar dacă suprafețele înconjurătoare au o temperatură mult mai scăzută decît aerul încăperii. Se ajunge ca pierderea totală de căldură a omului prin radiație și convecție să fie cuprinsă între limitele care îi asigură o senzație plăcută, astfel ca el să se simtă bine în căldură, respirînd un aer răcoros.

De aci rezultă și avantaje economice în exploatare și anume, temperatura aerului din încăpere și cea a suprafețelor înconjurătoare fiind mai scăzută, pierderile de căldură prin elementele de construcție sînt mai mici și deci, prin încălzire avem nevoie de o cantitate mai mică de combustibil.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4811

Se dă un cerc 0 și o dreaptă oarecare Δ. Fie M un punct mobil pe cerc și N piciorul perpendicularei din M pe Δ. Se cere locul geometric al punctului I, mijlocul segmentului MN.

* * *

Soluția. Fie centrul cercului ca origine a axelor de coordonate și perpendiculara din centru pe dreapta Δ ca axă *ox*, iar ca unitate de măsură raza cercului

Ecuația dreptei Δ este de forma $x = 2a$. Avem: $M(\alpha,\beta), N(2a,\beta)$.

Ecuațiile punctului I sînt deci $x = \dfrac{2a+\alpha}{2}$

$$y = \beta$$

Scoțînd $\alpha = 2x-2a$; $\beta = y$ și înlocuind în relație de condiție obținem elipsa:

$$4(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0$$

cu centrul în $(a, 0)$ cu axa mare paralelă cu Δ și egală cu diametrul cercului, iar cu axa mică $\frac{1}{2}$ din axa mare.

De notat că dreapta Δ poate avea orice poziție față de cerc. În particular ea poate trece chiar prin centrul cercului ($a = 0$). Elipsa își păstrează forma și mărimea schimbîndu-și numai poziția în funcție de distanța dreptei Δ de centrul cercului.

PROBLEMA 4812

Să se arate că expresiile

$$E_1 = 3^{4n} \cdot 5^{2n} - 2^{6n}$$

$$E_2 = n \cdot 45^{n+1} - 8 \cdot 45^n - 64\,(n+1)45^{n-1} + 53 \cdot 8^n$$

sînt divizibile cu 1961.

E. Constantinescu, profesor Tr. Măgurele

Soluție. a) Pentru prima expresie folosim descompunerea în factori a unei diferențe de patrate.

$$E_1 = 3^{4n} \cdot 5^{2n} - 2^{6n} = (3^2 \cdot 5)^{2n} - (2^3)^{2n} = (45^n - 8^n)(45^n + 8^n).$$

Diferența $45^n - 8^n$ este totdeauna divizibilă prin $45 - 8 = 37$.

Dacă $n = 2k + 1$ atunci suma $45^n + 8^n$ se divide cu $45 + 8 = 53$.

Rezultă că E_1 se divide cu $37 \cdot 53 = 1961$.

Dacă $n = 2k$ atunci diferența $45^n - 8^n$ se divide și prin $45 - 8$ și prin $45 + 8$ deci E_1 se divide cu 1961.

b) Pentru a doua expresie introduc notațiile: $x = 45$, $a = 8$, observînd că $53 = 45 + 8 = x + a$ obținem polinomul:

$$P(x\,;\,a) = nx^{n+1} - ax^n - (n+1)a^2x^{n-1} + a^nx + a^{n+1}$$

Pentru $x = a$ avem:

$$P(a\,;\,a) = na^{n+1} - a^{n+1} - (n+1)a^{n+1} + a^{n+1} + a^{n+1} = 0$$

deci $P(x\,;\,a)$ se divide cu $x - a$.

Pentru $x = -a$ avem:

$$P(-a\,;\,a) = n(-a)^{n+1} - a(-a)^n - (n+1)a^2(-a)^{n-1} - a^{n+1} + a^{n+1} =$$

$$= (-a)^{n-1}(na^2 + a^2 - (n+1)a^2) = 0.$$

Deci $P(x\,;\,a)$ se divide cu $x + a$

Rezultă că E_2 se divide cu $45 - 8$ și cu $45 + 8$ și deci cu produsul $37 \cdot 53 = 1961$.

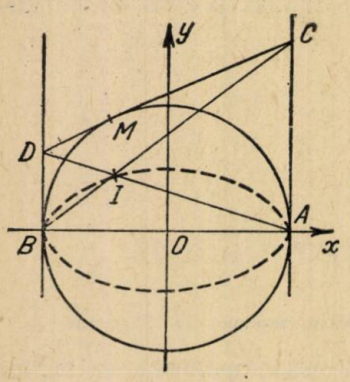
PROBLEMA 4813

Fie AB un diametru al cercului 0 și M un punct mobil pe acest cerc. Tangenta în M taie tangentele din A și din B respectiv în punctele C și D. Se cere locul geometric al punctului I, intersecția diagonalelor AD și BC ale trapezului ABCD.

C. Săndulache, profesor Bacău

Soluția autorului. Luînd diametrul AB ca axă ox și diametrul perpendicular pe aceasta ca axă oy, iar ca unitate de măsură raza cercului avem: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ecuația cercului; $\alpha x + \beta y - 1 = 0$ ecuația tangentei în M (α, β).

Coordonatele punctelor A, B, C, D sînt: $A(1, 0)$; B $(-1, 0)$;



$C\left(1, \frac{1-\alpha}{\beta}\right)$ și $D\left(-1, \frac{1+\alpha}{\beta}\right)$.

Avem pentru coordonatele lui I

$$y = \frac{1-\alpha}{2\beta}(x+1);\ (BC)$$

și

$$y = -\frac{1+\alpha}{2\beta}(x-1);\ (AD).$$

Din primele două ecuații scoatem:

$$\alpha = x;\ \beta = \frac{1-x^2}{2y}.$$

Introducînd aceste valori în relația de condiție $\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$, obținem succesiv:

$$x^2 + \frac{(1-x)^2}{4y^2} - 1 = 0;\ 4x^2y^2 + (1-x^2)^2 - 4y^2 = 0$$

$$4y^2(x^2-1) + (x^2-1)^2 = 0;\ (x^2-1)(4y^2 + x^2 - 1) = 0.$$

Cum $x^2 - 1 \neq 0$, punctul 0 fiind între cele două tangente, rămîne $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ care este locul căutat: o elipsă avînd semiaxa mare egală cu raza cercului (1) și semiaxa mică $\frac{1}{2}$ din rază.

PROBLEMA 4814

Se consideră parabola $y = ax^2 + bx + c$ avînd vîrful în punctul V— Fie M un punct mobil pe această parabolă și P piciorul perpendicularei coborîtă din M pe tangenta în vîrful ei. Să se demonstreze că perpendiculara coborîtă din punctul P pe dreapta MV, va trece printr-un punct fix și să se determine coordonatele acestui punct.

C. Săndulache, profesor Bacău

Soluția autorului. Să considerăm cazul particular $y = ax^2$, $(b = c = 0)$.

În acest caz: $M(x_0, ax_0^2)$; $P(x_0, 0)$ și V $(0, 0)$.

Coeficientul unghiular al dreptei MV va fi: $m = \frac{ax_0^2}{x_0} = ax_0$.

Ecuația perpendicularei din P este deci: $y = -\frac{1}{ax_0}(x - x_0)$

sau, făcînd calculele: $x + x_0(ay - 1) = 0$ și se observă că această dreaptă

trece prin intersecția dreptelor: $x=0$; $ay-1=0$. adică trece prin punctul $A(0,\frac{1}{a})$situat pe axa de simetrie.

În cazul general $y=ax^2+bx+c$, unde $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ va trebui să se determine un punct A, ale cărui coordonate să fie

$$x=-\frac{b}{2a} \text{ și } y=\frac{4ac-b^2}{4a}+\frac{1}{a}=\frac{4ac-b^2+4}{4a}.$$

În adevăr făcînd calculele obținem:

$$M(x_0, ax_0^2+bx_0+c);\ V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \text{ și } P\left(x^0, \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

Coeficientul unghiurilor ale dreptei MV este

$$m=\frac{ax_0^2+bx_o+c-\frac{4ac-b^2}{4a}}{x_0+\frac{b}{2a}}=\frac{2ax_0+b}{2}.$$

Ecuația perpendicularei în P pe dreapta MV este:

$$y-\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{2}{2ax_0+b}(x-x_o)$$

sau făcînd calculele necesare:

$$8ax+4aby+b^3-4abc+x_0(8a^2y-8a^2c+2ab^2-8a)=0.$$

Dreapta trece prin punctul A, care este intersecția dreptelor.

$8ax+4aby+b^3-4abc=0$ și $8a^2y-8a^2c+2ab^2-8a=0$.

Făcînd calculele se obțin coordonatele punctului A.

PROBLEMA 4815

Într-un cerc se consideră doi diametri perpendiculari AB și CD și un punct M mobil pe cerc. Coarda AM taie diametrul CD în punctul I. Să se determine și să se reprezinte grafic locul geometric al punctului P intersecția dreptei BI cu tangenta în M.

* * *

Soluție. Fie cei doi diametri ca axe de referințe și unitatea de măsură egală cu raza cercului. În acest caz ecuația cercului este $x^2+y^2-1=0$, iar ecuația dreptei AM este $y=m(x-1)$, unde m este un parametru.

Rezolvînd sistemul format de cele două ecuații obținem coordonatele lui M $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}-\frac{2m}{m^2+1}\right)$.

Ecuația tangentei în M este $\frac{m^2-1}{m^2+1}x-\frac{2my}{m^2+1}-1=0$ sau: $(m^2-1)x-2my-m^2-1=0$. Dreapta BI este dată de ecuația $y=-m(x+1)$.

Ecuația locului geometric se obține eliminînd parametrul m din ecuațiile:

$$(m^2 - 1)\,x - 2my - m^2 - 1 = 0,\quad y = -m\,(x + 1).$$

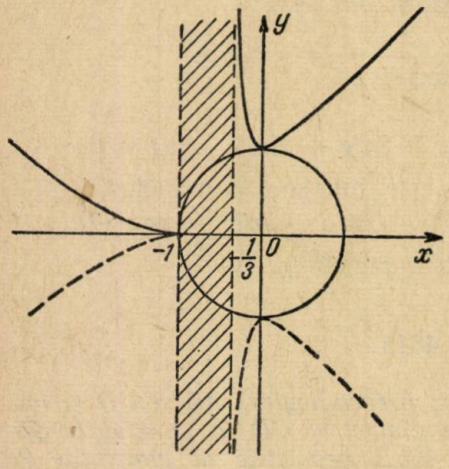
Eliminarea se face cu ușurință scoțînd valoarea lui m din a doua ecuație și introducînd-o în prima. Avem succesiv:

$$m = -\frac{y}{x+1};\quad \left[\frac{y^2}{(x+1)^2} - 1\right]x + \frac{2y^2}{x+1} - \frac{y^2}{(x+1)^2} - 1 = 0;$$

$$3xy^2 + y^2 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0;\quad y^2(3x+1) - (x+1)^3 = 0;\quad y = \pm\sqrt{\frac{(x+1)^3}{3x+1}}$$

Pentru ca valoarea lui y să fie reală trebuie să avem $\frac{(x+1)^3}{3x+1} \geqslant 0$ condiție ce are loc numai dacă $x \leqslant -1$ sau $x \geqslant -\frac{1}{3}$. În intervalul $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ funcția nu există.

Vom considera mai întîi ramura pentru care $y > 0$ și apoi, prin simetrie vom construi și cealaltă ramură.



Fie deci $y = +\sqrt{\frac{(x+1)^3}{3x+1}}$ a cărei derivată este

$$y' = \frac{3x\,(x+1)^2}{(3x+1)^2\sqrt{\frac{(x+1)^3}{3x+1}}}.$$

Vom observa că pentru $x < 0$, $y' < 0$ și invers, pentru $x > 0$, $y' > 0$.

Pentru $x \to -1$; $y' \to 0$ și pentru $x \to -\frac{1}{3}$, $y' \to \infty$.

Variația funcției este rezumată în următorul atbel:

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	///	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
y'	-1	$-\ -\ -$	0	///	$-\infty$	$-\ -$	0	$+\ +\ +$	1
y	$+\infty$	$\searrow\searrow\searrow$	0	///	$+\infty$	$\searrow\searrow$	1 (min)	$\nearrow\nearrow\nearrow$	$+\infty$

Observație. Radicalul $\sqrt{\frac{(x+1)^3}{3x+1}}$ nu poate fi scris sub forma $\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{3x+1}}$ deoarece în acest caz s-ar schimba domeniul de existență.

Din acest motiv nici în calcul derivatei nu s-au adus modificări acestui radical.

PROBLEMA 4818

Se împart laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC în același raport prin punctele M, N, P (situate între vîrfuri).

Notăm cu A', B', C' intersecțiile cevienelor AM = la, BN = lb, CP = lc cu cercul circumscris triunghiului și cu α, β, γ unghiurile ascuțite făcute de dreptele lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC respectiv cu laturile BC, AC, AB. Să se demonstreze relația:

$$l_a \cos\alpha + l_b \cos\beta + l_c \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}.$$

Tomescu I. Ion, student București

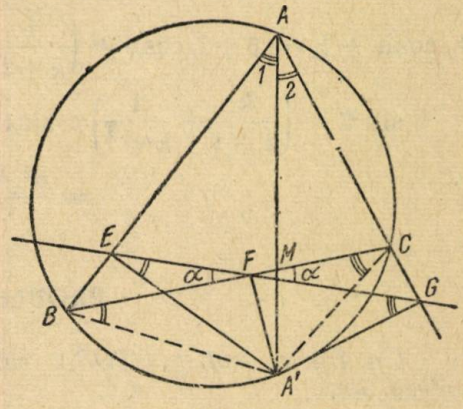
Soluția. Fie triunghiul *ABC*, *A'* intersecția dreptei *AM* cu cercul *ABC* și *E*, *F*, *G* proiecțiile punctului *A'* respectiv pe *AB*, *BC*, *CA*. Notînd $AB = c$ $BC = a$, $AC = b$ problema 2513 publicată în G.M.F. seria B ne arată că $\frac{a}{A'F} = \frac{b}{A'G} = + \frac{c}{A'E}$ deoarece punctul *A'* se găsește pe arcul *BC* al cercului *ABC*. Relația amintită se mai scrie:

$$a = b \cdot \frac{A'F}{A'G} + c \cdot \frac{A'F}{A'E}.$$

Patrulaterele $A'FEB$ și $A'FGC$ sînt inscriptibile deoarece $\sphericalangle A'FB = \sphericalangle BEA' = 90°$ și $A'FC = \sphericalangle A'GC = 90°$ și deci $\sphericalangle FEA' = \sphericalangle FBA' = \sphericalangle A_2$ și $FCA' = \sphericalangle FGA' = \sphericalangle A_1$.

Aplicînd teorema sinusului în triunghiul $FA'G$ obținem:

$$\frac{A'F}{A'G} = \frac{\sin A_1}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin A_1}{\cos\alpha};$$



analog din triunghiul $A'EF$:

$$\frac{A'F}{A'E} = \frac{\sin A_2}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{\sin A_2}{\cos\alpha}.$$

Făcînd aceste înlocuiri, relația devine:

$$a = \frac{b \cdot \sin A_1}{\cos\alpha} + \frac{c \cdot \sin A_2}{\cos\alpha},$$

de unde

$$\cos\alpha = \frac{b \sin A_1 + c \sin A_2}{a}.$$

Notînd $AM = la$ și aplicînd teorema sinusului și în triunghiurile ABM și AMC obținem: $\frac{BM}{\sin A_1} = \frac{l_a}{\sin B}$; $\frac{CM}{\sin A_2} = \frac{l_a}{\sin C}$, deci

$\sin A_1 = \frac{BM \cdot \sin B}{l_a}$; $\sin A_2 = \frac{CM \cdot \sin C}{l_a}$ valori care înlocuite în expresia lui cosα ne dau : $\cos\alpha = \frac{1}{a\, l_a}(b\sin B \cdot BM + c\sin C \cdot CM)$

$l_a \cdot \cos\alpha = \frac{1}{a}$ (b sin B · BM + c sin c · CM).

Deoarece punctele *M, N, P* împart interior laturile *BC, CA, AB* în același raport rezultă :

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k ;$$

Rezultă că $BM = \frac{ak}{k+1}$; $CN = \frac{bk}{k+1}$; $AP = \frac{ck}{k+1}$ și

$MC = \frac{a}{k+1}$; $NA = \frac{b}{k+1}$; $PB = \frac{c}{k+1}$. Făcînd aceste înlocuiri,

$$l_a \cdot \cos\alpha = \frac{1}{a}\left(b \sin B \cdot \frac{ak}{k+1} + c \sin c \cdot \frac{a}{k+1}\right) = \frac{k}{k+1} \cdot$$

$$\cdot\, b \sin B + \frac{1}{k+1}\, c \cdot \sin C.$$

Analog mai obținem : $l_b \cos\beta = \frac{k}{k+1} \cdot c \sin C + \frac{1}{k+1} a \sin A$ și

$l_c \cos\gamma = \frac{k}{k+1} a \sin A + \frac{1}{k+1} \cdot b \sin B.$

Facem suma căutată schimbînd ordinea termenilor și obținem :

$$l_a \cos\alpha + l_b \cos\beta + l_c \cos\gamma = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) a \sin A + \left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right)$$

$$b \sin B + \left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) c \sin C = a \sin A + b \sin B + c \sin C =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

PROBLEMA 4819

Un tractor rutier UTOS-2 circulă pe un drum uscat de țară cu viteza 5-a.

Să se determine puterea în C.P. necesară învingerii rezistenței la rostogolire știind că greutatea tractorului este G=3400 kgf, coeficientul de frecare la rostogolire f=0,05, iar viteza a 5-a a tractorului este v=13 km/h.

Sfichi Romulus

Soluția autorului. Forța necesară învingerii rezistenței la rostogolire în *kgf* este $F = G.f = 3400 \cdot 0{,}05 = 170$ *kg.f.*

Puterea în *C.P.* necesară învingerii rezistenței la rostogolire este:

$$P = \frac{F \cdot V}{3,6,75} = \frac{170 \cdot 13}{270} = 8 \cdot C \cdot P.$$

PROBLEMA 4836

Fie ABCD un patrulater oarecare și E un punct pe latura CD. Prin E se duc două drepte oarecare; prima dreaptă întîlnește pe BD în G și pe BC în M, iar a doua dreaptă întîlnește pe AC în H și pe AD în N. Să se demonstreze că MH și NG sînt concurente pe latura AB.

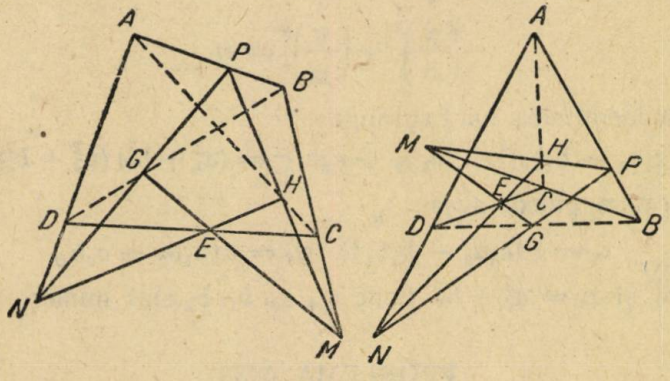
C. Ionescu-Țiu

Soluția I. Fie P_1 intersecția lui MN cu AB și P_2 intersecția lui NG cu AB.

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiurile ABC și ABD tăiate respectiv de MH și NG ne dă

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{BP_1}{P_1A} \cdot \frac{AH}{HC} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{ND}{NA} \cdot \frac{AP_2}{P_2B} \cdot \frac{BG}{GD} = 1 \tag{2}$$



Aplicînd de asemenea teorema lui Menelaus triunghiurilor BCD și ACD tăiate respectiv de MG și NH ne dă relațiile

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{EC} = 1 \tag{3}$$

$$\frac{ND}{NA} \cdot \frac{AH}{HC} \cdot \frac{EC}{ED} = 1 \tag{4}$$

Egalînd relațiile (1) cu (3) și (2) cu (4) vom obține

$$\frac{BP_1}{P_1A} = \frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{HC}{AH} \tag{1'}$$

$$\frac{BP_2}{P_2A} = \frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{HC}{AH} \tag{2'}$$

Comparate relațiile (1') și (2') avem:

$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP_2}{P_2B}.$$

Deci punctele P_1 și P_2 se confundă și deci dreptele MH și NG sînt concurente pe latura AB.

Soluția II. Triunghiurile MCH și NDG sînt omologice deoarece MG, NH și DC sînt concurente prin construcție. Deci, punctele care se obțin din intersecția laturilor corespunzătoare a acestor triunghiuri sînt coliniare. Deci P se găsește pe AB ceea ce era de dovedit.

PROBLEMA 4837

Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2zt$$

unde a și b sînt numere întregi.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Ecuația se mai poate scrie

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = zt.$$

Folosim identitatea lui Lagrange

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Prin urmare putem avea

$$x_1 = b(a_1a_2 - b_1b_2); \quad y_1 = a(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$z_1 = a_1^2 + b_1^2$ și $t_1 = a_2^2 + b_2^2$, unde a_1, a_2, b_1, b_2 sînt numere întregi.

PROBLEMA 4838

În ziua de 21 iunie (ziua solstițiului de vară), în momentul culminației superioare a Soarelui, un băț lung de 2,320 metri, înfipt vertical în pămînt, are o umbră de 1,000 metri.

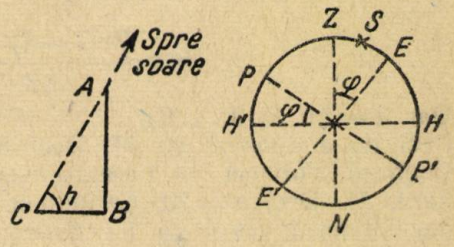
a) *Să se determine latitudinea locului de observație.*

b) *La ce latitudine nordică trebuie să se efectueze această observație pentru ca lungimea umbrei să fie egală cu lungimea bățului.*

Ioan Tudoran, Cluj

Soluția autorului. Vom reprezenta bățul prin segmentul AB care este perpendicular pe planul orizontului, iar umbra va fi reprezentată prin segmentul BC care este cuprins în planul orizontului. Direcția CA este orientată spre Soare, iar unghiul $BCA = h$ reprezintă înălțimea soarelui deasupra orizontului.

În momentul culminației superioare, Soarele se găsește în planul meridian al locului de observație. Din definiția meridianului (planul care trece prin zenit și cei doi poli al lumii) rezultă figura 2 unde avem relația $\psi = z + \delta$ cu următoarele notații:



φ este latitudinea locului, $z = 90° - h$ reprezintă distanța zenitală a Soarelui,

δ este declinația Soarelui în momentul observației și estte aproximativ egală cu înclinarea eclipticii pe ecuator ($\delta \sim \varepsilon = 23°27'$) 1. Din figura 1 avem

$$\operatorname{tg} h = \frac{AB}{BC} = 2{,}320 \text{ de unde rezultă } h = 66°41'$$

Cu această valoare a lui h obținem distanța zenitală

$$z = 90° - 66°41' = 23°19'$$

iar pentru latitudinea locului de observație avem

$$\varphi = z + \delta = 23°19' + 23°27' = 46°46'.$$

2. În cazul punctului 2 avem același raționament cu următoarele modificări:

$\operatorname{tg} h = 1{,}000$ și de aici $h = 45°$

$z = 90° - 45° = 45°$

$\varphi = 45° + 23°27' = 68°27'$

$\varphi = 68°\ 27'$

PROBLEMA 4850

Să se determine cel mai mic număr de forma $aa\ldots a$ cu un număr par de cifre, divizibil cu 71.

V. V. Pravăț, student Iași

Soluție. Un număr $N = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n$ se divide cu 71 dacă suma:

$S = 7^{n-1} a_n - 7^{n-2} a_{n-1} + 7^{n-3} a_{n-2} - \ldots + a_1$ se divide cu 71 (*A* se vedea articolul: „În legătură cu divizibilitatea numerelor prin 19" de E. Gaiu din G.M.F. seria *B* nr. 1 din 1960).

În cazul nostru trebuie să avem: $S = a\,(7^{n-1} - 7^{n-2} + 7^{n-3} - \ldots + 7 - 1) =$ mult. 71, deoarece numărul nostru trebuie să aibă un număr par de cifre. Suma noastră se mai poate scrie:

$$S = a\,[(7 + 7^3 + \ldots + 7^{n-1}) - (1 + 7^2 + \ldots + 7^{n-2})] =$$

$$= a \cdot \frac{7^{n-1} \cdot 7^2 - 7 - 7^{n-2} \cdot 7^2 + 1}{7^2 - 1} = a \cdot \frac{7^{n+1} - 7 - 7^n + 1}{48} =$$

$$= a \cdot \frac{7^n (7 - 1) - 6}{48} = a \cdot \frac{7^n - 1}{8}.$$

Dar $a = (1, 2, 3, \ldots 9)$
Deci nu e divizibil cu 71. Deci trebuie ca $7^n - 1$ să se dividă cu 71. Conform teoremei lui Fermat avem $7^{71-1} - 1 =$ mult. 71 sau $7^{70} - 1 =$ mult. 71. Deci $n = 70$. Cerîndu-se cel mai mic număr luăm $a = 1$. Așa dar, numărul cerut va fi: $N = 1\,1\,1 \ldots 1$ cu 70 de cifre.

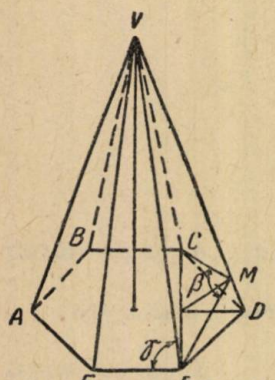
PROBLEMA 4858

Considerăm o piramidă exagonală regulată și notăm cu α *unghiul diedru a două fețe opuse cu* β *unghiul diedru a două fețe alăturate și cu* γ *unghiul dela bază a unei fețe laterale. Să se demonstreze relația:*

$$\frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos\beta} = 4\cos^2\gamma.$$

Rădulescu Mircea, Constanța

Soluție. Avem: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a_6}{A_6}$, a_6 fiind apotema exagonului (a bazei) iar A_6 apotema piramidei. Dacă l e latura bazei, se observă că:



$$a_6 = \frac{l\sqrt{3}}{2}; \quad A_6 = \frac{l \operatorname{tg}\gamma}{2}.$$

Prin urmare:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\gamma}; \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{3}{\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Unghiul β făcut de două fețe alăturate este unghiul format de perpendicularele CM și ME pe VD.

Avem evident:

$$\sin\frac{B}{2} = \frac{\frac{CE}{2}}{ME} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l\sin\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\gamma}.$$

Prin urmare:

$$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{2} = \frac{3}{4\sin^2\gamma}.$$

Deci :

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta} = 4\cos^2\gamma.$$

PROBLEMA 4860

Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare există relația

$$\frac{a\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}{\operatorname{ctg}2A + \operatorname{ctg}2B + \operatorname{ctg}2C} + 8S\cos A\cos B\cos C = 0.$$

Cezar Ivănescu, profesor Tîrgoviște

Soluția autorului. Pornim de la relația cunoscută

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C)$$

pe care o scriem pentru triunghiul ortic $A_1\ B_1\ C_1$ al triunghiului ABC. Avem

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4S_1(\operatorname{ctg}A_1 + \operatorname{ctg}B_1 + \operatorname{ctg}C_1).$$

Dar, știm că $a_1 = a\cos A, \ldots\ A_1 = 180° - 2A$. Deci

$$S_1 = 2R_1^2\sin A_1\sin B_1\cdot\sin C_1 = 2\left(\frac{R}{2}\right)^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C =$$

$$= \frac{R^2}{2}\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

Avem așa dar,

$$\frac{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}{\operatorname{ctg}2A + \operatorname{ctg}2B + \operatorname{ctg}2C} = -2R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

Însă $\sin 2A = 2\sin A\cos A$; $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ încît rezultă

$$\frac{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}{\operatorname{ctg}2A + \operatorname{ctg}2B + \operatorname{ctg}2C} = -8S\cos A\cos B\cos C.$$

PROBLEMA 4866

Pe un cerc fix se iau punctele mobile A, B, C. Știind că suma razelor cercurilor exînscrise triunghiului ABC este constantă să se găsească locul geometric al centrului cercului înscris.

Lucian Bădescu, elev C-lung Muscel

Soluție. Avem : $r_a + r_b + r_c = \text{const}$. Avem relația cunoscută : $r_a + r_b + r_c = 4R + r$, unde r este raza cercului înscris. Din această relație rezultă că r este constantă.

Mai avem relația cunoscută :

$OI^2 = R(R-2r)$, de unde rezultă că OI este constant. Cum O este fix rezultă că locul geometric al punctului I, centrul cercului înscris triunghiului ABC, este un cerc cu centrul în O și cu raza $OI = \sqrt{R(R-2r)}$.

PROBLEMA 4874

Care număr trebuie adunat la ambii termeni ai fracțiilor

$$\frac{m}{m+2} \text{ și } \frac{m^2}{3}$$

pentru ca ele să devină egale. Discuție.

Emil Morțun, profesor Pitești

Soluția autorului. Notăm cu x numărul ce trebuie adunat. Ecuația problemei este:

$$\frac{m+x}{m+2+x} = \frac{m^2+x}{3+x} \text{ sau: } (m^2-1)x + m(m^2+2m-3) = 0$$

$$(m^2-1)x + m(m+3)(m-1) = 0.$$

Numărul x va putea fi aflat din ecuația de mai sus atunci cînd $m^2 - 1 \neq 0$.

Să examinăm întîi cazul: $m^2 - 1 = 0$; $m = \pm 1$

a) $m = 1$; ecuația se reduce la o identitate; problema este, în acest caz, nedeterminată.

Nedeterminarea se explică prin faptul că pentru $m = 1$ ambele fracții devin egale cu $\frac{1}{3}$ și deci ele vor rămîne egale oricare ar fi x adunat ambilor termeni.

b) $m = -1$ ecuația se reduce la o imposibilitate: $0 = 4$

c) $m^2 - 1 \neq 0$ atunci: $x = -\frac{m(m+3)}{m+1}$ și ambele fracții devin egale cu $-m$.

PROBLEMA E: 1807

Să se arate că:

$$E = (2a+b+2c)^2 - (3a+2b+3c)^2 - (4a+3b+4c)^2 + (5a+4b+5c)^2 = 4(a+b+c)^2.$$

Liviu Pîrșan, student București

Soluție. Expresia se mai poate scrie:

$$E = [(2a+b+2c)^2 - (3a+2b+3c)^2] + [(5a+4b+5c)^2 - (4a+3b+4c)^2]$$

În fiecare paranteză mare avem o diferență de două pătrate care se descompune fiecare în produs de factori:

$$E = (a+b+c)(-a-3b-5c) + (a+b+c)(9a+7b+9c)$$

sau cînd factor comun avem:

$$E = (a+b+c)(9a-5a+7b-3b+9c-5c)$$

reducînd termenii asemenea:

$$E = (a+b+c)(4a+4b+4c) = 4(a+b+c)^2.$$

PROBLEMA E: 1810

Trapezul isoscel ABCD are înălțimea DF = 3 m și AD = BC = 5 m. Fie E punctul de intersecție al prelungirilor laturilor AD și BC, iar N și Q punctele în care bisectoarea unghiului AEB taie DC, respectiv AB. Știind că NC = 8 m, să se afle: a) aria trapezului DFBC; b) lungimea segmentului BE; c) aria triunghiului ABE; d) raportul dintre ariile triunghiurilor AFD și CNE.

O Ursulescu, cl. VIII București

Soluție. a) Trapezul *ABCD* fiind isoscel unghiurile *DAB* și *CBA* sînt egale. *DC* este paralel cu *AB*, deci unghiul *EDC* este egal cu *DAB* (corespondente) și unghiul *ECD* este egal cu *CBA* fiind egale, rezultă că și unghiurile *EDC* și *ECD* sînt egale. Deci triunghiul *EDC* este isoscel. Așadar, bisectoarea unghiului *AEB* este și mediană, deci punctul *N* se găsește la mijlocul laturii *DC*. Deci $NC = ND = 8$ m, iar $DC = NC + ND = 8\,m + 8\,m = 16\,m$.

Ducînd *DF* și *CM* perpendiculare pe *AB*, segmentul *FM* de pe *AB* va fi egal cu *DC*, adică va avea 16 m. În triunghiul dreptunghic *CMB* aplicăm teorema lui Pitagora, știind că $CM = DF = 3$ m și $BC = AD = 5\,m$:

$$MB = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\,m.$$

Deci, $FB = FM + MB = 16$ m $+ 4$ m $= 20$ m.

$$\text{Aria trapezului } DFBC = \frac{(DC + FB)\,DF}{2} = \frac{(16 + 20)3}{2} = \frac{36 \cdot 3}{2} =$$

$$= 18 \cdot 3 = 54\,m.$$

b) După cum am demonstrat mai înainte, triunghiul *DEC* este isoscel, deci bisectoarea unghiului *AEB* este și mediană și înălțime și mediatoare. Așadar, *EN* este perpendiculară pe *DC* și *EQ* perpendiculară pe *AB*. De aici rezultă că *NC* este paralelă cu *QB*, deci triunghiurile *ENC* și *EQB* sînt asemenea. Scriem proporționalitatea laturilor:

$$\frac{NC}{QB} = \frac{EC}{EB} = \frac{EN}{EQ}.$$

Din primele două rapoarte reiese că: $BE \cdot NC = QB \cdot EC$ (produsul mezilor egal cu cel al extremilor).

Notînd *EC* cu x avem: $NC(x + BC) = QB\ x$.

Dar $NC = 8\,m$, iar $QB = QM + MC = CN + MC = 8 + 4 = 12\,m$, iar $BC = 5\,x$. Deci, înlocuind avem: $8(x + 5) = 12\,x$; $8x + 40 = 12x$; $4x = 40$; $x = 10$. Deci $EC = 10\ m$.

$$BE = BC + CE = 5\,m + 10\,m = 15\,m.$$

c) În triunghiul dreptunghic *ENC* aplicăm teorema lui Pitagora:

$$EN = \sqrt{EC^2 - NC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6\,m$$

deci, $EN = 6$ m.

$EQ = EN + NQ = 6m + NQ$. Dar $NQ = DF = 3m$; $EQ = 6 + 3 = 9m$.

$AB = AF + FM + MB$. Trapezul fiind isoscel $AF = MB$

$AB = 2AF + FM = 2AF + DC$ (FM este egal cu DC).

Înlocuind cu valorile aflate la punctele anterioare avem:

$$AB = 2 \cdot 4 + 16 = 8 + 16 = 24\ m.$$

Aria triunghiului $ABE = \frac{EQ \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 24}{2} = 9 \cdot 12 = 108\ m.$

d) Aria triunghiului $AFD = \frac{AF \cdot FD}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3 = 6\ m.$

Aria triunghiului $ENC = \frac{EN \cdot NC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 3 \cdot 8 = 24\ m.$

Raportul cerut este $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

PROBLEMA E. 774 (M.F.L.).

Drumul de la A la B are o parte orizontală, iar o parte urcă pe munte. Un ciclist pornind de la A și înaintînd pe terenul orizontal cu o viteză de 8 km pe oră, iar pe deal cu o viteză de 3 km. pe oră sosește în B după 1 oră și 55 minute, de la plecarea din A. Cînd se întoarce, pe pantă are o viteză de 15 km. pe oră, iar pe teren drept 12 km. pe oră și face drumul în 58 de minute. Cîți kilometri are drumul între A și B?

* * *

Soluție dată de eleva *Major Ilona*, grupul școlar „Simion Bărnuțiu" din Zalău.

Să notăm cu x lungimea drumului pe teren drept, iar cu y lungimea drumului pe deal. Ciclistul prima dată face $\frac{x}{8}$ ore pe teren drept și $\frac{y}{3}$ ore pe deal. Tot drumul l-a făcut deci în $\frac{x}{8} + \frac{y}{3}$ ore. Putem scrie deci următoarea ecuație:

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{3} = \frac{115}{60}$$

Cu un raționament analog obținem ecuația

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{15} = \frac{58}{60}$$

Avem de rezolvat, deci, sistemul

$$3x + 8y = 46;\ 5x + 4y = 58.$$

Soluția sistemului este $x = 10$, $y = 2$.

Deci distanța între A și B este de 12 km.

PROBLEMA E. 775 (M.F.L.).

În mijlocul 0 al iptotenuzei AB al triunghiului ABC ridicăm o perpendiculară pe iptotenuză. Această perpendiculară taie cateta CB în punctul M, iar prelungirea catetei AC o taie în N.

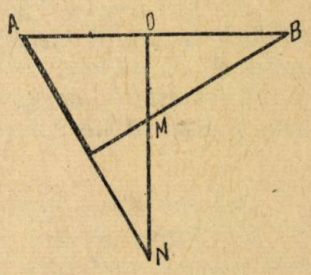
Să se calculeze ipotenuza, dacă OM=3 cm, MN=9 cm.

Matemtica v şcoale

Soluţia dată de eleva *Kiss Ildiko*, şcoala medie Nr. 1 din Sf. Gheorghe:

Triunghiul *ANO* este asemenea cu triunghiul *BMO*, deoarece ambele sînt dreptunghice şi $\sphericalangle ONA = \sphericalangle OBM$, laturile corespunzătoare fiind perpendiculare. Putem scrie deci că

$$\frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OA}$$



Folosind datele obţinem

$$\frac{OB}{12} = \frac{3}{OB}; \quad OB^2 = 36, \text{ deci } OB = 6.$$

Deoarece $AB = 2\ OB$, avem $AB = 12$ cm.

PROBLEMA E. 776 (M.F.L.).

La ce adîncime se pot scufunda în mare aşa numiţii scafandrii? Ce determină adîncimea obţinută?

Deszö Ervin, Cluj

Soluţie. Aşa-numiţii scafandrii se scufundă fără haine de protecţie la adîncimi considerabile. Cu fiecare 10 m de scufadre, presiunea ce se exercită asupra lor se măreşte cu 1 atm, deci la adîncimea de 40 m este egală cu 4 atm. Sub această presiune mărită sîngele dizolvă o cantitate mai mare de gaz, (la fel ca sifonul care dizolvă acidul carbonic). În urma acestuia ajung într-o stare de beţia adîncului. La întoarcere în timpul ridicării presiunea scade brusc. Din sînge — ca şi din sticla deschisă de sifon — se desprind brusc băşici de gaze dizolvate, ceea ce poate duce la moarte. Pentru aceasta la ieşirea din apă respectivii sînt aşezaţi în încăperi închise sub presiune şi se realizează scăderea treptată a presiunii.

Adîncimea maximă obţinută este de 130 m, dar la adîncimi mai mari decît 50—70 m este pericol de moarte.

Observaţia elevilor şcolii medii din Ditrău. La scufundare se foloseşte un aparat. Acesta este o butelie de oţel de 7 litri, în care se presează aer la o presiune de 150 atm. Deci în butelie se găsesc 1050 litri de aer. Organismul în repaos foloseşte 7 l de aer pe minut, iar cel în mişcare chiar şi de 3 ori mai mult. Deci în mediu uscat aerul depozitat în aparat este suficient pentru 50 de minute, însă sub apă, de exemplu la adîncimea de 40 m, doar pentru circa 5—6 minute.

PROBLEMA E. 777 (M.F.L.).

În timp de ploaie și ceață fumul coșurilor fabricilor se lasă pe pământ. Care este cauza?

Illyés Lajos, Salonta

Soluția elevului *Kiss Dénes*, din cl. VI-a a școlii de 8 ani Nr. 2 din Sighișoara. În timp de ploaie și de ceață vaporii de apă se condensează pe suprafața bucățelelor de cărbune existente în fum. Greutatea acestora se mărește, deci fumul se lasă jos.

PROBLEMA E. 778 (M.F.L.).

Un vas conține 720 g de apă la temperatura de 52°C ; în urma cedării căldurii mediului înconjurător apa se răcește la temperatura de 16°C în timp de 5 minute. În apă se așază o sîrmă cu rezistența : $R = 10\Omega$. Care este valoarea necesară a intensității curentului pentru ca temperatura apei să fie constantă, adică menținută la 52°C?

* * *

Soluția elevei *Papp Mária* din cl. VIII-a a școlii medii Nr. 2 din Sf. Gheorghe. Pentru încălzirea apei la temperatura constantă de 52°C este necsară cantitatea de căldură :

$$Q = mc\,(T_1 - T_2).$$

Această cantitate de căldură este produsă de rezistență și se calculează cu formula

$$Q = 0{,}24\ I^2\,Rt.$$

Deci

$$mc\,(T_1 - T_2) = 0{,}24\ I^2\,Rt,$$

de unde

$$I^2 = \frac{mc\,(T_1 - T_2)}{0{,}24\ \mathrm{Rt}} = \frac{720\ \mathrm{g} \cdot 1\ \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g^0\,C}}\,(52 - 16)^0\mathrm{C}}{0{,}24 \cdot 10 \cdot 300\ \frac{\mathrm{cal}}{A^2}} = 36\ A^2,$$

adică valoarea necesară a intensității curentului este de

$$I = 6\ A.$$

PROBLEMA E. 779 (M.F.L.).

Unde ar ajunge acel individ, care ar merge în continuu în direcția arătată de o parte a acului busolei?

* * *

Soluția elevei *Cseke Agnes*, din cl. VI-a a școlii medii Nr. 15 Cluj. Acel individ care ar merge în continuu în direcția arătată de o parte a acului busolei, ar ajunge la polurile magnetice Nord sau Sud. Poziția polurilor magnetice nu coincide cu cele geografice.

PROBLEMA E. 780 (M.F.L.).

Printr-un conductor de fier trece un curent electric în urma căruia conductorul devine incandescent. Dacă răcim o parte a conductorului, întorcîndu-l în apă, cealaltă parte se înroşeşte mai tare. Cum se explică fenomenul?

* * *

Soluţia elevei *Erdélyi Klára*, din cl. VII-a a şcolii de 7 ani, Petroşeni. Fenomenul se explică prin aceea, că rezistenţa metalelor este direct proporţională cu temperatura. Astfel, dacă răcim o parte a conductorului, atunci rezistenţa acestuia scade şi se măreşte intensitatea curentului ce trece prin conductor (pe baza legii lui Ohm, U e constant). Curentul cu o intensitate mărită încălzeşte şi mai mult conductorul, astfel partea lăsată liberă este mai incandescentă.

PROBLEME PROPUSE*)

5507. Pentru selecţionarea echipei naţionale de fotbal sînt duşi în cantonament 41 de jucători, din care 3 sînt portari, 18 jucători în apărare şi restul jucători la înaintare.

Se cere: a) în cîte moduri posibile se poate forma echipa de 11 jucători; b) în cîte moduri posibile se poate aşeza echipa pe teren.

Man Octavian, profesor Carei

5508. Pe latura AB a triunghiului ABC se iau punctele G şi E astfel $AE = EB$ şi $AG = GE$, iar pe latura BC se iau punctele H şi F astfel $CF = BF$ şi $CH = HF$. Dreptele CG şi FE sînt concurente în P, dreptele AH şi EF în L, dreptele AH şi CG în O, iar dreptele AP şi LC în M. Să se arate că punctele B, O şi M sînt coliniare.

Man Octavian, profesor Carei

5509. a) Să se arate că imaginile M_1 şi M_2 ale numerelor complexe corespunzătoare

$$Z_1 = \frac{6}{1+t^2} + \frac{2t^2+6t+2}{1+t^2}\,i \text{ şi } Z_2 = \frac{8t^2+12}{1+t^2} + \frac{2t^2+4t+2}{1+t^2}\,i$$

descriu cercuri cînd t variază. Fie M_3 imaginea numărului complex $Z_3 = Z_1 + Z_2$. b) Să se afle distanţa minimă şi maximă dintre M_1 şi M_2. c) Să se arate că M_3 descrie tot un cerc cînd t variază avînd raza egală cu suma razelor cercurilor descrise de M_1 şi M_2.

Man Octavian, profesor Carei

---

* VIII (5508, 5517, 5523); IX (5526, 5527, 5530); X (5507, 5509, 5511, 5512, 5513, 5520, 5521, 5522); XI (5510, 5514, 5515, 5516, 5518, 5519, 5524, 5525, 5528, 5529).

5510. Într-un plan se consideră două puncte A și B, două drepte D și D_1 și un punct M mobil pe dreapta D. Fie A_1 și B_1 intersecțiile dreptei D_1 cu dreptele AM și BM, iar M_1 intersecția dreptelor AB_1 și A_1B. Să se arate că: a) Punctul M_1 descrie o dreaptă ce trece prin intersecția dreptelor D și D_1. b) Dreptele MM_1 trec printr-un punct fix de pe dreapta AB.

C. Ionescu-Țiu

5511. Să se arate că expresia

$$E=(4i\sqrt{2}-7)^n+2(5i-\sqrt{2})^n+2(1+2i\sqrt{2})^n+2(\sqrt{2}+i)^n+1$$

este divizibilă cu $1+\sqrt{2}$, pentru n un număr natural și fără soț, iar $i^2=-1$.

N. Poșta, profesor Baia Mare

5512. Să se afle valoarea expresiei

$$E=x^3+3\sqrt[3]{2}\,x-2\sqrt{3},\ \text{pentru}\ x=\sqrt[6]{2(2+\sqrt{3})}-\sqrt[6]{2(2-\sqrt{3})}$$

N. Poșta, profesor Baia Mare

5513. Se dă un poligon convex, regulat înscris într-un cerc cu raza R și centrul O. Notăm vîrfurile poligonului în A_1, A_2, A_3, .. A_{2n}. Fie P un punct oarecare în planul poligonului.

Să se demonstreze relația următoare

$$\frac{\sum PA_i^2}{2n}-PO^2=R^2$$

* * *

5514. Dacă numărul rădăcinilor reale și mai mici ca un număr real a, ale ecuației cu coeficienți reali, $P(x)=0$, este sau nu de aceeași paritate cu gradul ecuației, să se arate că avem $P(a)>0$ sau $P(a)<0$, respectiv.

C. Ionescu-Țiu

5515. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\cos^2 x\sin^2 y=\cos^2 y\sin^2 z=\cos^2 z\sin^2 x=a$$

Discuție.

C. Ionescu-Țiu

5516. Fie S spațiul cu trei axe rectangulare ox, oy, oz. Să se demonstreze că acest spațiu este un spațiu metric definindu-se cel puțin două distanțe în S.

(Se va consulta articolul „Noțiuni introductive asupra spațiilor metrice" din G.M.F.-B nr. 10/1961).

D. M. Bătinețu, student București

5517. Să considerăm ca operație de steluță acel procedeu de calcul care se definește astfel:

$$a * b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Să se arate că dacă avem relațiile:

$$(a * b) * x = 1 \text{ și } (a * x) * b = 1, \text{ unde } a \neq -1,$$

atunci $a * b\,(1-a)\,(1-b) = 0$

Stancu M. Ion, elev Pitești

5518. Se dă cercul

$(C)\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$ și dreapta $(\Delta)\ x + 3y - 10 = 0$.

Se cere: a) Să se scrie ecuația cercului ce trece prin punctele de intersecție ale cercului (C) cu dreapta (Δ) și determină pe axa Ox un segment egal cu 7 unități. b) Să se calculeze polul dreptei (Δ) față de cercul (C). c) Prin pol se duce o dreaptă variabilă care taie cercul aflat la punctul a) în A și B. Tangentele în A și B la cerc se întîlnesc în M. Să se afle locul geometric al lui M. Soluție analitică și geometrică.

Augustin I. Matei, profesor Cluj

5519. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$2x^3 + x^2 - 2m^2x + m^2 = 0$$

parametrul m variind de la $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. Stamate, Cluj

5520. Se dă un triunghi oarecare ABC. Notăm cu O centrul cercului înscris, iar cu O' centrul cercului exînscris a laturei BC.

Să se arate că, notînd proiecțiile lui O respectiv O' pe latura BC, cu P și Q, avem:

$$PQ = |AB - AC| \text{ și } PB = |QC|$$

Gheorghe Szollosy, Sighet

5521. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, avem

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 2$$

Rertenz Antal, elev Sighet

5522. Dacă α, β, γ sînt arcele cele mai mici, orientate, subîntinse de simedianele unui triunghi în cercul circumscris, pe care s-a ales un sens pozitiv, atunci

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=0$$

T. Zamfirescu, student București

5523. Perpendiculara în D pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC intersectează catetele AC, AB respectiv în E și F.

Să se arate că: a) Cercurile circumscrise triunghiurilor AEF și DCE se intersectează pe dreapta CF. b) Punctul de intersecție al tangentelor B și C la cercurile circumscrise triunghiurilor ABD și DCE se află pe cercul circumscris triunghiului CEB. c) Tangentele în B și C la cercul circumscris triunghiului BCF formează cu dreapta DE un triunghi isoscel.

D. I. Flondor, București

5524. Se dă funcția exponențială $y=a^x$ cu $a>1$.

a) Să se determine „a" astfel încît curba exponențială să taie prima bisectoare. b) Să se determine „a" astfel încît curba exponențială să fie tangentă la bisectoare.

Miron Oprea, Ploiești

5525. Fie M_0 un punct pe o hiperbolă echilaterală, D o dreaptă paralelă cu tangenta în M_0 la hiperbolă, M_1 și M_2 două puncte diametral opuse în hiperbolă. M'_1 și M'_2 fiind punctele unde dreptele M_1M_1 și M_0M_2 taie dreapta D, să se demonstreze relația $M_0M_1\cdot M_0M_1+M_0M_2\cdot M_0M'_2=0$.

Petre Boldescu, Craiova

5526. Să se rezolve grafic sistemul de ecuații:

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

$$(x-y)^2=c^2+d^2$$

unde a, b, c și d sînt segmente de dreaptă date.

Stelian Lambă, Constanța

5527. Între laturile triunghiului ABC există relația:

$$b^2+c^2=a(b+c).$$

a) Să se exprime în numere întregi laturile unui astfel de triunghi. b) Să se arate că razele cercurilor exînscrise triunghiului sînt în progresie geometrică. c) Dacă între laturile triunghiului ABC mai există și relația $2a=(b+c)\sqrt{3}$, triunghiul are un unghi de 30°.

Gh. Popescu, profesor Lugoj

5528. Se dă expresia:

$$N = 30xyz + 6xy + 10xz + 15yz + 2x + 3y + 5z + 1$$

unde $\{x, y, z\} \subset CN$.

Să se determine cel mai mic cub cuprins în expresia dată.

L. Mănescu, profesor R. Vîlcea

5529. Un vas cilindric cu raza bazei de 8 cm și înălțimea de 20 cm, în care se află un cilindru masiv, omogen, cu greutatea specifică 0,5 gf/cm³ și avînd raza bazei de 4 cm și înălțimea de 6 cm, se umple cu apă printr-un robinet al cărui debit este de 16 cm³/s.

Se cere: a) Să se exprime înălțimea apei din vas în funcție de timp. b) Să se reprezinte grafic funcția obținută. c) Să se reprezinte grafic viteza de creștere a nivelului apei și să se analizeze continuitatea funcției viteză.

Ch. Pîslaru, profesor Bacău

5530. Să se găsească numerele pentru a căror scriere în baza a este necesară numai cifra $(a-k)$, a și k fiind numere naturale astfel încît $a>k$.

(Generalizarea problemei 5216).

Wolf Alexandru, elev București

CHESTIUNI DE EXAMEN

5531. — Se dă ecuația $m = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, unde m este un parametru. Se cere: a) să se afle valoarea lui x care verifică ecuația dată; b) să se determine valorile lui m pentru care ecuația are rădăcini reale; c) să se afle valoarea lui x pentru care m este maxim.

(*La Institutul politehnic București*, 1962)

5532. — Se dă sistemul:

$$\frac{x+a}{3} = \frac{y-2a}{-1} = \frac{z+a}{5}; \quad x^2 + y^2 - z^2 = 4a^2 - 135$$

Se cere: a) să se rezolve sistemul: b) să se determine a astfel încît sistemul de soluții x_1, y_1, z_1 să fie în progresie aritmetică, apoi să se afle valoarea lui a pentru care sistemul de soluții x_2, y_2, z_2 este în progresie aritmetică; c) în ambele cazuri, să se calculeze suma primilor 21 termeni ai progresiilor.

(*La I. P. București*, 1962)

5533. — Se dă expresia $E=13\sin x-3\cos 2x$. Se cere: a) Să se calculeze valoarea lui E știind că $tgx=\frac{1}{2}$ și că x este cuprins în primul cadran; b) Să se rezolve ecuația $E+8=0$; c) Să se calculeze valoarea lui E pentru $x=\frac{\pi}{12}$.

(*La I. P. București*, 1962)

5534. — Un lichid avînd densitatea $d=1{,}05$ g/cm³ se pompează printr-o conductă verticală de lungime $l=3$ m. Conducta are secțiunea circulară, diametrul fiind $D=40$ cm. Pompa este acționată de un electromotor alimentat din rețeaua de 220 volți. Randamentul întregii instalații este $b=0{,}70$, iar debitul pompei $Q=120$ Kg/s. Se cere: a) Debitul pompei exprimat în litri pe secundă; b) Puterea absorbită de instalație de la rețeaua de 220 volți exprimată în sistemul MKS; c) Intensitatea curentului electric ce trece prin electromotor; d) Costul pompării unei tone de lichid, dacă prețul energiei este 0,12 lei/kWh; e) Viteza cu care lichidul se mișcă în conductă.

(*La I. P. București*, 1962)

5535. — Un corp cu masa de 5 kg pornește din repaus și alunecă fără frecare, sub acțiunea gravității, pe un plan înclinat de 7 m lungime, care face un unghi de 30° față de orizontală. Se cere:

a) Componenta normală pe plan și componenta paralelă cu planul a greutății corpului; b) Accelerația corpului pe plan; c) În ce timp corpul parcurge planul înclinat; d) Viteza cu care corpul ajunge la baza planului; e) Energia cinetică pe care corpul o are la baza planului.

(*La I. P. București*, 1962)

5536. — Se dă expresia:

$$E=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$$

și se cere: a) Să se calculeze E efectuînd operațiile respective, aducînd-o la cea mai simplă formă;

b) Să se rezolve ecuația $E=\frac{4}{3}$;

c) Să se calculeze valoarea expresiei E pentru $x=\sqrt{3}-1$.

(*La I. P. B., Fac. chimie ind.*, 1962)

5537. — Se dă expresia:

$$E=\frac{tg\,(45°+x)-tg\,(45°-x)}{tg\,(45°+x)+tg\,(45°-x)}$$

și se cere: a) Să se calculeze valoarea acestei expresii pentru $x=30°$; b) Să se determine valorile lui x pentru care $E=0$; c) Să se scrie expresia E pentru x oarecare, sub forma cea mai simplă.

(*La I. P. B., Fac. chimie ind.*, 1962)

5538. — Se dă trapezul $ABCD$ dreptunghic în A și B, astfel ca $AB=4a$, $BC=a$, $AD=3a$. Se consideră M un punct pe segmentul AB; se notează $AM=x$, iar unghiurile AMD, CMB și DMC respectiv prin u, v și θ.

a) Să se calculeze tgu, tgv, $tg\theta$ în funcție de a și x. Să se deducă valorile lui x pentru care unghiul θ este determinat pentru fiecare din aceste valori;

b) Să se calculeze în funcție de x valoarea y a raportului $\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} v}$. Să se studieze variația lui y, cînd M se deplasează în lungul segmentului AB. Să se traseze într-un sistem de axe ortogonale curba reprezentativă pentru $a=1$.

(*Bacalaureat Guineea*, 1962)

5539. — a) Pe perpendiculara în M pe planul trapezului și totdeauna de aceeași parte a acestui plan se consideră un punct S astfel că $MS=AM=x$. Să se exprime în funcție de a și x volumul V al piramidei $DMCD$. Să se studieze variația lui V cînd M variază în condițiile indicate. Să se traseze într-un sistem de axe ortogonale curba reprezentativă pentru $a=1$; b) Să se găsească locul geometric al punctului S și al centrului de greutate G al triunghiului SCD, cînd M se deplasează în lungul segmentului AB. Să se determine proiecțiile ortogonale ale ultimului loc geometric pe planul $ABCD$ și pe planul dus prin AB perpendicular planului $ABCD$.

(*Bacalaureat Guineea*, 1962)

5540. — Fie funcția $y=x^2-2\cos^2\frac{\alpha}{2}x+\cos\alpha$ în care x este variabilă independentă, α un parametru. La fiecare valoare a lui α corespunde o funcție y și o curbă (C_α) reprezentativă a variației lui y.

a) Să se stabilească coordonatele vîrfului S al curbei (C_α)

b) Să se deducă că oricare ar fi valoarea parametrului α, curba (C_α) taie Ox în două puncte P și Q;

c) p și q reprezentînd abscisele acestor două puncte, să se studieze după valorile lui α, variațiile lui p și q;

d) Care este locul geometric al vîrfurilor curbelor (C_α) cînd α variază?

e) Să se găsească toate valorile lui α pentru care vîrfurile curbelor (C_α) sînt cele mai depărtate de axa Ox.

f) Să se construiască curbele reprezentînd variațiile trinoamelor obținute dînd lui α valorile obținute. (Care este natura lor?)

(*Bacalaureat Guineea*, 1962)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

PENTRU CLASELE V–VII *)

E: 1907. Un șofer pleacă cu mașina din orașul A spre B. El merge cu o viteză medie de 50 km pe oră, care reprezintă $\frac{1}{7}$ din distanță. După o distanță de $\frac{4}{7}$ din întreg drumul, o pană îl obligă să stea pe loc $\frac{1}{7}$ din timpul necesar parcurgerii întregului drum.

Cu ce viteză ar trebui să meargă acum, ca să ajungă la aceeași oră în orașul B?

Mariș Ioana, elevă Sighet

E: 1908. Pe ogoarele unei regiuni lucrează 3 135 tractoare, semănători și combine. Știind că $\frac{12}{25}$ din numărul tractoarelor reprezintă cît $\frac{3}{5}$ din numărul semănătoarelor iar $\frac{40}{87}$ din numărul combinelor este cu 500 mai mic decît $\frac{7}{12}$ din numărul semănătoarelor, să se afle numărul tractoarelor semănătoarelor și combinelor.

Mariș Ioana, elevă Sighet

E: 1909. Se dă un triunghi oarecare și se cere să se construiască un triunghi asemenea cu cel dat, avînd aria de 9 ori mai mică.

C. Ionescu-Țiu

E: 1910. În prezent există în U.R.S.S. 5 800 de sovhozuri care dețin $\frac{1}{2}$ din suprafața arabilă a țării și 78 000 de colhozuri, deținînd fiecare în medie 2 000 ha. Se cere: a) Să se afle cîte hectare deține în medie un sovhoz, b) Știind că pentru a ara suprafața arabilă a țării se folosesc 1 600 000 de tractoare să se calculeze cît ară în medie un tractor.

V. Brînzănescu, elev Constanța

E: 1911. Într-o gospodărie colectivă sînt 45 de cai. Cu acești cai lucrează 4 echipe de căruțași. Dacă numărul cailor din prima echipă s-ar mări cu 2 cai, numărul cailor din echipa a doua s-ar micșora cu 2 cai, numărul cailor din echipa a treia s-ar dubla, iar numărul cailor din echipa a patra s-ar micșora de două ori, atunci fiecare echipă ar avea același număr de cai. Care este numărul de cai al fiecărei echipe?

Jurcă Iulian, Timișoara

* V (E: 1907, 1908, 1910); VI (E: 1911i 1912, 1913); VII (E: 1909, 1914).

E: 1912. La crescătoria de păsări a unei gospodării agricole colective sînt 1 200 găini matcă care dau cîte 110 ouă pe an. Se scot 40 000 pui, care se vînd cu 2,50 lei bucata. La incubatoare se mai pierd 1 500 ouă, restul ouălelor se vînd cu 0,60 lei bucata. Ce venit a adus crescătoria? Cît s-ar cîștiga în plus dacă puii ar fi crescuți să ajungă în medie de 1,800 kg și s-ar vinde cu 11,50 lei kg, știind că pentru creșterea fiecărui pui s-ar cheltui 0,75 lei?

D. Popescu, profesor Feteşti

E: 1913. Distanța Focșani-Mărășești este de 20 km. La ora 8 pleacă un pieton din Focșani spre Mărășești cu 5 km/oră. Ajunge în Mărășești, se odihnește 2 ore și pleacă înapoi spre Focșani mergînd cu 4 km/oră. La ora 11 pleacă alt pieton din Focșani spre Mărășești mergînd cu 4 km/oră. La ce distanță de Mărășești se vor întîlni pietonii și ce drum a parcurs fiecare?

Emil Tilici, profesor Cîrligele

E: 1914. Să se arate că

$$\frac{1}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}}+\frac{1}{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}}+\frac{1}{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^6}}=a^4$$

C. Ionescu-Țiu

Cărți noi

1. *C. Borș, D. Borș; Numere complexe*" Biblioteca Societății de științe matematice și fizice din R.P.R., nr. 50, Editura Tehnică, 1962.

Lucrarea conține trei definiții echivalente ale numărului complex date cu ajutorul vectorilor plani, a perechilor ordonate de numere reale și a claselor de resturi de polinoame cu coeficienți reali modulo x^2+1, formele numărului complex (algebrică, trigonometrică și exponențială), precum și aplicațiile acestuia în geometrie (teoremele lui Pompei) și algebră (la studiul ecuațiilor de gradul al doilea și al treilea).

De asemenea, au fost introduse unele noțiuni de algebră abstractă și algebră liniară, la care studiul numerelor complexe conduce în modul cel mai potrivit.

Majoritatea capitolelor sînt completate cu aplicații numerice și exerciții, urmate de indicații și răspunsuri.

Se adresează elevilor din ultimele clase, studenților și cadrelor didactice din învățămîntul de cultură generală și învățămîntul tehnic.

Materialul cuprins în această carte este grupat astfel: I. Dezvoltarea istorică a noțiunii de număr complex; II. Prima definiție a numerelor complexe; III. A doua definiție a numerelor complexe; IV. A treia definiție a numerelor complexe; V. Forma algebrică, trigonometrică și exponențială a numerelor complexe; VI. Aplicațiile numerelor complexe la studiul ecuațiilor de gradul al doilea și al treilea; VII. Noțiuni elementare de algebră abstractă; VIII. Noțiuni de algebră liniară. Algebre; IX. Studiul analitic al numerelor complexe.

2. *D. I. Perepiolkin „Probleme rezolvate din lecții de geometrie elementară (geometrie în spațiu) de J. Hadamard"*, Editura Tehnică, 1962.

Lucrarea conține circa 400 de probleme rezolvate din cartea „Lecții de geometrie elementară — Geometrie în spațiu" de J. Hadamard. Problemele sînt din secțiunile: Planul și dreapta, Poliedre, Deplasări — simetrii — asemănare, Corpuri rotunde și Complemente de geometrie în spațiu (capitolele: Poli și polare în raport cu sfera — inversiunea în spațiu — complemente de geometrie sferică, Ariile poligoanelor sferice și Teorema lui Euler — poliedre regulate).

Se adresează cadrelor didactice din învățămîntul de cultură generală și învățămîntul tehnic, studenților din primul an de studii, elevilor înaintați și candidaților la examenul de admitere în învățămîntul superior.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 15 octombrie 1962 s-au mai evidențiat ca rezolvitori de probleme propuse în G.M.F.-B, următorii:

1. **Zisu Tudor**, (cl. XI, ș.m. 34 București), 2. **Lusztig A. Gheorghe** (cl. XI ș.m. 5 Timișoara), 3. **Zisu N. Ana** (cl. X ș.m. 34 București), 4. **Grigorescu I. Șerban** (cl. XI ș.m. 1 București), 5. **Vîlceanu Sabin** (student București), 6. **Alexandrescu Petruș** (cl. XI Găești), 7. **Stancu M. Ion** (student **București**), 8. **Marian Iuliu** (cl. IX ș.m. 4 Cluj), 9. **Jora Boris** (cl. XI ș.m. Babadag), 10. **Galeczki Gheorghe** (cl. XI ș.m. 1 Lugoj), 11. **Chisăliță Adrian** (student Cluj), 12. **Gheorghiu Ilie** (absolvent Teleajen-Ploiești), 13. **Popovici Cornel** (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 14. **Toma Dragomir** (cl. XI ș.m. 1 Oradea), 15. **Constantin Gheorghe** (absolvent Cîmpulung Moldovenesc), 16. **Stern Toma** (cl. X ș.m. 1 Timișoara), 17. **Zamfir D. Corneliu** (absolvent Pitești), 18. **Grozavu Mihai** (student Timișoara), 19. **Rădulescu Dorin** (cl. VIII ș.m. 11 București), 20. **Șerb Ioan** (cl. VIII ș.m. 1 Lugoj), 21. **Andru Dorina** (cl. X ș.m. 1 Timișoara), 22. **Onofrei Mihai** (cl. X Săveni), 23. **Gropper Jean** (cl. XI ș.m. 11 București), 24. **Migdalovici Marcel** (absolvent Tîrgoviște), 25. **Rujan Octavian** (cl. X ș.m. 1 Timișoara), 26. **Aisner Sergiu** (cl. XI ș.m. 1 Ploiești), 27. **Frangu Octavian** (cl. VIII ș.m. 2 Brăila), 28. **Stănculescu Carmen** (cl. XI ș.m. 1 Oradea), 29. **Acu Dumitru** (cl. XI Năsăud), 30. **Diaconescu Nicolae** (cl. VIII Rupea), 31. **Birză Ilie** (cl. X ș.m. Breaza), 32. **Gologan Viorel** (cl. XI Complexul școlar Bîrlad), 38. **Chiș Gheorgne** (cl. VIII ș.m. 1 Borșa-Maramureș), 34. **Niță Petre** (cl. X complexul școlar Bîrlad), 35. **Juga Mihai** (cl. VIII ș.m. 1 Borșa-Maramureș), 36. **Ionescu Mihai** (cl. XI ș.m. 1 București), 37. **Paidiu Ion** (cl. IX ș.m. 15. București), 38. **Iacobovici Sorin** (cl. XI ș.m. 2 Galați), 39. **Cătălina Ioan** (cl. XI ș.m. 1 Timișoara), 40. **Văcaru Vasile** (cl. IX ș.m. 2 Tîrgu Jiu), 41. **Iancu Ion** (cl. XI ș.m. 1 Pitești), 42. **Aisner Rolanda** (cl. VIII ș.m. 1 Ploiești), 43. **Mărgineanu Doru** (cl. XI ș.m. 1 Pitești), 44. **Vasile Cornel** (cl. X ș.m. 2 Craiova), 45. **Almer David** (cl. VIII. ș.m. 17 București).

Pînă la 15 octombrie 1962 s-au primit soluții bune la problemele propuse în ultimele trei numere ale G.M.F.-B, de la:

AIUD. **Ș.m. Avram Iancu.** Cl. X. Ciup Doina (2596, 97, 305, 32, 59, 72, 403, 11, 22, 28).

ALBA IULIA. **Ș.m. Horia, Cloșca și Crișan.** Cl. VIII. Tulbure Mircea (5248, 56, 57, 59—61, 96, 343—45, E: 1830, 31, 35—37, 39, 41, 43, 45, 47, 50, 51, 58—60, 63, 66, 67, 69, 70).

ANINA. **Ș.m.** Cl. X. Miloiu Doina (5207, 08, 10, 12, 18, 24, 39, 40, 42, 44, 46).

AZUGA. **Ș.m. serală.** Cl. XI. Gavrilă Constantin (5296, 301, 02, 05, 06, 09, 12, 15, 19, 37, 43—45, 55, 92), Păcuraru Ilie (5297, 302, 05, 06, 15, 19, 32, 34, 35, 43—45).

ARAD. **Șc. m. 3.** Cl. X. Mutnyánszky József (E: 812, 780, 824, 36, 57); Rózsa Lajos (E: 812, 780, 870, 73, 76, 77).

BAIA SPRIE. **Șc.m.** Cl. X. Ferenczy János (E: 812, 780, 873, 74, 76, 78, 79, 88, 92).

BABADAG. **Ș.m.** Cl. XI. **Jora Boris** (5296—99, 301, 02, 05, 07, 08, 11—15, 17—19, 21, 27, 29, 32, 34—37, 43—45, 47, 49—52, 54, 55, 57, 58, 65, 87, 92, 94, P).

BALȘ. **Ș.m.** Cl. X. Olteanu Marin (5296, 98, 305, 13, 14, 39, 43, 45, 47).

BEIUȘ. **Ș.m.** Cl. VIII. Moga Mihai (5297, 327, 39, 45, 407, E: 1843, 45, 51, 59, 63, 64, 66, 70—76, 80).

BIRLAD. **Complexul școlar.** Cl. VIII. Iordan Mariana (5298, 313, 34, 35, E: 1872—74, 76, 79, 80). Cl. X. Armeanu C. (5296—98, 302, 05, 11—15, 17, 21, 27, 45), Boidache Gavrilă (5296—99, 302, 05, 08, 10—15, 17, 21, 27, 28, 32, 43). Cl. XI. Anton Viorel (5249, 53, 54, 59, 60, 67, 70, 74, 81, 96—99, 301, 02, 05, 06, 08, 09, 11, 12, 14, 15, 35—37, 40, 44, 45, 47, 49), **Gologan Viorel** (5251—54, 57, 59—61, 67, 70 ,74, 75, 78, 81, 84, 94, 96—98, 301, 02, 05—09, 11, 13—15, 32, 35—37, 40, 44 ,45, 47—49), **Iordan Dumitru** (5251, 52, 54, 64, 67, 74, 75, 78, 82, 90, 93—98, 301, 02, 05—09, 12—15, 34—37, 40, 44, 45, 47—49), Niță Petru (5251—53, 59—61, 67, 70, 74, 75, 78, 81, 84, 96—98, 301, 02, 05—09, 11—15, 32, 34—37, 40, 44, 45, 47—49), Postolache Liliana (5208, 10, 12, 14, 24, 31, 48, 52, 53, 57, 59, 61, 67).

Școala pedagogică. Anul V. Tăbușcă Ioan (5296, 305, 09, 10, 15, 17, 19, 21, 27, 35, 37, 44, 45, 49).

BLAJ. **Ș.m.** Iacob Mureșan. Cl. X. Simplăceanu Virgil (5296, 98, 99, 305, 06, 09, 11—14, 29, 32, 40, 43—47).

BISTRIȚA. Absolvent Verveagă Titus (5373, 74, 98, 400, 06, 09, 12, 37, 40, 61—64).

BRAȘOV. Ș.m. 1. Cl. XI. Cosmic Adrian (5296, 302, 12—15, 17, 19, 27, 28, 35, 37, 49, 52).

Ș.m. 6. Cl. IX. Delcea Valeriu (5296, 302, 12—15, 19, 28, 34, 37, 52). Cl. XI. Cristea Ion (5296, 302, 12, 14, 17, 27, 35, 37, 52), Petcu Ion (302, 12—15, 19, 27, 28, 37, 52), Pîslaru Emil (5296, 302, 12—15, 19, 28, 35, 37, 52).

Șc. elementară nr. 4. Cl. VII. Bătătorescu Anton (E: 1843, 48, 58, 65, 71—73, 78).

BRĂILA. Ș.m. 1. Cl. IX. Lupu Elena 5208, 12, 17, 18, 24, 36, 38, 42, 48, 57, 58, 66).

Ș.m. 2. Cl. VIII. **Frangu Octavian** (5296, 98, 305, 10, 11, 13—14, 27, 32, 34, 43, 55, 84, 85, 92, 95, E: 1843—45, 47—55, 57—64, 66—68). **Uzinele Brăila.** Onofrei Grigore (5207, 09, 11, 12, 40, 42—45).

BREAZA. Ș.m. **Dimitrie Cantemir.** Cl. X. **Bîrză Ilie** (5210, 58, 64, 68, 71, 83, 84, 96—99, 305, 11, 13, 17, 19, 27, 32, 40, 45, 49, 52, 55, 57, 68, 72, 85—87, 403, 07, 22, 28, 31, 39, 46, 61, 63, 67), Soțcan Nicolae (5296—11, 13, 17, 28, 32, 40, 45, 49, 55, 59, 65).

BOLINTINUL DIN VALE (București). Ș.m. Cl. VIII. Bănică Marieta (5249, E: 1845, 47, 49, 59, 64, 66, 71, 72, 74, 76, 77), Dragomir Maria (E: 1845, 47, 49, 59, 64, 66, 71, 72, 74, 76, 77), Păun Ioan (idem), Tudor Nicoleta (5244, 61, 83, 382, E: 1844, 45, 51, 55, 59, 60, 71).

BORȘA (Maramureș). Ș.m. 1. Cl. VIII. **Chiș Gheorghe** (5305, 13, 28, 32, 45, 49, 61, 83, 92, 407, 28, E: 1850—64, 66—69, 71—78), **Juga Mihai** (5297, 305, 06, 44, 92, 93, 400—02, 28, E: 1846, 48, 52, 54—64, 66—81).

BOTOȘANI. Ș.m. 2. Cl. X. Simion Valentina (5296, 318, 21, 27, 55, 57, 72, 92, 422).

BOZOVICI. Ș.m. Cl. VIII. Vălușescu Ilie (5311, 43—45, E: 1843, 45, 51, 58, 60, 62, 64, 66, 69—79).

BUCUREȘTI. **Studenți:** Borș Andrei (5298, 302, 13, 14, 21, 34, 35, 40, 47, 410, 12), **Potcovaru Gheorghe** (5297, 98, 301, 02, 05—15, 19, 21—24, 27, 28, 30, 32, 34—38, 41, 43—45, 47—49), **Stancu M. Ion** (5299—301, 04, 06, 09, 10, 18, 20, 22—24, 26—29, 39, 43, 46, 48, 50, 54, 55, 61, 65, 68, 71—76, 79, 92, 94, 95, 97—400, 10—12, 22—24, 30, 32). **Vîlceanu Sabin** (5296, 98, 301, 02, 05—12, 15, 16, 27, 28, 30—32, 36, 37, 40, 43—46, 48, 49, 436, 39—42, 46, 48, 54, 55, 57, 58, 61, 63, 64, 66).

Ș.m. 1. Cl. IX. Ciobanu Nicolae (5296, 97, 311, 13, 14, 17, 21, 27, 39, 44, 45, 47, 49, 51), Ștefănescu Sabba (5296, 97, 311, 13, 14, 17, 21, 27, 28, 39, 44, 45, 49, 51), Ștefan Miron (5137, 217, 21, 36, 38, 57, 61, 70, 96, 97). Cl. X. Arsene Ion (5299, 306, 09, 39, 43, 45, 55, 84, 92, 95, 98, 403, 14, 22), Colban Mihai (5299, 306, 09, 11, 55, 84, 92, 93, 95, 98, 403, 14, 22). Ene Ștefan (297, 302, 12, 13, 15, 27, 28, 37, 55, 92), Ionescu Barbu (5248—53, 96, 98—301, 06, 09), Cl. XI. Anastasescu Ion (5248—53, 57—62, 64, 66), **Ionescu Mihai** (5296, 97, 300, 02, 05, 12—15, 17, 19, 21, 27, 28, 32, 35, 37, 39, 43—45, 47, 49, 50, 55, 58, 65, 74, 92, 400, 03, 06, 09, 22, 30, 32), Lăzărescu Constantin (5296—302, 05—10, 12—15, 17, 19, 21, 27, 28, 37, 49), Taflaru Alex. (5296—98, 302, 05, 06, 08—10, 12, 13, 15, 18, 27, 37, 44, 54, 55, 72, 92, 400, 12, 22, 30). **Grigorescu Șerban** (5357, 58, 60, 65, 66, 68, 72, 76, 80, 81, 84—89, 92—98, 401—07, 09, 11, 15, 17—19, 22, 24, 27—34, 39, 43, 46—50, 52, 55—58, 61, 63, P).

Ș.m. 2. Cl. XI. Grigoriu Mihai (5207—10, 12, 14, 15, 17, 18, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 36, 39—46, 68, 72, 78, 79, 84, 90).

Ș.m. 3. Cl. V. Nicolescu Nicolae (E: 1843, 45, 59, 60, 63, 71, 73). Cl. VIII. Popescu Radu (5393, 95, E: 1858—60, 63, 64, 66, 69, 70, 73).

Ș.m. 4. Cl. XI. Gruia Mariana (5258, 49, 52, 56, 57, 59, 61, 62, 312, 15, 35).

Ș.m. 5. Cl. VII. Nicoară Bogdan (E: 1843, 45, 53, 58—60, 62—64, 67).

Ș.m. 7. Cl. IX. Racoveanu Dragoș (5248—51, 58, 61, 64, 86, 332, 35).

Ș.m. 10. Cl. XI. Negru Sanda (5296, 307, 08, 15, 35, 37, 44, 55, 80, 86, 92, 94, 96, 403, 22, 28, 30).

Ș.m. 11. D. Cantemir. Cl. VIII. **Rădulescu Dorin** (5384, 92, 411, 27, 66, E: 1857—76, 78—80, 82—85, 87—90, 92). Cl. IX. Mihalea Dan (5250, 86, 314, 50, 53, 57, 84, 85, 419, 22), Ursulescu Octavian (5297, 302, 07, 08, 12, 14, 15, 32, 35, 55, 58, 65, 92, P). Cl. X. Kahane Silvian (5296, 98, 99, 317, 40, 84). **Gropper Jean** (5296—98, 301, 02, 05—15, 27, 29, 32, 35—37, 40—47, 48, 54, 55, 58, 63, 84, 92, 93, 95, 96, 404, 07, 09, 22), Ursulescu Florin (5297, 300, 02, 07, 08, 12—15, 32, 35, 37, 43, 45).

Ș.m. 12. Cl. X. Nicolaide Alexandra (248—50, 61, 74, 86, 96—98, 314, 32, 55). Cl. XI. Deutsch Ștefan (5296—99, 301, 02, 05, 06, 13, 17, 27, 52).

Ș.m. 13. Cl. VIII. Otopeanu Alexandra (5385, 93, E: 1857—60, 62—64, 66, 70—73, 75, 77, 80). Cl. X. Cojan Ștefan (305, 09, 11, 13, 14, 17, 27, 32, 43, 47, 55, 92, 96, 422), Constantinescu Dan

(5296, 305, 11, 14, 21, 27, 32, 39, 43, 55, 85, 92, 422), Flondor Paul (5238, 65, 68, 85, 402, 03, 11, 22, 24, 28). Cl. XI. Guţă Cristian (270, 77, 96, 98, 302, 05, 07, 08, 10—13, 15, 16, 27, 28, 32, 35—37, 44, 45, 49, 55, 72, 84, 92, 95, 406, 12, 22, 30), Saur Şerban (5296, 313, 32, 34, 41, 43—45, 55, 422, 28).

Ş.m. 15. Cl. IX. Mereuţă Doina (5248—50, 61, 74, 86, 96—98, 13, 14, 52, 55), **Paidiu Ion** (5297, 99—301, 13, 21, 27, 28, 39, 40, 43, 44, 47, 55, 58, 65, 66, 82, 83, 87—89, 92—96, 400, 06, 07, 11, 12, 14, 17, 22, 27, 30, 31).

Ş.m. 17. Cl. VIII. Abramovici Eugen (5258, 60, 61, 312, 27, 28, E: 1834, 53, 58, 60, 62—64, 66, 67, 69, 70), Almer David (5296, 97, 305, 06, 09, 11, 27, 39, 43, 55, 92, 422, E: 1845, 47, 48, 53, 56—60, 62—64, 66, 67, 70—76, 78—81), Kanner Dan (5306, 17, 43—45, 92, 419, 22, E: 1860, 68, 73, 80).

Ş.m. 18. Cl. IX. Iordache Floric (5296, 305, 13, 28, 84, 85, 92, 411, 22).

Ş.m. 19. Cl. X. Popescu Breasta (5296, 302, 08, 09, 12—15, 32, 35, 37, 41, 44, 45).

Ş.m. 20. Cl. XI. Negoescu Gh. M. (5296—98, 302, 05, 14, 15, 19, 27, 32, 35, 37, 44, 45, 49), Pitulice Patru (5298, 305, 13, 14, 32, 41, 44, 45, 55, 60, 72, 401, 03, 09, 28), Rusu Adrian (5296—98, 301, 02, 07, 12—15, 27, 28, 35, 37, 41, 43, 44, 55, 68, 84, 85, 92, 406, 09, 22, 30).

Ş.m. 23. Marvin Alexandru (E: 1858, 63, 66, 71, 73, 74, 76, 77, 79).

Ş.m. 24. Cl. VI. Năstase Adrian (E: 1871—73, 75, 77, 78), Cl. XI. Popescu Gh. Domiţian (5306, 08, 09, 87, 97—400, 03, 06, 08—10, 17, 19, 20, 22, 24, 27—31).

Ş.m. 32. Cl. IX. Florea George (5242, 38, 44, 96—99, 305, 06, 17, 18, 28, 39, 43, 45). **Ş.m. 34.** Cl. X. **Zisu Ana** (5208, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 29, 34, 36, 38, 39, 40, 42—51, 58—62, 64—67, 69—71, 74, 81, 83, 84, 86, 95, 353, 55, 56, 57, 65, 74, 84, 87, 92—96, 98, 400, 02, 03, 06, 09, 11, 12, 14, 22, 24, 27, 28, 30). Cl. XI. Zisu Tudor (5071, 92, 94, 153, 76, 94, 99, 207, 08, 10, 12, 14, 16—18, 21, 23, 24, 27, 29, 31, 34, 36, 38—40, 42—46, 48, 51, 53, 58—60, 62, 64, 66, 67, 69—71, 74, 80—84, 86, 93, 95, 312—15, 44, 55, 65, 92—400, 02, 03, 06, 09—12, 22—24, 27—30, 33, P).

Şc. elem. nr. 23. Cl. VI. Georgescu Maria (E: 1843, 45, 59, 60, 63, 64), Petrescu Cornelia (E: 1863—66, 71—77).

Şc. elem. nr. 46. Cl. VII. Popescu Dana (5311, E: 1843, 58—60, 62, 63, 66, 71—74, 76, 77).

Şc. elem. nr. 130. Cl. VII. Bogdan Florian (E: 1858, 60, 63, 66, 71, 72, 74, 76), Bogdan Ruxandra (E: 1865, 66, 71, 72, 74, 76), Florea Constantin (E: 1843, 45, 48, 60, 63, 64, 66, 73, 74, 76), Meleşteu Georgeta (E: 1813, 57, 58, 64, 66, 71, 72, 75), Sima Nicolae (E: 1845, 48, 63, 66, 71, 73).

BUŞTENI. **Ş.m.** Cl. VIII. Avram Dorina (E: 1843, 56, 71—73, 75, 79).

BUZĂU. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. **Andreescu Liviu** (5208, 16, 24, 49, 56—58, 64, 66, 70, 96, 310, 11, 28, 45, 55, 95, 407, 22, E: 1824, 43—47, 50, 58—60, 62—64, 66, 67, 70, 73, 74, 76, 79, 80). Cl. XI. Ionescu Greogorian (5296, 98, 307, 55, 74, 84, 92, 95, 409, 22, 24, 28).

Ş.m. 2. Cl. VIII. Ciocoiu Virgil (5218, 355, 92, E: 1802—04, 06—11, 13, 14, 57, 73, 80).

CARANSEBEŞ. **Ş.m. 1.** Cl. IX. Bena Dorin (5296, 97, 306, 09, 11, 13, 14, 18, 27, 32, 43—45, 49, 55, 72, 84, 92, 93, 95).

Ş.m. 2. Cl. XI. Titel Ligia (5296—98, 301, 02, 05, 08, 12, 15, 27, 43—45, 55, 400, 09).

CĂLĂRAŞI. **Ş.m. N. Bălcescu.** Cl. X. Georgescu Dan (5248, 50, 57—62, 64, 66, 70, 74, 81, 84, 86, 96—98, 302, 12, 13, 15, 37, 45).

CIMPINA. **Ş.m. 2.** Cl. X. Brad Ion (5296, 302, 07, 11, 13, 15, 19, 36, 37, 40, 41, 43, 44, 55, 84, 95).

CIMPULUNG MUSCEL. **Ş.m. Dinicu Golescu.** Cl. IX. Tomescu Şerban (5296—99, 306, 09, 11, 13, 14, 17, 21, 27, 28, 32, 40, 43, 45, 47, 49, 50). Cl. X. Stoicea Marcel (5214, 21, 29, 38, 48, 49, 51—53, 57—62, 64, 66—68, 70, 71, 81, 83, 86).

CIMPULUNG MOLDOVENESC. Absolvent Constantin Gheorghe (5296—98, 300, 02, 04, 05, 07, 12—15, 18, 19, 24, 28, 31—34, 36, 37, 97—99, 400, 04, 06, 08, 09, 11, 12, 17, 22, 24, 27, 28, 30, 38, P).

CLUJ. **Student Chisăliţă Adrian** (5397, 98, 400, 03, 05—09, 14, 19, 20, 22—24, 27—36, 39, 41, 43, 45—48, 51, 54, 55, 58, 61—63, P).

Ş.m. Ady Şincai. Cl. XI. Pop Marius (5297, 306, 09, 11, 13, 17, 27, 40, 44, 47, 85, 93, 95, 96, 400).

Ş.m. E. Racoviţă. Cl. XI. Beteanu Lelia (5299, 307, 08, 11, 14, 19, 21, 27, 36, 51, 55, 92, 95, 400, 09, 22).

Ş.m. G. Bariţiu. Cl. X. Călugăreanu Grigore (5224, 42, 51, 67, 83, 305, 07, 13—15, 28, 32, 34, 45, 55, 92), **Marian Iuliu** (4915—18, 21, 24—30, 39, 48, 50, 58, 5067—72, 87, 95—97, 109—13, 15—17, 30, 35, 39, 41, 59, 60, 67, 69, 70, 75, 80, 89, 93, 95, 97, 99, 206, 48—50, 56—59, 61, 62, 66, 67, 70, 71).

COSTEŞTI. **Ş.m.** Cl. X. Nedea Constantin (5297, 98, 301, 02, 05, 07, 09, **12**, 17, 27, 28, 32, 35, 43, 49, 55, 65).

CONSTANŢA. **Ş.m. 1.** Cl. VIII. Văituş Anca (5407, 15, E: 1859, 71, 73—77, 79—81).

Ş.m. 3. Cl. X. Popovici Beatrice (5296, 97, 302, 12, 39, 45, 55, 92, 94, 96, 400, 12, 22, 27, 30).

Ş.m. 4. Cl. IX. Luca Ion (5296—99, 306, 11, 13, 14, 17, 18, 21, 27, 28, 32, 40, 43—47, 51, 55, 72, 85, 92, 95, 406, 22).

CRAIOVA. **Ş.m. 1.** Cl. IX. Georgescu George (5307, 08, 21, 26, 27, 34, 45, 47, 49, 53, 55, 57, 58, 60, 66, 85, 87).

Ş.m. 2. Cl. VIII. Guşoiu Liviu (E: 1857, 58, 63, 59, 69, 71—76, 78—81), Piţurescu Ionel (5422, E: 1857—59, 63, 64, 66, 71—74). Cl. X. Gropper Mircea (5296, 98, 314, 27, 55, 58, 92, 406, 11, 22), **Vasile Cornel** (5248—53, 57—63, 66, 67, 70, 74, 78, 81, 96, 98, 302, 12, 13, 15, 19, 21, 28, 35, 51, 55, 58, 65, 80, 81, 94, 96).

Ş.m. 3. Cl. VIII. Diaconescu Miheala (E: 1845, 47, 58, 63, 64, 66, 71, 73, 77, 80).

Ş.m. 4. Cl. IX. Boicescu Vlad (5248, 96—99, 305, 07, 13, 14, 17, 27, 28, 32, 40, 43—45, 52, 55).

CURTEA DE ARGEŞ. **Ş.m.** Cl. X. Bărănescu Vasile (5296—98, 313, 27, 43, 45, 92, 411).

CLUJ. **Şc.m. Ady-Şincai.** Cl. VIII. Semlyén János (E: 806, 07, 08, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 888); Cl. X. Pongrácz József (E: 812, 888, 91, 92). **Şc. de 7 ani nr. 18.** Cl. VII. Frajkó László (E: 806, 10, 12, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27).

DEJ. **Şc. m. Unificată.** Cl. IX. Barth László (E: 812, 780, 867, 73, 74, 75, 78, 79, 83, 87, 88, 89, 91, 92). **Şc.m. de 7 ani nr. 3.** Cl. VI. Barth Ferenc (E: 806, 08, 12, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27).

DITRĂU. **Şc.m.** Cl. VIII. Ambrus András (E: 812, 19, 20, 21, 24).

DEVA. **Ş.m. Decebal.** Cl. VIII. Răgălie Ştefan (5214, 43, 48, 49, 56, 57, 59—62, 66, 70, 71, 81, 86, E: 1812, 16, 18, 21—23, 25—32, 35, 37).

DOMNEŞTI (Argeş). **Ş.m. 2.** Cl. VIII. Moisescu Vasile (5257, 62, 70, E: 1830, 31, 35—37, 41, 45, 47, 58, 63, 66).

FINTINELE (Ploieşti). Învăţător Gheorghiu Grigore (5297, 98, 302, 05, 06, 12, 13, 15, 20, 22, 33, 34, 52, 73, 74, 92, 97—99).

FĂGĂRAŞ. **Ş.m. 1.** Cl. IX. Gravu Gheorghe (5926, 97, 345, 84, 422).

FĂLTICENI. **Ş.m. 2.** Cl. VIII. Cimbru Gheorghe (5343, 45, E: 1843, 45, 47, 58, 60, 63, 73), Grumberg Tania (E: 1843, 44, 47, 49, 59, 62, 63, 66, 73), Zoiţa Vasile (5343, 45, E: 1843, 45—47, 52, 53, 58, 60, 62, 63, 66, 71, 73—77, 79, 80).

FLOREŞTI (Ploieşti). **Ş.m. Victoria.** Cl. IX. Şerban Ion (5268, 70, 74, 86, 96, 97, 99, 317, 21, 27, 48, 50, 51, 55, 64, 72, 85, 94, 95, 422, 24).

FOCŞANI. **Ş.m. Unirea.** Cl. X. Mendelsohn Zephy (5296—98, 305, 09—11, 13, 14, 17, 19, 27, 32, 39, 43, 45, 47, 49—51, 55, 57, 59, 74, 82, 84, 93, 95, 403).

GAEŞTI. Cl. XI. **Alexandrescu Petruş** 5158, 60, 61, 63, 65, 70, 85, 88, 93, 96, 202, 07, 08, 10, 12, 21, 31, 42, 46, 49, 52, 53, 57—62, 66, 67, 70, 74, 81, 83, 85, 86, 312, 28, 44, 49, 52, 57, 58, 66, 98, 400, 02, 03, 22, 30).

GALAŢI. **Ş.m. 1.** Cl. X. Ciobanu Claudiu (5296, 306, 09, 10, 13, 21, 27, 28, 32), Friederich Sergiu (5296, 97, 99, 305, 13, 14, 28, 32, 45, 52, 422, 23, 27, 28), Pană Horia (5305, 11, 21, 28, 32, 84, 95, 414, 22). Cl. XI. Cahane Mendi (5212, 14, 21, 31, 57, 65, 66, 67, 70, 74, 76. 81, 86, 96, 97, 305, 11—13, 21, 28, 55, 84, 95, 414), Mihailovici Marcel (5297, 301, 05, 07, 11, 21, 28, 37, 84, 92, 95), Prodan Const. (5296, 97, 301, 02, 12, 14, 15, 21, 27, 32, 35, 37, 41, 45, 55, 72, 400, 22, 28).

Ş.m. 2. Cl. IX. Marcu Zamfirel (5296, 313, 14, 18, 28, 32, 50, 55), Stănculea Aurelia (5296, 97, 313, 14, 18, 28, 32, 50, 55, 424), Cl. XI. Constantin Gheorghe (5307, 13, 15, 44, 45, 50, 55, 65, 66, 92, 422, 24), Dodu Marian (5300, 12, 19, 27, 28, 37, 43, 45, 51, 65, 66, 92, 95, 98, 400, 02, 06, 09, 10, 12, 17, 19, 22, 30, 32), Grigore Elena (5296—98, 12, 13, 15, 19, 32, 34, 44, 92, 422), **Iacobovici Sorin** (5296—98, 302, 07, 08, 12—15, 18, 19, 27, 29, 32, 35, 37, 41, 44, 45, 48—50, 55, 65, 66, 68, 72, 80, 84, 92, 95, 400, 02, 09, 12, 18, 22, 24, 30), Jicol Olga (5298, 302, 05, 12, 13, 15, 32, 55, 92, 400, 28, 30), Stanciu Margareta (5312, 15, 19, 41, 43—45, 48, 50, 65, 66, 92, 96, 422, 24), Toader Elena (5296, 97, 302, 07, 12—15, 18, 19, 28, 32, 41, 43—45, 48, 50).

Ş.m. 3. Cl. IX. Bratu Vasile (5296—99, 305, 06, 10, 11, 13, 14, 16—19, 21, 27, 32, 39, 40, 43, 45—47, 49—51, 98, 403,

15, 21, 22). Cl. X. Domoşcan Mihai (5296, 97, 99, 305, 06, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 27, 32, 39, 40, 43, 45—47, 49, 51, 55, 98, 403, 15, 21, 22), Zaharia Iftimie (296, 97, 305, 11, 13, 14, 19, 32, 40, 43, 45, 47, 49).

Ş.m. 5. Cl. VIII. Andraşi Nicolae (5299, 307, 12, 14, 27, 32, 37, 49, 51, 52, 403, 14, E: 1873, 79, 80), Lucaci Pompiliu (5298, 307, 12, 14, 15, 27, 32, 37, 49, 51, 52, 55, 84, 92, 95, 403, 14, 42, E: 1849, 52, 57, 58, 60, 62—64, 68, 70, 73, 75, 79, 80). Cl. XI. Lucaci Nicolae (5299, 312, 14, 15, 18, 27, 32, 37, 49—52), Solomon Ludwig (5299, 14, 27, 28, 51, 52, 55, 84, 92, 95, 403, 14, 22), Tănase Paul (5296—98, 311, 14, 15, 28, 35, 37, 43, 44).

Şc. elementară nr. 20. Cl. VI. Pătru Mioara (E: 1845, 59, 63, 64, 71, 73). Cl. VII. Călin Adriana (E: 1858—60, 63, 66, 67, 73), Conţ Mia (E: 1858, 59, 62—64, 66, 67, 72), Dabija Paul (E: 1858, 59, 63, 66, 71, 73), Dima Steluţa (E: 1858, 59, 63, 66, 71, 73, 76), Dumitru Gabriela (E: 1858, 59, 62, 63, 66, 73), Iordache Costel (E: 1858, 59, 62, 63, 66, 71, 73), Toader Mariana (E: 1858—60, 63, 66, 67, 73).

Şc. elementară nr. 21. Cl. V. Cărăbăţ Cornelia (E: 1845, 59, 60, 63, 71—73). Cl. VI. Caraghiosu Angela (E: 1845, 59, 60, 64, 66, 71, 73).

GHERLA. **Şc.m. Petru Maior.** Cl. XI. Nagy Sándor (E: 812, 780, 875, 76).

GIURGIU. **Ş.m.** Cl. X. Berbece Nicolae (5297, 98, 305, 27, 32, 43, 45, 49, 401, 06, 11, 22).

HOREZU (Argeş). **Ş.m. Al. I. Cuza.** Cl. X. Costescu Ion (5296—99, 305, 13, 14, 17, 27, 28, 45, 92, 411).

HUŞI. **Ş.m. M. Kogălniceanu.** Cl. X. Obreja Vasile (5297, 98, 327—40, 43, 45—47, 51, 55).

IAŞI. **Ş.m. 1.** Cl. XI. Goldemberg Daniel (5296, 97, 99, 301, 02, 05—07, 09—15, 17, 19, 27, 37, 40, 41, 43—47, 49).

Ş.m. 4. Cl. IX. Hîrţogeanu Ioana (5296—99, 305, 10, 13, 15, 17—19, 21, 27, 28, 32, 49, 50). Cl. XI. Cozma Rodica (5296, 97, 302, 05, 08—10, 13, 15, 19, 27, 35—37, 45, 55, 65, 87, 92—96, 400, 17, 32, 20, 32).

Ş.m. 6. Cl. IX. Cogan Hary (5302, 06, 08, 09, 11, 12, 37, 43, 55, 59, 63, 95, 96, 422). Cl. X. Brüll Adonel (5296—98, 305, 10, 17, 27, 43, 45, 55, 86, 92, 95, 422), Schwartz Jerry (5296—99, 305, 10, 11, 13, 17, 27, 40, 43, 45, 49, 55, 86, 92, 95, 414, 27). Cl. XI. Bolocan Mihai (5302, 06, 08, 09, 11, 37, 39, 43, 55, 63, 95, 96, 422), Goleru Constantin (5312, 14, 28, 32, 40, 52, 63, 66, 87, 93, 96, 400, 22).

Ş.m. 7. Cl. VII. **Burduja Gheorghe** (E: 1843, 45, 53, 58—60, 62—64, 66; 5395). Cl. VIII. Florescu Doru (E: 1843, 44, 46, 47—58, 61, 66, 67, 70; 5327, 43), Mihăilescu Cornelia (5297, 305, 49, 57, 84, 85, 92, 95, 402, 03, 22, 28). Cl. IX. Gola Constantin (E: 1843—47, 58, 61, 64, 66, 67, 70; 5343), Giulică Aurel (E: 1845—47, 53, 57, 58, 64, 71, 73, 75; 5327), Iancu Radu (E: 1843—47, 58, 61, 64, 66, 70, 73; 5343), Mariniu Petru (E: 1845—47, 53, 57, 58, 64, 71, 73, 75), Nicoară Magda (E: 1843—47, 58, 64, 66, 70; 5327, 63, 97).

LUGOJ. **Şc. elem. de 7 ani nr. 5.** Cl. VII. Tudoroniu Lucian (E: 1846, 53, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 73).

Ş.m. 1. Cl. VIII. Ambruş Mircea (E: 1857, 58, 61, 63, 66, 69, 71, 73, 75, 77, 80; 5327, 28, 55), **Şerb Ioan** (E: 1843—48, 50—55, 57—59, 61—68, 70—77, 80; 5311, 13, 44, 55, 72, 84, 85, 92, 95), **Popovici Cornel** (5223, 24, 48, 51, 334, 55, 76, 87, 92, 94, 95, 98, 400, 06, 09, 11, 22, 27, 30—32, E: 1839, 47, 50, 57, 58, 60, 63, 64, 66, 69, 71—77, 79, 80), Cl. XI. **Galeczki Gheorghe** (5321, 27, 48, 55, 60, 65—69, 77, 86—89, 92—400, 03, 06, 07, 09, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 22—24, 28, 30, 32, 34, 36, 55, 63), Hashoiu Mircea (5297, 302, 06, 10—14, 32, 35, 37, 44, 86).

MARGHITA. **Ş.m.m.** Cl. VIII. Galya Iulianna (E: 1843, 45, 47, 55), Kasa Zoltan (E: 1843—45, 47, 48, 51, 55, 56), Szoros Tibor (E: 1843—45, 47, 51, 55, 56), Tarnady Janos (E: 1843—45, 47, 48, 51, 55, 56).

MĂRĂŞEŞTI. Ş.m. 1. Cl. X. Mincinopschi Gheorghe (5146, 71, 202, 18, 31, 69, 71, 72, 83, 97, 99—301, 27, 28, 36, 40, 43, 46, 54, 55, 72, 84—86, 88, 92—96, 400, 03, 07, 10, 30).

MĂURENI. **Şc. de 8 ani.** Cl. VII. Melcher Gertrude (E: 1858, 59, 62, 64, 66, 71, 74—76, 78, 60, 63), Kovacs Hildegard (E: 1858, 59, 62, 64, 66, 71, 73—76, 78), Raab Johanna (E: 1858, 59, 62, 64, 66, 71, 73—76, 78).

MARGHITA. **Şc.m.** Cl. VIII. Szörös Tibor (E: 817, 20, 21, 25); Cl. IX. Kali Ildikó (E: 812, 853, 55, 59, 63, 67, 69, 73, 74); Szörös Sándor (E: 812, 867, 69, 73, 74, 87, 91).

MEDGIDIA. **Şc. m. serală.** Cl. IX. Vlase Aurelia (5355, 72, 84, 85, 92, 93, 95, 401, 07, 14, 15, 19, 23, 56, 60, 68).

MORENI **Ş.m. 1.** Cl. VII. Bălaşi Silviu (E: 1858, 63, 66, 71—74, 76). Cl. VIII. Popescu Lucian (E: 1843, 45—47, 63—66, 67, 69, 70, 73; 5305, 43, 45).

MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Se primesc lunar într-un plic soluţii numai la problemele şi exerciţiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea şi şcoala pe care o urmează rezolvitorul pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme şi a listei celor evidenţiaţi. **Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 36 soluţii bune.**

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce, să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie **făcute de mai multe ori înainte de a fi trimise**, pentru ca redactarea lor să fie **cît mai clară şi concisă**. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\parallel =$; $\sim$; $\ast\ \ast\ \ast$; $\perp$; $\parallel$; Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a putea urmări uşor desfăşurarea unei demonstraţii. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor IX—XI sau studenţii vor trimite soluţii la problemele propuse pentru clasele VIII—XI. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.F.—B sau M.F.L. Problemele rezolvate de matematică şi fizică vor fi expediate odată în cursul unei luni într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate.

Elevii claselor V—VII vor fi anunţaţi la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit cel puţin 7 probleme bine rezolvate, iar elevii VIII—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate. Elevii din clasa VIII pot trimite soluţii şi la E : V—VIII.

— Colaboratorii G.M.F.-B, profesori şi elevi, sînt rugaţi să trimită îndată redacţiei, fişa completată cu activitatea extraşcolară şi în cercurile de elevi pe anul 1961—1962, conform celor publicate în nr. 1, 1962, pag. 30. Activitatea rezolvitorilor din nr. 11—12 ale G.M.F.-B. se va trece de către redacţie.

Evidenţiaţii de cel puţin 2 ori pot trimite totalizarea problemelor rezolvate şi anunţate în nr. 1—11 G.M.F.-B-1962, dacă au însumat minim 140.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării persoanele pe care o trimit pentru publicat şi adresa lor exactă.

Pînă la 20 octombrie 1962 s-au primit fişele la întrecerea pe anul 1961—1962 de la următoarele şcoli medii din ţară: Aiud, Alexandria, (Ş. m. 1), Botoşani (Ş. m. 1), Borşa (Maramureş), Brăila (Ş. m. 2), Bucureşti (Ş. m. 1, 10, 11, 13, 22). Caransebeş (Ş. m. 1, 2), C-lung Moldovenesc, Oradea (Ş. m. 1, 3), Năsăud, Rupea, Petroşeni, Piatra Neamţ (Ş. m. 1), Salonta (Ş. m. 1), Sighet, Sinaia, Turda, Tr. Măgurele, Tr. Severin (Ş. m. 1).

Rugăm responsabilii cu activitatea de informare ştiinţifică din celelalte şcoli medii în cadrul S.S.M.F. să ne trimită de îndată fişa cu punctajul obţinut conform celor publicate în G.M.F.-B pag. 30 şi 151 din 1962.

CARȚI DIN BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R. CARE SE MAI GĂSESC ÎN LIBRĂRII

GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, ed. IV-a (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
H. STEINHAUS	Caleidoscop matematic.
C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura; originea și evoluția lor.
C. DRIMBA	Elemente de mecanică cerească.
C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
A. I .MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivata ?
G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.
A. IAGLOM și I. IAGLOM	Probleme neelementare tratate elementar.
CIUCU și SIMBOANU	Culegere de probleme de calculul probabilităților și statistică.
N. D. FEDOROV	Ciclotronul.
O. SACTER	Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente.
V. ATANASIU	Noțiuni de fizică generală. Vol. I.
C. BORȘ și D. BORȘ	Numere complexe.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

pentru elevii școlilor medii, profesionale, pedagogice și tehnice de maiștri, din anul 1963, are loc astfel:

— etapa locală	la 10 februarie 1963 (matematică)
— etapa locală	la 17 februarie 1963 (fizică)
— etapa regională	23, 24, 25 martie 1963
— etapa finală	26—28 mai 1963.

— **Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.**

— *Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.*

Întreprinderea Poligrafică Nr. 6 — c. 5072

Lei 1,50

E1426

KAT

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XIII decembrie 1962

12

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 12 — decembrie 1962

SUMARUL

		Pag.
1.	Arhimede, de Al. Myller, Iaşi	705
2.	Camera cu bule de Kelemen Friederich, Cluj	712
3.	Cubajul buştenilor de Kovacs Koloman, Cluj	719
4.	Notă matematică de Gh. Lusztig, Timişoara	722
5.	Olimpiada de matematică şi fizică 1962 (Dare de seamă)	723
6.	Programa olimpiadei de matematică şi fizică 1963 pe etape	726
7.	Caleidoscop matematic de Viorel Vodă	729
8.	Probleme rezolvate (4906; 4920; 4932—34; 4943; 4946—4948; 4951; 4955; 4962; 4974; 4979; 4980; 4988; 4993—4996; 4998; 4999 M.F.L. 828—830).	730
9.	Probleme propuse (5541—5564)	748
10.	Chestiuni de examen (5565—5587)	752
11.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VIII (E: 1915—1925)	757
12.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	758
13.	Tabla de materii a G.M.F.-B pe anul 1962	761

ANUL XIII 12 DECEMBRIE

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Cristea I.*, asistent; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Kiss E.*, conf. univ.; *Koch Fr.*, lector; *Kovacs K.*, conf. univ.; *Lévai Şt.*, asistent; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu Gh.*, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti 1

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 12 decembrie 1962

ARHIMEDE

de Acad. *A. MYLLER*

Un cunoscut matematician italian, care pe deasupra este și un eminent istoric al matematicilor, *Gino Loria*, spunea, într-o conferință asupra tradițiilor matematice italiene, că nu s-ar încumeta să pună originea matematicilor italiene la *Arhimede siracuzanul*. Aceasta din pricină că, pe atunci, *Siracuza*, era o înfloritoare colonie grecească, iar *Sicilia* era locuită de o sumedenie de popoare, unele străine, altele aborigene, care, sub influența elină, vorbeau o limbă nu prea depărtată de sacrul idiom al *Eladei*.

Mai drept ar fi să se spună, că *Arhimede* aparține orașului *Siracuza*, orașul în care el s-a născut, a trăit, unde și-a manifestat geniul și unde a murit eroic.

Arhimede este însă, nu numai un mare matematician al *Siracuzei* și al antichității, dar și unul al tuturor țărilor și al tuturor timpurilor. *Pliniu* l-a numit zeul matematicilor, *Leibniz* a scris că, dacă cunoști opera lui *Arhimede*, nu mai poți admira descoperirile noi, iar contemporanul nostru *Felix Klein* socotea că cei mai mari matematicieni ai lumii sînt trei: *Arhimede, Newton* și *Gauss*.

De la *Arhimede* s-au păstrat, deși nu toate, cele mai multe și cele mai importante din scrierile lui teoretice. Despre viața lui, avem însă foarte puține informații precise. Curios însă, că renumele lui extraordinar se datorează mai mult invențiilor lui de ordin tehnic, cu toate că despre aceste lucruri s-a scris foarte puțin.

Anul morții lui *Arhimede* este cunoscut exact, este anul 212 î.e.n., anul căderii *Siracuzei*, cetate aliată cartaginezilor în al doilea război punic. Marele matematician a fost ucis de un soldat din armata generalului roman *Marcellus*, cînd *Siracuza* fusese cucerită după asediu. Deoarece se știe, prin tradiție, că *Arhimede* ar fi avut atunci 75 de ani, se poate spune, fără a greși prea mult, că s-a născut în anul 287 î.e.n.

Episodul cel mai frumos din biografia lui *Arhimede*, moartea lui, mulți din noi îl cunoaștem ca o poveste emoționantă din copilărie, din vremea cînd învățam istoria romanilor. Un soldat roman a pătruns în grădina lui *Arhimede*, unde el, cufundat în gînduri, ocupat de o problemă, desena cercuri pe nisip: noli turbare circulos meos! nu-mi ștergeți figurile!, spuse *Arhimede* soldatului. Acesta, probabil, nu prea admirator al matematicilor, n-a găsit nimic mai bun de făcut decît să-l ucidă.

Din povestea aceasta, istoricul nu reține decît faptul că *Arhimede* a murit ucis în timpul ocupării *Siracuzei*. Restul intră în domeniul legendei, a fost creat de poporul care-și admira învățații și le dădea un loc de cinste în fantezia lui.

Plutarh, istoricul care ne-a transmis povestea, nu credea, probabil nici el complect, în autenticitatea ei. Așa se explică faptul că el ne-a dat și o altă variantă, mai puțin poetică, a morții lui *Arhimede*. Ar fi fost ucis pe străzile *Siracuzei*, pe cînd ducea lui *Marcellus* o ladă cu instrumentele și modelele lui științifice. Soldații crezuseră că în ladă era aur.

Istoricii greci și romani, care s-au ocupat de această problemă, relatează că *Marcellus* dăduse ordin ca *Arhimede* să fie cruțat, să nu se atingă vreun soldat de dînsul. Aflînd de moartea marelui învățat, generalul, adînc afectat, a pus să i se facă o înmormîntare fastuoasă, iar pe mormîntul lui a fost ridicată o coloană, pe care a fost sculptată o sferă cu cilindrul circumscris, ca să amintească de o importantă descoperire a lui.

Un savant istoric sovietic, *Luria*, nu crede însă în gestul mărinimos al lui *Marcellus*. Pentru el, gestul a fost născocit de romani ca să mascheze o crimă, care ar fi pus în lumină nefavorabilă pe generalul lor renumit. În favoarea lui *Marcellus* există și un frumos portret al acestuia făcut de *Plutarh*: Oțelit în meseria armelor, voinic și plin de îndrăzneală, născut, parcă, să fie militar, nu manifesta decît în luptă această ardoare și mîndrie naturală. În restul vieții era modest și uman, iubind cu pasiune literatura greacă și elocința și era plin de admirație pentru cei ce se distingeau.

În orice caz, monumentul lui *Arhimede* a existat, avem mărturia neîndoielnică a lui *Cicerone*. Marele orator și scriitor, în anul 75, fiind chestorul Siciliei, a căutat mormîntul și mărturisește în „Convorbiri tusculane", că l-a găsit cu oarecare greutate, pierdut între buruieni și mărăcini, și a dispus să fie restaurat.

În afară de moartea lui tragică și anii războiului, se pare că viața lui *Arhimede* s-a scurs liniștit, a trăit retras, numai cu preocupările de savant. Ca rudă a tiranului *Siracuzei*, *Hieron* al 2-lea și ca prieten al fiului lui *Gelon*, ar fi putut să ducă viața lipsită de griji a curteanului, dar el a preferat studiul.

Plutarh spune că, cu toate că a făcut invenții tehnice care i-au adus reputația unei iscusințe mai mult decît omenești, el a crezut de cuviință să nu lase nimic scris despre aceste lucruri și și-a pus toată ambiția în acele cugetări, care rămîn nepătate de nevoile comune ale vieții.

Faptul că *Arhimede* nu a scris nimic despre invențiile lui tehnice, interpretat în felul acesta idealist, e greu de acceptat. Mai curînd s-ar potrivi să explici această desconsiderare a aplicațiilor practice printr-un fel de modă în știința de atunci, printr-o linie de conduită, impusă de școlile de filozofie idealistă, cărora *Arhimede* n-a avut puterea să le reziste.

Arhimede, printre marii matematicieni ai antichității, prin felul lui de a gîndi, este cel mai apropiat de realitatea materială a adevărurilor geometrice. Pe cînd ceilalți geometri s-au ocupat mai mult de forma abstractizată a figurii, Arhimede s-a ocupat mai mult de măsura ei, a concretizat-o și precizat-o prin numere.

Istoricii antichității, *Polibiu, Tit-Liviu, Plutarh,* povestesc lucruri adevărate, dar și unele exagerate, extravagante chiar, despre mașinile întrebuințate de *Arhimede* în asediul *Siracuzei.* A inventat catapulte, așa de ingenios construite, că puteau bate la distanțe mari și mici ; a inventat mașini, ce aruncau în formă de grindină, din găuri făcute în zidurile cetății, pietre asupra asediatorilor. A construit grinzi lungi eșite din ziduri de pe care se puteau arunca greutăți foarte mari pe corăbiile dușmane și tot cu ajutorul lor, puteau să prindă prin cîrlige corăbiile, să le ridice și apoi să le arunce, scufundîndu-le. A inventat oglinzi, care concentrînd razele solare, ardeau corăbiile inamice.

Arhimede, ca mulți savanți din vremea lui, a făcut o călătorie de studii la Muzeul din Alexandria. Acolo, impresionat de revărsările Nilului și de influența lor asupra agriculturii, a inventat o mașină de irigare, capabilă să aducă apa și la înălțimi, unde nu ajungea în mod natural. A fost așa-numitul melc, un tub de forma elicei. Acesta, cufundat cu un capăt în apă, era învîrtit în jurul axei elicei, și aducea astfel apa la capătul cel mai ridicat, de unde se revărsa.

Arhimede s-a ocupat desigur și de astronomie, era doară fiul unui astronom cunoscut, *Fidias,* care desigur a fost și primul lui profesor de matematică și astronomie. A scris o carte de astronomie, care s-a pierdut", „Despre construcția unei sfere". Aici a descris un model astronomic, inventat de el, o sferă care imită mișcările stelelor, a soarelui, lunei și planetelor, pe bolta cerască. Era ceea ce numim astăzi un „Planetarium". *Cicerone* a văzut acest instrument și a scris despre el în „De republica' Fiind prieten cu un *Marcellus,* nepot al generalului din războiul punic, acesta i-a arătat sfera lui *Arhimede,* singura pradă de război, spunea el, pe care bunicul lui o luase din *Siracuza.*

Legenda și anecdotele, care au împodobit invențiile tehnice ale lui *Arhimede,* au fost aproape singurele izvoare de unde am putut afla oarecare amănunte despre opera lui inginerească. Dar astfel de manifestări nu au lipsit nici cînd a fost vorba de opera lui scrisă, care ni s-a transmis precis și fără îndoieli. Nu le putem neglija, pentru că sînt frumoase și reprezintă un omagiu, pe care poporul îl aduce savanților pentru înțelepciunea lor.

Arhimede a scris frumos. Iată cum savantul englez *Thomas Heath* se exprimă asupra calităților stilistice ale cărților lui *Arhimede ;* Tratatele lui sînt, fără excepție, monumente de expunere matematică ; dezvoltarea gradată a planului, măiastra ordonare a teoremelor, severa eliminare a tot ce nu este imediat legat cu scopul propus, concluziile redate impresionant, creează un sentiment de încîntare în mintea cititorului. Plutarh de asemenea spune că e imposibil să găsești în geometrie chestiuni și demonstrații grele și încurcate expuse așa de limpede și simplu ca la *Arhimede.*

Una din lucrările teoretice mai importante ale lui *Arhimede* este intitulată „Despre echilibrul figurilor plane". A fost scrisă în două părți, din care prima pare să fie cea mai veche din operele lui. Prin ea *Arhimede* pune bazele unei științe noi, *Statica,* o ramură principală a mecanicii și tratează în cuprinsul ei problema pîrghiilor și aceea a centrului de greutate.

Toată lumea știe ce este o pîrghie, și desigur au știut și oamenii de dinaintea lui *Arhimede*. Dacă vrei să miști o piatră sau o greutate, pe care n-ai putea-o ridica singur cu mîna, atunci recurgi la pîrghie, adică vîri o ștangă de fier sau de lemn între piatră și pămînt, apoi sub ștangă, pe pămînt, aproape de piatra ce vrei s-o ridici, așezi o piatră mai mică pe care să se razeme ștanga. Dacă apeși pe capătul liber al ștăngii și aceasta e destul de lungă, poți mișca piatra din loc. În felul acesta, cu o sforțare mică, poți ridica o greutate mare.

Arhimede nu a descoperit întrebuințarea pîrghiei, ea se cunoștea din practică, a descoperit însă legile matematice ale pîrghiei. Ne-a spus, spre exemplu, că greutatea, pe care o poți ridica, e proporțională cu lungimea brațului liber al pîrghiei.

Însemnătatea extraordinară a teoriei pîrghiilor s-ar putea reda expresiv prin cîteva cuvinte transmise de legendă: „Dați-mi un punct de sprijin și răstorn pămîntul"! cuvinte impresionante ce le-ar fi spus *Arhimede*, cînd explica teoria lui.

Pornind de la această teorie, a studiat chestiunea scripetelui și a centrului de greutate. Ambele aceste lucruri erau cunoscute din practică, dar *Arhimede* a făcut teoria lor matematică și legătura lor cu teoria pîrghiilor. A fost un pas gigantic, de la rudimentar la tratarea matematică riguroasă a unor chestiuni ce stau la baza mecanicii.

O altă ramură însemnată a mecanicii, care-și datorește începuturile ei lui *Arhimede*, este *Hidrostatica*. De aceste începuturi este legată o anecdotă, ce ne-o povestește *Vitruviu*, arhitect și scriitor roman. *Regele Hieron* bănuia că giuvaergiul care-i lucrase coroana de rege, ar fi înlocuit o parte din aurul ei prin argint. S-a adresat lui *Arhimede* cerîndu-i să constate furtul, dar fără a strica coroana. A cerut timp să se gîndească. Deslegarea problemei i-a venit în minte deodată, cîteva zile mai tîrziu, pe cînd făcea baie și a simțit că corpul lui devine mai ușor, cînd e cufundat în apă. Trebuia cîntărită coroana în mod obișnuit, apoi cîntărită din nou, ținînd-o cufundată în apă. Același lucru trebuia făcut cu o bucată de aur curat și apoi cu una de argint.După un mic calcul, a putut răspunde întrebării lui *Hieron*. Se zice că *Arhimede*, cînd a găsit soluția, fiind în baie, a sărit în sus strigînd în gura mare „evrica"! adică am găsit. A descoperit atunci, principiul fundamental al hidrostaticei, numit astăzi *Legea lui Arhimede*: Un corp solid, cufundat într-un lichid, se comportă ca și cum ar pierde din greutatea lui o greutate egală cu aceea a lichidului deslocuit.

Tot ce a mai gîndit *Arhimede* asupra problemelor ce rezultă din această descoperire, le-a scris în cartea lui în două volume intitulată: „Despre corpurile plutitoare". E una din ultimele și cele mai importante lucrări ale lui. Evrica, acel evrica de care am vorbit, a fost strigătul de îndemn în urma căruia au apărut multe, complexe și minunate invenții pentru civilizația și progresul omenirii.

Arhimede a scris și o lucrare de aritmetică intitulată: „Numărul grăunțelor de nisip". Grecii antici, poporul filozofilor și matematicienilor, nu au avut un sistem de numerotație perfect. Sistemul lor de a reprezenta numerele era bazat, nu ca acum, pe zece semne și ordinea în care sînt înscrise, ci pe literile alfabetului și cîteva semne, accente, codițe

care li se adăogau, dar cu care nu se putea merge prea departe spre numere foarte mari.

În limba greacă, sînt 24 de litere, cărora li s-a mai adăogat 3 litere din alfabetul fenician și astfel s-a ajuns la un alfabet special cu 27 de litere. Primele 9 litere ale acestui alfabet α, β, γ etc. reprezintă unitățile; literele de la mijloc, reprezintă zecile, iar ultimele nouă litere ρ, σ τ etc., reprezintă sutele. În felul acesta, luînd cîte o literă din fiecare grupă, se puteau scrie numerile pînă la 999. Pentru numerile de la 1000 pînă la 9999 se întrebuințau tot literele din grupul unităților, cărora li se puneau cîte un accent scris jos și la stînga. Cifra următoare $10000 = 10^4$ se numea o miriadă. Repetînd procedeul, se ajungea la o miriadă de miriade, adică la 10^8. Pentru numerele și mai mari, nu s-a simțit nevoia unei noi complicații. În modul acesta se găseau foarte mulți oameni, care credeau că numărul numerelor e finit, pentru că nu mai erau semne de la o miriadă de miriade încolo.

Rostul lucrării lui *Arhimede* era să explice cum, cu toată imperfecțiunea numerației grecești, e posibil să exprimăm prin vorbe și prin scris, numere oricît de mari, mai mari ca numărul grăunțelor de nisip ce s-ar afla în univers. Cartea a fost dedicată lui *Gelon,* fiul tiranului, și iată cum îi scrie: Sînt oameni, o rege *Gelon,* care sînt de părere că numărul grăunțelor de nisip din lume e infinit de mare. Alții însă nu cred că numărul lor e infinit de mare, dar, că nu avem nici un nume, care să exprime numărul grăunțelor. Arhimede a propus o schemă de numerație, aranjînd numerele în octade, adică în grupuri de cîte 10^8 cifre. Cartea este interesantă și pentru exemplele de numere foarte mari, pe care le ia din astronomie și ne arată astfel cunoștințele din acel timp.

În afară de această carte de aritmetică, *Arhimede* mai are teoreme aritmetice și algebrice risipite prin cărțile lui de geometrie. În vremea aceea, demonstrația geometrică prevala, era chiar socotită ca singura metodă, care putea să procure o probă științifică incontestabilă. În cartea: „Despre conoizi și sferoizi", găsim demonstrațiile mai multor teoreme asupra seriilor aritmetice, iar în cartea „Despre quadratura parabolei", avem demonstrația unei teoreme asupra seriilor geometrice. Marea descoperire a lui Arhimede, măsura lungimei cercului, calcularea valorei lui π este și ea o descoperire aritmetică.

Geometrii vechi dinaintea lui *Arhimede* au încercat să rezolve problema lungimii cercului, căutînd, fără succes, vreo construcție geometrică, care să ducă la un segment de dreaptă egal cu perimetrul unui cerc dat. *Arhimede* a fost cel dintîi, care a tratat problema altfel aritmetic, căutînd raportul numeric între lungimea cercului și diametru. A ajuns la rezultatul strălucit că acest raport este cuprins între $3\frac{1}{7}$ și $3\frac{10}{71}$.

Numai în anul 1882 matematicianul german *Lindemann* a arătat că problema nu se putea rezolva în felul cum încercaseră geometri vechi.

Metoda lui *Arhimede* a fost să înscrie și să circumscrie unui cerc, la început două exagoane, apoi poligoane cu 12, 24, 48 și 96 de laturi, și să calculeze pe rînd perimetrele lor, care se apropie din ce în ce mai mult de lungimea cercului. De la cele din urmă poligoane de 96 de laturi a dedus cele două limite între care e cuprins numărul π.

Lucrarea cea mai mare, ca întindere, a lui *Arhimede* scrisă în două părți, e intitulată: „Despre sferă și cilindru". Era lucrarea lui favorită; a lăsat ca pe mormîntul lui să se deseneze o sferă și cilindrul ei circumscris.

Ca prefață cartea are o scrisoare către *Dositeu*, matematician, prieten de al lui, unde-i spune rezultatele principale la care a ajuns:

1. Suprafața sferii e de patru ori mai mare decît a cercului mare de pe dînsa.

2. Suprafața unui segment de sferă este egală cu a cercului de rază egală cu lungimea segmentului ce unește vîrful segmentului sferic cu un punct al cercului de bază.

3. Volumul cilindrului circumscris unei sfere, cu înălțimea egală diametrului sferei, este odată și jumătate cît volumul sferei.

4. Suprafața cilindrului circumscris, împreună cu suprafața bazelor, cît diametrul sferei, este o dată și jumătate cît volumul sferei.

Arhimede a scris asupra secțiunilor conice, a căror teorie a îmbogățit-o printr-o mulțime de teoreme noi, mai mici, care se găsesc răspîndite prin diferite scrieri ale lui. Una din conice, parabola, l-a interesat îndeosebi și i-a dedicat o carte specială intitulată: *„Despre quadratura parabolei"*. Aci el a găsit ceva, ce este analog cu cea ce acum, în matematicile superioare, se numește integrarea; o remarcabilă metodă, care a dat naștere, cum a spus matematicianul francez, *Chasles*, calculului cu infinitul, adus la perfecțiune de *Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz* și *Newton*.

S-a ocupat și de cîteva suprafețe strîmbe în cartea „Despre sferoizi și conoizi", unde numește așa elipsoidul, hiperboloidul și paraboloidul de revoluție.

A studiat și curbe speciale ca spirala, numită și astăzi *spirala lui Arhimede*. A scris „Despre poliedre semiregulate", adică despre acele poliedre care au fețele formate din două sau trei feluri de poligoane regulate.

O carte a lui *Arhimede*: „Metoda", a fost descoperită abia în 1906. Titlul ei întreg este: „Despre teoremele mecanice, metodă comunicată lui *Eratostene*". Am găsit că-i bine, spune *Arhimede* lui *Eratostene*, să-ți explic în cartea aceasta o metodă curioasă, prin care îți va fi posibil să înțelegi cum s-ar putea cerceta unele chestiuni matematice prin mecanică. Acest procedeu, după convingerea mea, este folositor chiar ca să le demonstreze, căci îți va fi ușor, după ce-ți faci o idee de problemă prin acest procedeu, să-i dai apoi o demonstrație riguroasă; prin demonstrație riguroasă, el înțelegea una după tipicul euclidian, adică fără să încalce regulele și uzanțele încetățenite în cercurile matematice de atunci.

Ideea lui *Arhimede* era să-și închipuie pentru calcularea ariilor, suprafața plană umplută de drepte paralele așezate foarte apropiat unele de altele. De fapt și-o închipuia umplută cu dreptunghiuri foarte subțiri, unul alături de următorul. Sumînd ariile acestor dreptunghiuri, calcula aria dorită.

Și istoria descoperirii acestei cărți e interesantă. În anul 1906, la o biserică din Constantinopol, se găsea o carte liturgică veche. Fusese

scrisă de mînă în secolul al 13-lea și provenea de la Ierusalim. S-a observat că, pe foile de pergament ale acestei cărți, fusese scris înainte un alt text mai vechi, care fusese șters, spălat bine, și scris deasupra lui textul religios. Era ceea ce se numește un *Palimpsest* sau *Codex rescriptus*. Despre scrisul dintîi, cel vechi, care deabia se putea vedea, s-a putut totuși constata, că era din secolul 10 și conținea ceva matematic. Un savant grec, *Papadopulos-Kerameus*, a publicat o probă din textul primitiv, pe care văzînd-o, savantul danez, profesorul *Heiberg* din Copenhaga, a recunoscut-o imediat, după conținut și stil, că era scrisă de *Arhimede*. *Heiberg* a plecat imediat la Constantinopol și acolo a reușit să scoată la iveală întregul text scris dedesubt, ștergînd și spălînd textul scris pe deasupra. Erau acolo părți din scrierile cunoscute ale lui *Arhimede*, dar a mai găsit și o lucrare mai mare, pînă atunci necunoscută: „Metoda". Era o mare descoperire a lui *Heiberg*, pe care a publicat-o în nemțește și apoi în grecește.

Dacă ne-a interesat soarta acestui *Codex rescriptus*, rămas necunoscut timp de un mileniu, într-un modest mitoc din Constantinopol, este, desigur, și mai interesant să știm cum s-au păstrat și celelalte scrieri ale genialului matematician al antichității.

Desigur, în antichitate, au existat multe papiruse cu operele lui *Arhimede*, altfel matematicienii de atunci, răspîndiți în diferite locuri, nu le-ar fi citat. Au existat, desigur, și în *Biblioteca Muzeului din Alexandria* pînă în secolul al treilea și chiar în anul 500, căci altfel *Eutocius* n-ar fi scris un comentariu la operele lui *Arhimede*.

Dar numai în secolul al 9-lea, găsim o urmă a unui manuscris arhitip, de la care au derivat, prin copiere și traducere, aproape toate textele, ce posedăm astăzi.

A fost, în acel secol, un *Leon*, zis și *Leon* filozoful, savant bizantin, profesor de filozofie și apoi arhiepiscop al Tesaloniei, care și-a procurat și colecționat lucrările lui *Arhimede*, care, pe vremea aceea se mai găseau risipite prin Constantinopol. Astfel a alcătuit un manuscris, căruia astăzi i se zice manuscrisul arhitip, și este aproape singura sursă pentru textul grecesc.

Soarta acestui manuscris a fost să rătăcească. În secolul al 12-lea se găsea la curtea normandă din *Palermo*, apoi la aceea a *Hohenstaufenilor*. În urmă, în 1269, a ajuns la biblioteca Vaticanului, iar după 1368, a trecut în mîini particulare. În 1491, a aparținut lui *Georgio Valla*, savant italian, profesor în Veneția, apoi a fost trecut altora pînă în 1564, cînd a dispărut fără urmă.

A fost o fericire că, în anii cînd manuscrisul a fost păstrat la Vatican și atunci cînd l-a avut *Valla*, a putut fi de cîteva ori copiat și tradus. Există astfel 4 manuscrise copiate după cel al lui *Leon*, care se păstrează la Veneția, la Florența și două la Paris. Mai există și două traduceri în latinește după același original.

Prima carte tipărită cu lucrările lui *Arhimede*, așa zisă editio princeps, a apărut în 1544 la Basel. Ei i-au urmat altele cu traduceri în diferite limbi.

CAMERA CU BULE

de lector *KELEMEN FRIDERIC*, Univ. Babeș-Bolyai, Cluj

Interacțiunea dintre particulele elementare, precum și dintre particule elementare și nuclee atomice, se pot studia cel mai eficace cu acele dispozitive care într-un mod oarecare pun în evidență traiectoria particulelor. Asemenea dispozitive sînt camera Wilson, camera de difuzie și plăcile fotografice cu emulsie. Aceste dispozitive au adus un mare aport în studiul radioactivității naturale și artificiale, precum și în studiul proceselor atomice și nucleare. Astăzi aceste aparate se numără printre instalațiile binecunoscute ale laboratoarelor de fizică atomică. Avantajul acestora este că, chiar și printr-o singură fotografie se poate obține o serie de date cu privire la interacțiunea particulelor ce iau parte într-un proces.

Observarea și studierea din punct de vedere experimental a proceselor nucleare cu ajutorul emulsiilor fotografice este comparativ simplă și eftină.

În fața fasciculului de particule (de exemplu, raze cosmice sau protoni) se pune un pachet de plăci fotosensibile special pregătite, iar după developare la microscop se urmărește traiectoria particulelor incidente, precum și a particulelor ce iau naștere prin ciocniri. În stratul de emulsie particulele ionizează atomii pe care îi întîlnesc, de aceea granulele de emulsie întîlnite de particule sînt impresionate, adică traiectoria particulelor devine vizibilă. Dacă particula pătrunsă în emulsie se ciocnește cu un nucleu, atunci, de obicei, îl fisionează și datorită acestui fapt se produce o figură sub formă de stea *).

Metoda emulsiilor fotografice are un dezavantaj. Acesta provine din faptul că ținta nu este omogenă, deoarece stratul de emulsie conține diferiți atomi, așa de exemplu, *Ag, Br, C, O, N*, chiar și *I, S* și *H*. Din această cauză este aproape imposibil să se determine, în cazul apariției unei steluțe, cu ce fel de nucleu s-a produs ciocnirea particulei incidente. În afară de aceasta, din fotografii nu se poate determina semnul particulelor, întrucît traiectoria particulelor în stratul de emulsie este atît de mică, încît nici cîmpuri magnetice foarte intense (în jur de 20 kGs) nu creează o suficientă deviație.

În opoziție cu emulsiile fotografice în camera cu ceață ** „gazul de umplere" este cu mult mai omogen, deoarece aici numai vaporii reprezintă „materia străină". În acest caz, nici determinarea sarcinii electrice a particulei nu prezintă greutăți deosebite, deoarece prin aplicarea unui cîmp magnetic corespunzător se obține o curbură a traiectoriei, măsurabilă. Totuși, camera cu ceață are un mare dezavantaj în raport cu emulsiile fotografice. În interiorul camerei fiind de obicei un gaz la presiune normală, particulele — mai ales cele de energie mare — trec prin cameră aproape fără obstacol. În urma ionizării traiectoria particulelor este observabilă, dar probabilitatea de ciocnire cu nuclee este mică. De aceea numai foarte rar apare pe fotografie înfățișarea unei reacții nucleare. Dacă mărim presiunea gazului din cameră, crește și posibilitatea de ciocnire cu nuclee, dar în acest caz se pot face fotografii numai la intervale de 10—15 minute,

* v. M.F.L., — 1958, nr. din ianuarie.
** v. art. Koch F. din M.F.L., nr. 7/1960.

deoarece aproximativ de atîta timp este nevoie pentru a se stabili echilibrul termic.

Din cauza faptului amintit, camerele Wilson nu sînt rentabile la acceleratori de particule, pentru că acestea aproape în fiecare minut produc impulsuri de particule. Din această cauză azi ele se folosesc mai ales la studiul razelor cosmice, pe care le primim din natură, „pe gratis". Situația este puțin ameliorată la camerele cu ceață cu difuzie, pentru că acestea sînt capabile de o funcționare continuă.

Însă, acceleratorii moderni, ca de exemplu sincro-ciclotronul și protonsincrotonul dau naștere la particule de energie atît de mare, încît pentru înregistrarea proceselor produse de aceste particule, nici camerele de difuzie nu sînt satisfăcătoare. În aceste procese parcursul particulelor este atît de mare și reacțiile urmează una după alta atît de repede, încît fenomenele succesive nici cu o cameră foarte mare cu ceață, nici cu o coloană de emulsie nu s-ar putea concentra într-o singură figură. De aceea s-a simțit nevoia unui asemenea dispozitiv care să unească avantajele camerei cu ceață cu acelea ale emulsiilor fotografice : întindere mare și densitate mare, precum și posibilitatea unei ușoare evaluări. Un asemenea dispozitiv a reușit să realizeze D. Glaser, în 1952, prin construirea camerei cu bule. În 1960, această realizare a fost distinsă cu premiul Nobel.

Camera cu bule, din punct de vedere al principiului de funcționare. poate fi privită ca inversul camerei Wilson. Deosebirea esențială dintre ele constă în faptul că, funcționarea camerei cu bule folosește lichide supraîncălzite și nu vapori suprasaturați.

Pentru înțelegerea procesului de funcționare să presupunem că încălzim un lichid pur (de exemplu, propan), fără aer, aproape pînă la punctul de fierbere și că micșorăm brusc presiunea de deasupra lichidului cu ajutorul unui mecanism de expansiune. O dată cu scăderea presiunii scade și punctul de fierbere, dar fierberea lichidului nu începe imediat, ci puțin timp lichidul rămîne în stare de supraîncălzire. Această stare este însă instabilă. Glaser a arătat că la asemenea lichide în stare de supraîncălzire bulele cu vapori încep să se formeze pe acolo pe unde trec particule ionizate prin lichid. Deci, camera cu bule prezintă o imagine asupra traiectoriei particulelor asemănătoare cu cea obținută în camera cu ceață, dar aici urmele nu sînt picături de lichid, ci bule de vapori care plutesc în interiorul lichidului.

Despre procesul de formare al bulelor ne putem forma o imagine, în felul următor. Particula intrată în lichid se comportă ca și un „ac incandescent". Prin frînarea electronilor secundari în lichid, electronii care se formează pe traiectoria particulelor, produc o încălzire locală a lichidului, care și așa este în stare de supraîncălzire — în porțiuni foarte mici. Acest proces duce la formarea bulelor de vapori. Bulele astfel formate au un diametru foarte mic, aproximativ o milionime de centimetru. Însă, presiunea vaporilor din bule fiind mai mare decît presiunea lichidului înconjurător, după cîteva miimi de secundă bulele vor avea dimensiuni vizibile (diametrul de cîteva zecimi de milimetru) și astfel pot fi fotografiate. Imediat după aceasta lichidul este comprimat din nou și datorită acestui fapt, nu se pornește fierberea în întreaga masă a lichidului.

Camera cu bule prezintă mai multe avantaje față de camera cu ceață. Densitatea lichidului din cameră fiind cu mult mai mare decît a gazului

din camera cu ceață, particulele vor avea o traiectorie cu mult mai scurtă. Aceasta înseamnă că în camera cu bule procesele se desfășoară în spații cu mult mai restrînse decît în camera cu ceață. Așa de exemplu, într-o cameră cu bule avînd diametrul de 1 m se pot observa tot atîtea fenomene ca într-o cameră cu ceață avînd diametrul de 10—20 m. Deci, camera cu bule este o „arenă de fenomene" cu mult mai mare decît camera cu ceață.

Totodată, din cauza densității mai mari, la detentă, probabilitatea de a avea un proces nuclear este cu mult mai mare decît în cazul camerei cu ceață. În afară de aceasta, puritatea și diversitatea lichidelor de umplere permit o alegere convenabilă, deci, ținta este binecunoscută. Mai departe, în cazul camerelor cu ceață este neplăcut din punct de vedere al măsurării, faptul că mișcarea gazului duce la deformarea traiectoriei. Dimpotrivă, în cazul camerei cu bule, practic, nu avem de-a face cu deformarea traiectoriei, deoarece în lichide curenții sînt cu mult mai reduși decît în gaze.

În afară de cele amintite, tot din cauza densității mari, în lichide recombinarea ionilor se petrece cu mult mai repede decît în gaze. Din această cauză, în camera cu bule numai acei ioni produc bule, care se formează imediat după detentă. Aceasta înseamnă că fondul fotografiei este mai curat și fotografiile sînt mai clare decît în cazul camerei cu ceață. Totodată acest fapt aduce după sine și un dezavantaj. Din cauza recombinării rapide a ionilor camera cu bule nu poate fi dirijată cu ajutorul contoarelor, deoarece particula care ar trebui să dea comanda intră în cameră încă înainte de detentă. Din această cauză, camera cu bule nu poate fi utilizată pentru studiul razelor cosmice, pentru că în acest scop ar trebui să funcționeze în mod continuu. La acceleratoarele prin impulsuri proprietatea amintită nu prezintă dezavantaj, deoarece mecanismul pentru producerea detentei poate fi pus în funcțiune încă înainte de trecerea particulei. Acest lucru este realizat cu un dispozitiv electronic comandat de accelerator.

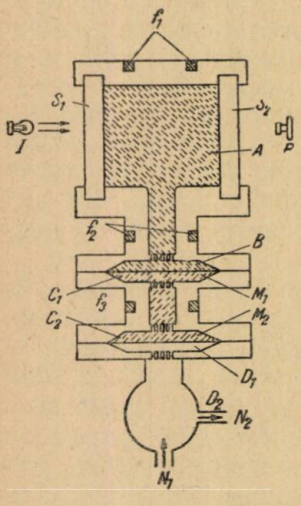


Fig. 1.

Camerele cu bule se confecționează din sticlă sau din metal. Primul tip, din cauza spațiului limitat, se utilizează mai mult în scopuri metodice. Schema unei camere metalice de 30 cm, cu bule, este redată în figura 1. Camera propriu-zisă este notată cu litera A. Peretele din partea dreaptă și stîngă S_1 și S_2 este din sticlă. Partea A, precum și B sînt umplute cu lichid (propan), în partea C_1 este un lichid (ulei) pentru transmiterea presiunii. Cele două lichide sînt despărțite prin membrana elastică M_1. Membrana M_2 este strînsă de către gazul sub presiune înaltă care intră prin N_1, pe lichidul din C_2. La detentă N_2 (supapă magnetică) se deschide, din D_1 și D_2 gazul de înaltă presiune trece în atmosferă și astfel presiunea exercitată pe membrane scade. Pentru menținerea temperaturii camerei la valoare constantă servesc conductele f_1, f_2 și f_3 prin care trece lichidul refrigerent la temperatură constantă.

Intrarea particulelor în cameră trebuie să ne-o închipuim perpendiculară pe planul figurii. Iluminarea camerei se face cu becul electric I.

Procesul care are loc în timpul detentei este înregistrat de către camera fotografică *F*. Fotografierea este stereoscopică. Aparatul este deschis încontinuu, fotografierea se produce atunci cînd se aprinde becul de iluminat. Rularea filmului se face în mod automat, fiind comandată de asemenea, de accelerator.

După detentă numai un anumit interval de timp se pot face înregistrări de particule. Acesta este timpul de sensibilitate al camerei. Sensibilitatea camerei este stricată de bulele care se formează pe pereți și în interior, prin trecerea particulelor. Totodată, vaporii care iau naștere în bule, măresc presiunea și de aceea crește punctul de fierbere al lichidului. Numărul bulelor care iau naștere pe pereții camerelor de sticlă este relativ mic, de aceea la acestea timpul de sensibilitate este destul de mare — de cîteva secunde. În schimb, la camerele metalice timpul de sensibilitate este cu mult mai mic, pînă acum timpul maxim atins este de patru sutimi de secundă.

Camerele prevăzute cu acceleratori funcționează ciclic. Timpul dintre două detente se numește ciclul camerei. De obicei, acesta este de cîteva secunde și corespunde cu ciclul acceleratorului. Atingerea unui ciclu cît mai scurt este în funcție de timpul cît stă lichidul sub presiune scăzută. Întrucît bulele transportă căldură în partea superioară a camerei, cu cît comprimarea lor se face mai tîrziu cu atît va fi nevoie de un timp mai mare pentru stabilirea echilibrului de temperatură. Dacă camera se supune la un regim de funcționare atît de rapid încît echilibrul termic nu se poate stabili, atunci lichidul, în locurile în care au fost bule va fierbe din nou. Desigur, acest lucru falsifică rezultatele.

Alegerea lichidului pentru umplerea camerei este determinată în primul rînd, de natura particulelor care vor fi înregistrate. În afară de aceasta, nu pot fi trecute cu vederea nici cerințele experimentale: presiunea și temperatura de funcționare trebuie să fie într-un domeniu accesibil, iar lichidul să fie transparent; mai departe este de dorit ca lichidul să nu fie otrăvitor, nici ușor explozibil sau puternic activ din punct de vedere chimic. Unul dintre cele mai întrebuințate lichide este propanul. Acesta este destul de ieftin, are temperatura de lucru de 64°C, iar presiunea necesară este de aproximativ 30 atmosfere. Din punctul de vedere al studiului interacțiunii particulelor cu protoni este foarte importantă camera cu bule umplută cu hidrogen lichid. Însă, funcționarea acesteia implică o tehnică destul de perfecționată, deoarece are temperatura de funcționare de 27°K și este mare pericol de explozie. În afară de lichidele amintite se mai utilizează bioxid de carbon, xenon, heliu, chiar și deuteriu pentru umplerea camerelor cu bule. Părțile constitutive ale camerei se adaptează în funcție de lichidul utilizat.

In figura 2 este reprezentată o cameră cu bule de dimensiuni mici, umplută cu propan, confecționată la Institutul Unificat pentru cercetări atomice de la Dubna.

Din cele de mai sus rezultă că, din punct de vedere al construcției, camerele cu bule sînt cu mult mai complicate decît cele cu ceață. În afară de aceasta, funcționarea lor comportă multe dispozitive auxiliare. Astfel, întrucît temperatura camerei în timpul funcționării trebuie să fie constantă este nevoie de un termostat care să asigure acest lucru. În cazul camerelor care funcționează la temperatură scăzută, natural că mai este nevoie

de o instalație de lichefiere pentru prepararea lichidului folosit pentru răcire (de exemplu, hidrogen lichid). În cazul particulelor de mare energie, pentru producerea unei deviații măsurabile la traiectoria particulelor este necesar să se creeze și un cîmp magnetic foarte puternic, cu intensitatea de 15—20 kGs. Un cîmp magnetic cu intensitate așa de mare se poate produce numai cu un electromagnet avînd greutatea de cîteva tone, chiar și în cazul unei camere cu bule de dimensiuni mici (cu diametrul de cîțiva decimetri). În afară de aceasta, programul de lucru al camerei

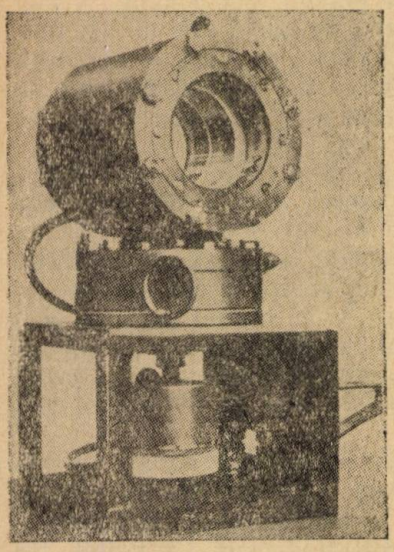


Fig. 2.

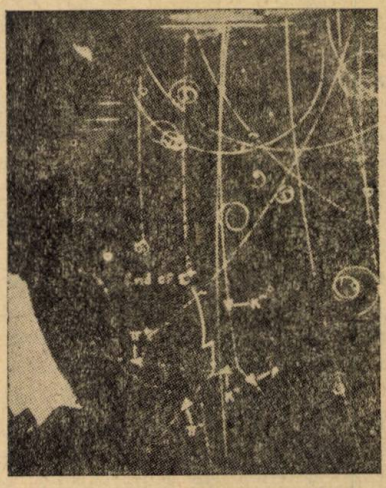


Fig. 3.

trebuie asigurat cu o precizie de miime de secundă, lucru imposibil de realizat numai cu dispozitive de comandă electronice. Aproape toate camerele sînt comandate de la distanță prin dispozitive de telecomandă, pentru a înlătura pericolul de iradiere a persoanelor care manipulează aceste dispozitive.

Camera cu bule a contribuit în mare măsură, la dezvăluirea proprietăților particulelor elementare. Cu ea se pot studia bine, procesele de formare și transformare a particulelor rare. Mai ales cu ajutorul camerei umplute cu hidrogen lichid s-au obținut rezultate prețioase, deoarece în hidrogen pur, studiul proceselor elementare nu este deranjat de nuclee complicate. Aceste experiențe au adus primele dovezi convingătoare asupra existenței antihiperonilor θ° și Σ°.

În figurile 3 și 4 sînt redate două clișee obținute la o cameră cu bule umplută cu hidrogen. În figura 3, un mezon K^{-} se ciocnește elastic cu un nucleu de hidrogen, apoi este frînat, iar după aceea este capturat și absorbit de către un proton. În urma acestui proces ia naștere un nucleu excitat, așa numitul hiperon Σ. Acest hiperon este o particulă nestabilă, după o

scurtă deplasare se descompune spontan. Întregul proces de mai sus se descrie în felul următor :

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

și

$$\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + n.$$

Urmele ce se observă pe figura 4 *a*, sînt lăsate de trecerea unor mezoni π^- cu energia de 16 GeV *). În punctul *O* (fig. 4, *b*) un mezon π^- nimerește un proton și provoacă o reacție nucleară. Din urmele ce pleacă din acest punct cele trei mai lungi provin de la mezoni π, iar a patra mai scurtă de la protonul nimerit. În punctul O_1, nu departe de punctul *O*, începe o urmă bifurcată. Întrucît aceasta derivă de la o pereche de mezoni π, înseamnă că din punctul de reacție *O* mai pornește și o particulă fără sarcină

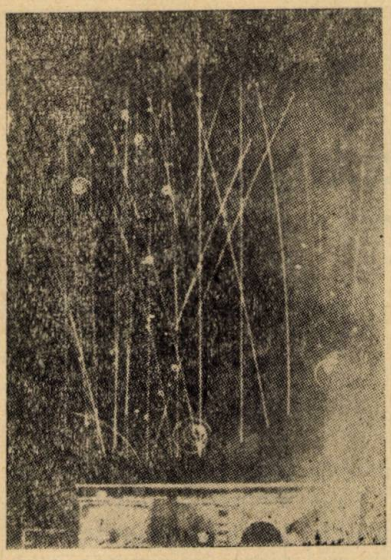


Fig. 4a.

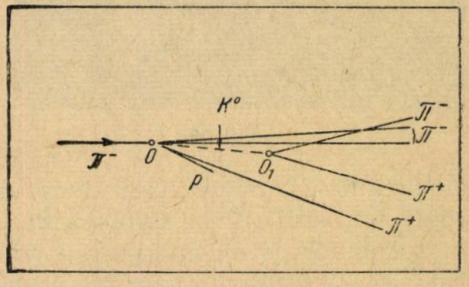


Fig. 4b.

electrică. Aceasta este un mezon K°, care după aproximativ 10^{-10} secunde se descompune în doi mezoni : în π^+ și π^-. Distanța dintre punctele *O* și O_1 corespunde tocmai acestui interval de timp. Reacțiile de mai sus se pot scrie :

$$\pi^- + p \rightarrow 3\pi + p + K^0$$

și

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-.$$

În figurile 3 și 4 se observă că traiectoriile particulelor — mai mult sau mai puțin — sînt curbate. Această curbură este rezultatul acțiunii cîmpului magnetic.

Fotografia din figura 5 a, a fost efectuată cu o cameră cu bule umplută cu propan, la Institutul de Fizică Atomică de la Dubna, într-un cîmp magnetic cu intensitatea de cca. 14 kGs. Pe această fotografie a fost descoperit hiperonul antisigma minus $\bar{\Sigma}^-$ de către un colectiv de cercetători compus din fizicieni sovietici, chinezi și romîni. Procesul de formare al acestei par-

*) 1 GeV (gigaelectronvolt) = 10^9 eV (un miliard de electronvolți).

ticule se poate înțelege pe baza schiței din figura 5, *b*. Un mezon π^- (care intră prin partea stîngă) cu o energie de 8,3 GeV întîlnește în punctul *A* un atom de carbon și îl descompune. Din această reacție rezultă patru particule cu sarcini electrice și cîteva particule neutre, în modul următor:

$$\pi^- + C \rightarrow \tilde{\Sigma}^- + K^- + K^\circ + \tilde{K}^\circ + p + n + \pi^+ + \pi^- + \text{nucleu respins.}$$

Traiectoriile particulelor neutre, evident, nu se văd. Dintre acestea, mezonul K° și antimezonul $\tilde{K}^\circ$, în punctele *D* și *E* produc cîte o pereche de mezoni π. Dintre urmele particulelor ionizate cea mai de jos este a hiperonului anti Σ^- minus, care după un drum corespunzător unei durate de viață de $1{,}10 \cdot 10^{-10}$ secunde, în punctul *B* se descompune într-un mezon π pozitiv și un antineutron ($\tilde{n}$). Mezonul π își schimbă traiectoria în jos, iar antineutronul care are o masă cu mult mai mare, în virtutea inerției își continuă drumul pe direcția traiectoriei hiperonului, fără să lase urmă. Această particulă întîlnește în punctul *C*, un atom de carbon și îi produce fisionarea nucleului. Energia totală a acestei explozii este apreciată la 2340 MeV, care este cu mult mai mare decît energia cinetică măsurată a antihiperonului. Din aceasta rezultă că aici nu poate fi vorba decît de energia care se eliberează prin descompunerea unei antiparticule, după următoarea relație:

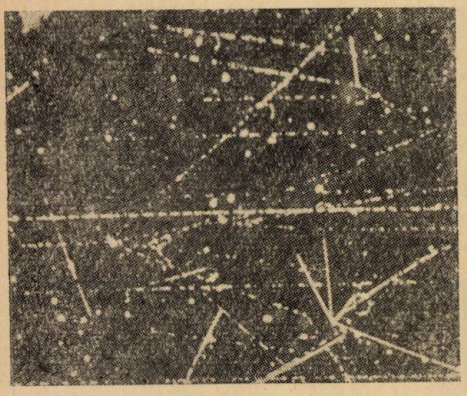


Fig. 5a.

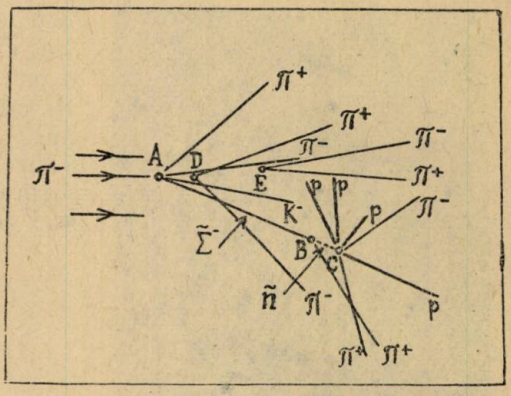


Fig. 5b.

$$\tilde{n} + C^{12} \rightarrow He^4 + 4p + 3n + \pi^+ + \pi^- + \pi^\circ$$

În timpul funcționării acceleratorilor de particule se fac cu miile fotografii de felul acesta. Analiza acestora comportă muncă îndelungată și încordată. În general se procedează astfel: în primul rînd, se separă fotografiile „goale", iar celelalte se sortează. După aceea se determină curburile, distanțele, deviațiile unghiulare ale traiectoriilor, repartiția densității de bule etc. La analiză, toate acestea se iau în considerare. Determinarea datelor traiectoriilor se face subiectiv, sau cu instalații semiautomate. De curînd, în mai multe locuri au fost instalate dispozitive de analiză automată.

De la descoperirea sa, camera cu bule a fost mult perfecționată, astăzi fiind indispensabilă în fizica modernă. Sperăm că în anii viitori prin punerea în funcțiune a unor noi camere mari și acceleratoare se vor obține noi realizări în domeniul cercetării particulelor elementare.

DESPRE CUBAJUL BUȘTENILOR

de *KOVACS KALMAN*, Cluj

Calculul volumelor își găsește o aplicație frecventă la cubajul bușteni-lor. Un buștean avînd de obicei forma unui trunchi de con, volumul lui se poate calcula exact cu formula :

$$V = \frac{\pi l}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

unde l reprezintă lungimea bușteanului, r_1 și r_2 razele celor două secțiuni.

O tabelă de rezultate se întocmește simplu, dacă formula conține o singură mărime variabilă. O astfel de formulă este cea care ne dă aria cercului : $s = \pi R^2$.

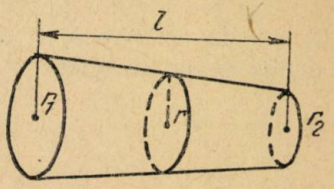


Fig. 1.

Dacă formula conține două mărimi variabile, tabela are forma dreptunghiulară. Ca exemplu să luăm formula volumului cilindrului : $V = \pi R^2 i$. Pentru a afla volumul cilindrului pînă la raza de 5 cm și înălțimea de 5 cm, atît raza cît și înălțimea fiind luate din 0,5 cm în 0,5 cm, întocmim o tabelă în felul următor :

În prima linie (deasupra liniei orizontale) trecem valorile razei, iar în prima coloană (la stînga de linia verticală) trecem valorile înălțimii. Valorile din tabela propriu-zisă se calculează înmulțind valorile din tabela precedentă care ne dă $s = \pi R^2$ cu valorile lui i. Astfel, obținem tabela de mai jos, în care pentru a economisi și spațiul nu am trecut toate liniile :

i \ R	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
0,5	0,39	1,57	3,53	6,28	9,82	14,14	1,24	25,10	01,81	39,27
1	0,79	3,14	7,07	12,57	19,63	28,27	28,48	50,27	60,62	78,54
1,5	1,18	4,71	10,60	18,85	29,45	42,41	57,73	75,40	94.40	117,81
2	1,57	6,28	14,14	25,10	39,27	56,55	76,97	100,53	127,23	157,08
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	3,93	15,71	35,34	62,83	98,18	141,38	192,42	251,33	318,08	392,70

Volumul unui cilindru cu $R = 3{,}5$ și $i = 1{,}5$ se află la intersecția coloanei 3,5 cu linia 1,5. Se află 57,73.

În formula trunchiului de con figurează trei mărimi variabile : r_1, r_2, l. În acest caz alcătuirea tabelei se complică : pentru fiecare valoarea lui l ar trebui să se întocmească cîte o tabelă dreptunghiulară în care în linie ar figura de ex. r_1 și în coloană r_2. Dar tabelele astfel întocmite ar fi prea voluminoase și mînuirea lor ar fi greoaie.

Din aceste motive se poate folosi o formulă aproximativă : bușteanul este considerat ca un cilindru cu lungimea egală cu lungimea l a bușteanului și raza egală cu raza secțiunii mijlocii r. În acest caz, volumul este dat de formula

$$V_1 = \pi r^2 l.$$

Dacă lungimea circumferinței mijlocii se notează cu C, atunci $r = \frac{C}{2\pi}$ și înlocuind pe r în formula volumului obținem formula

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} C^2 l.$$

În această formulă figurează numai două mărimi variabile, deci se poate folosi o tabelă dreptunghiulară.

Se poate pune întrebarea: cît de mare este eroarea care se comite folosind formula aproximativă?

Pentru aceasta calculăm diferența dintre volumul exact al trunchiului de con și volumul aproximativ. Fiindcă raza secțiunii mijlocii este egală cu media aritmetică a razelor celor două secțiuni extreme, volumul cilindrului se poate scrie:

$$V_1 = \pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^2 \cdot l$$

deci, diferența căutată V este

$$V_d = \frac{\pi l}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - \frac{\pi l}{4} (r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2).$$

După efectuarea calculelor obținem:

$$V_d = \frac{\pi l}{12} (r_1 - r_2)^2.$$

Eroarea este deci, egală cu $\frac{1}{12}$ a parte din volumul unui cilindru, care are o lungime egală cu lungimea bușteanului și raza egală cu diferența razelor celor două secțiuni extreme.

Fiindcă diferența razelor extreme nu este deobicei prea mare, valoarea dată de formula aproximativă poate satisface necesitățile practice.

Expresia diferenței volumelor depinde numai de lungimea bușteanului și de diferența razelor extreme; această diferență se poate calcula ușor și mintal, deci s-ar putea întocmi o tabelă dreptunghiulară pentru evaluarea diferenței. Practic nu se procedează însă, în acest fel.

Dacă se apreciază că eroarea dată de formula aproximativă ar putea fi mare, se poate proceda în felul următor. Se consideră bușteanul ca împărțit în două părți, fiecare avînd lungimea de $\frac{l}{2}$. Se măsoară perimetrul cercurilor mijlocii ale fiecărei părți; aceste cercuri se află la distanța $\frac{l}{4}$ de la fiecare extremitate. Din tabelă se află volumul fiecărei părți și pe urmă se face suma lor.

Să evaluăm eroarea în acest caz. Raza r_3 a secțiunii care se află la distanța $\frac{l}{4}$ de secțiunea cu raza r_1 este egală cu media aritmetică dintre r_1 și raza secțiunii făcute la mijlocul bușteanului, deci

$$r_3 = \frac{r_1 + \frac{r_1 + r_2}{2}}{2} = \frac{3r_1 + r_2}{4}.$$

În același fel aflăm raza r_4 a secțiunii care se află la distanța de $\frac{l}{4}$ de secțiunea cu raza r_2:

$$r_4 = \frac{r_1 + 3r_2}{4}$$

Volumul total al celor două părți calculat cu ajutorul tabelei este deci:

$$V_2 = \frac{\pi l}{2}\left(\frac{3r_1 + r_2}{4}\right)^2 + \frac{\pi l}{2}\left(\frac{r_1 + 3r_2}{4}\right)^2 = \frac{\pi l}{16}(5r_1^2 + 6r_1 r_2 + 5r_2^2).$$

În acest caz eroarea admisă este:

$$V_d' = \frac{\pi l}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - \frac{\pi l}{16}(5r_1^2 + 6r_1 r_2 + r_2^2),$$

sau după efectuarea calculelor:

$$V_d' = \frac{\pi l}{48}(r_1 - r_2)^2.$$

Avem deci, o eroare de 4 ori mai mică decît în cazul cînd facem o singură măsurătoare.

Eroarea relativă sau altfel formulat, numărul care ne arată cît la sută face cantitatea neglijată din volumul total depinde numai de raportul dintre cele două raze extreme.

În adevăr, dacă aplicăm pentru V_d formula (L) avem:

$$\frac{V_d}{V} = \frac{\frac{\pi l}{12}(r_1 - r_2)^2}{\frac{\pi l}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}.$$

Dacă împărțim atît numărătorul cît și numitorul cu r_1^2 obținem:

$$\frac{V_d}{V} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)^2}{1 + \frac{r_2}{r_1} + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}.$$

Această expresie crește dacă raportul $\frac{r_2}{r_1}$ descrește, pentru că în acest caz numărătorul crește, iar numitorul descrește.

Să luăm $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$, adică raza mică egală cu jumătate din raza mare. Obținem:

$$\frac{V_d}{V} = \frac{1}{4} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{28}$$

deci, cantitatea neglijată face mai puțin de 4% din volumul total. Dacă facem două măsurători acest raport se micșorează de 4 ori, deci eroarea este mai mică de 1%.

Dacă r_2 face cel puțin $\frac{7}{10}$ din r_1, chiar cu o singură măsurătoare, se obține o aproximație de 1%.

Deoarece raportul $\frac{r_2}{r_1}$ în majoritatea cazurilor este mai mare de $\frac{1}{2}$ cu una sau cu două măsurători și cu folosirea tabelelor se poate obține aproximarea de 1%, ceea ce este o aproximare destul de bună.

NOTĂ MATEMATICĂ

O DEMONSTRAȚIE A UNEI INEGALITĂȚI

Vom demonstra că într-un triunghi oarecare există inegalitatea $R \geqslant 2r$, unde R și r sînt respectiv, raza cercului circumscris și raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi există în mod evident inegalitatea $a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2$. Primul membru este evident pozitiv. Al doilea membru este de asemenea pozitiv căci se poate descompune în factorii pozitivi $a - b + c$ și $a + b - c$. Prin urmare putem să extragem rădăcina patrată din ambii membri fără ca sensul inegalității să se schimbe. Avem

$$a \geqslant \sqrt{(a - b + c)(a + b - c)}.$$

Analog obținem

$$b \geqslant \sqrt{(-a + b + c)(a + b - c)},$$

și

$$c \geqslant \sqrt{(-a + b + c)(a - b + c)}.$$

De unde,

$$abc \geqslant \sqrt{(a+b+c)^2 (a+b-c)^2 (-a+b+c)^2} =$$

$$= (a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c).$$

Înmulțim ambii membri cu $a+b+c=2p$ și avem:

$$abc(a+b+c) \geqslant (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

sau:

$$2abcp \geqslant 16p(p-a)(p-b)(p-c) = 16S^2.$$

Prin urmare,

$$\frac{abc}{4S} \geqslant \frac{2S}{p},$$

sau $R \geqslant 2r$, ceea ce era de demonstrat.

Lusztig Gheorghe, cl. XI, ș. m. 5 Timișoara

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1962

DARE DE SEAMĂ

S-au împlinit în acest an 60 de ani de la primul concurs organizat de *Gazeta matematică* pentru colaboratorii ei elevi; totodată numărînd concursurile care au avut loc de atunci, rezultă că cel din acest an este al 50-lea.

Se poate aprecia că s-a înrădăcinat o tradiție pozitivă în activitatea extrașcolară de masă a elevilor: ținerea cu regularitate a Olimpiadei de matematică și fizică. Olimpiada de matematică și fizică constituie an de an o preocupare serioasă a elevilor, a profesorilor și chiar a părinților.

Creșterea interesului pentru O.M.F. se reflectă în primul rînd în numărul sporit al participanților la etapa locală (prima etapă) după cum rezultă din tabloul comparativ:

Anul	1959	1960	1961	1962
matematică	15 237	19 229	23 005	26 146
fizică	12 286	15 569	16 643	19 485
Total:	27 523	34 798	39 648	45 631

La aceste date se pot adăuga cele care arată creșterea numărului școlilor și localităților reprezentate la O.M.F. în ultimii doi ani:

Anul	1961		1962	
	școli	centre	școli	centre
matematică	525	219	569	239
fizică	484	213	518	241

Aceste date ilustrează răspîndirea preocupărilor profesorilor și elevilor pentru matematică și fizică.

Remarcăm faptul că la etapa locală O.M.F. din anul 1962 nici o regiune nu a prezentat mai puțin de 1400 de elevi, la ambele specialități, deși pentru unele regiuni

acest număr este suficient de mare în raport cu numărul de elevi din acele regiuni. De pildă: reg. Hunedoara (1428), reg. Maramureş (1440), reg. Constanţa (1531), reg. Bucureşti (1725) etc.

Dacă comparăm numărul participanţilor la prima etapă (locală) din anul 1959 cu numărul participanţilor la aceeaşi etapă din anul 1962 constatăm următoarele: la matematică numărul elevilor participanţi a crescut în 4 ani cu 10 909, iar la fizică cu 7 199 elevi.

Pentru o analiză mai amănunţită a repartizării numărului de elevi participanţi la etapa locală şi regională, prezentăm tabelul de mai jos, pentru anul şcolar 1961/1962:

Regiunea	Matematică				Fizică			
	Etapa locală		Etapa regională		Etapa locală		Etapa regională	
	Prezentaţi	Evidenţ.	Prezentaţi	Evidenţ.	Prezentaţi	Evidenţ.	Prezentaţi	Evidenţ.
1. Argeş	1241	169	142	14	998	253	182	12
2. Bacău	1451	148	148	31	1199	159	159	31
3. Banat	2272	344	344	30	1620	351	351	37
4. Braşov	1850	306	250	22	1319	371	311	26
5. Bucureşti	875	145	250	163	850	165	165	19
6. Or. Bucureşti	4318	779	462	101	2463	564	446	135
7. Cluj	1758	159	121	8	1568	268	237	21
8. Or. C-ţa şi Dobrogea	767	197	153	17	744	226	153	23
9. Crişana	1007	192	165	32	683	183	158	33
10. Galaţi	1428	283	283	35	1323	229	229	15
11. Hunedoara	833	162	93	31	595	165	94	28
12. Iaşi	1048	164	161	8	902	164	157	30
13. Maramureş	932	223	96	16	518	203	93	19
14. Mureş Aut. Maghiară	1084	192	173	15	753	180	164	15
15. Oltenia	1814	216	211	19	1088	244	214	28
16. Ploieşti	2748	500	442	27	2001	491	369	31
17. Suceava	918	113	113	11	861	133	133	8
Total	26146	4292	3509	580	19485	4349	3615	511

Este de remarcat faptul că numai 5 regiuni au prezentat, la matematică, la etapa locală un număr sub 1 000 de elevi (Constanţa, Hunedoara, reg. Bucureşti, Suceava şi Maramureş), iar celelalte regiuni au prezentat peste 1 000 elevi; la fizică sînt 9 regiuni.

Desigur, creşterea interesului pentru O.M.F., concretizată prin numărul de participanţi la etapa locală, este îmbucurătoare, dar mai îmbucurător este faptul că nivelul de pregătire al participanţilor este în progres.

Într-o oarecare măsură acest nivel de pregătire se reflectă prin creşterea numărului de elevi prezentaţi la etapa regională O.M.F., astfel în 1961 au fost 6 591 de concurenţi, iar în 1962 au fost 7 124 de concurenţi.

Creşterea numărului de elevi participanţi la etapa locală şi regională impune o creştere corespunzătoare a numărului de cadre didactice care conduc lucrările olimpiadei.

Majoritatea filialelor au ştiut să antreneze un număr important de profesori care să lucreze cu entuziasm şi conştiincios; au avut rezultate frumoase în această direcţie filialele Oradea, Iaşi, Deva etc.

Trebuie relevat însă şi faptul negativ că în unele regiuni ca: Braşov, Oltenia, Suceava se semnalează o oarecare delăsare în munca profesorilor. De pildă, în darea de seamă a filialei Braşov se relatează că „multe cadre didactice au rămas aceleaşi, fără nici un interes şi mereu grăbite", iar în informarea delegatului la regiunea Suceava se arată că: „...participarea profesorilor din oraşul Suceava a lăsat de dorit, majoritatea sarcinilor fiind îndeplinite de profesorii veniţi din celelalte raioane".

Organizarea tradiţională a olimpiadelor contribuie în mare măsură la educarea comunistă a elevilor, deoarece printr-o pregătire temeinică şi susţinută ei dovedesc dorinţa însuşirii a cît mai multor şi mai aprofundate cunoştinţe, astfel că mai tîrziu să-şi aducă aportul lor în opera de desăvîrşire a construcţiei socialiste la noi în ţară.

Subiectele pentru toate etapele au fost întocmite ca și în ceilalți ani de comisia centrală. Dar comisia centrală întîmpină greutăți la alcătuirea subiectelor deoarece propunerile venite din partea profesorilor din țară sînt în număr insuficient la matematică, iar la fizică în număr și mai redus. Cu toate acestea comisia centrală a elaborat și selecționat o serie de probleme corespunzătoare programei olimpiadei publicat în G.M.F.-B. Comisiile locale și regionale au semnalat pe lîngă aprecierea problemelor alese și unele deficiențe. La problema de algebră pentru clasa a VIII-a (etapa regională) a fost o greșală de tipar. La problemele pentru școlile profesionale cunoștințele matematice nu erau în concordanță cu programa școlară, în special pentru școlile profesionale agricole. La fizică, subiectele teoretice erau prea vaste etc.

Semnalăm faptul pozitiv că comisia centrală s-a orientat spre acele probleme care familiarizează pe elevi cu noțiunile noi introduse în programa școlară și pentru rezolvarea cărora se cere o gîndire mai aprofundată.

Din constatările comisiilor de corectare se desprind cîteva indicații, puține, de fapt, cu privire la lipsurile în cunoștințele elevilor și direcțiile de urmat în predarea matematicii în anul viitor. Astfel elevii clasei a XI-a din regiunea Dobrogea nu au discutat problema de geometrie analitică, s-au mulțumit să găsească ecuația locului geometric, nu au încercat să descompună în factori ecuația de gradul II al locului; elevii clasei a IX-a din regiunea Crișana nefiind familiarizați cu sisteme simetrice, nu au reușit să scrie grupele de soluții ale sistemului. Elevii din clasa a XI-a din orașul Ploiești nu pot lega la etapa locală cunoștințele noi cu cele căpătate în anii precedenți, împotmolindu-se în calcule și raționamente inutile față de simplitatea soluției etc.

Pentru a asigura o bună desfășurare a etapei regionale, Biroul S.S.M.F. a trimis delegați care au adus subiectele și au urmărit și îndrumat buna desfășurare a concursului. Se remarcă faptul pozitiv că filialele S.S.M.F. au luat măsurile necesare pentru a asigura condițiile materiale optime pentru elevi și profesorii însoțitori ca și organizarea cu forțe locale a unui bogat program cultural-educativ.

Anul acesta s-a organizat în majoritatea regiunilor discutarea rezolvărilor date de elevi problemelor, indicîndu-se soluțiile corecte. Același lucru s-a realizat, ca de obicei, și la etapa finală.

Consfătuirile asupra cercurilor de elevi pe oraș, au permis un schimb mai larg de idei și de experiență în special la Galați, Craiova, Tg. Mureș, unde au participat reprezentanți ai unor filiale și subfiliale din alte regiuni.

Organele locale de partid și de stat au dat ca și în anii precedenți ajutor substanțial în asigurarea bunei organizări și desfășurări a celei de a XIII-a ediții a olimpiadei de matematică și fizică.

Unele deficiențe semnalate de filialele Oradea, Craiova, Suceava etc. cu privire la cazare, masă, premii, se datoresc și faptului că filialele nu au luat legătura din timp cu organele locale și nu au cunoscut documentele care reglementează ținerea acestor olimpiade.

Elevilor evidențiați la etapa regională li s-au acordat premii în cărți și diplome ca și în anii precedenți, valoarea premiilor a variat foarte mult de la regiune la regiune, datorită sprijinului material diferit pe care secțiile de învățămînt și cultură regională l-au acordat. Aceasta se datorește modului diferit în care organele sfaturilor regionale au înțeles importanța olimpiadei de matematică și fizică și uneori slabei activități depuse de filialele S.S.M.F. Amintim cîteva regiuni și sumele acordate: Ploiești 3 500 lei, Mureș Autonomă Maghiară și Galați cîte 2 700 lei, Maramureș 2 000 lei, Hunedoara 1 200 lei, Oltenia 1 000 lei etc.

Etapa regională O.M.F. 1962 ca și cea finală au prilejuit organizarea unor consfătuiri cu cititorii gazetei seria B, iar în cîteva regiuni (Suceava, Crișana, Iași) s-au prezentat conferințe sau referate pe anumite teme. La Deva s-a organizat o sesiune științifică pe plan regional. Au fost prezentate 6 lucrări cu caracter metodico-științific, în fața a 30 de profesori.

Dintre cei 1 091 elevi premiați și evidențiați la etapa regională, 580 la matematici și 511 la fizică, au fost admiși a participa la etapa finală (București) un număr de 347 elevi (163 la matematică și 184 la fizică), repartizați pe regiuni astfel: Argeș 15, Bacău 8, Banat 13, Brașov 14, oraș București 98, reg. București 13, Cluj 22, oraș Constanța și regiunea Dobrogea 12, Crișana 16, Galați 13, Hunedoara 27, Iași 13, Maramureș 11, Mureș Autonomă Maghiară 9, Oltenia 25, Ploiești 32 și Suceava 16. De fapt nu au participat însă decît 331 elevi (159 la matematică și 172 la fizică).

Lucrările scrise la matematică și aprecierea la examenul oral au arătat că mulți elevi posedă cunoștințe temeinice. Au o pregătire ce depășește cu mult nivelul mediu la clasă. S-au obținut rezultate mai bune față de anul precedent la clasa a 10-a și a 11-a.

S-au ivit unele defecțiuni la problemele propuse, fie datorită unei formulări nepotrivite (cl. a 8-a), unei alegeri neadecvate (anul I școli maiștri) sau unei transcrieri greșite).

La fizică proba scrisă și lucrările de laborator au arătat că majoritatea elevilor care au ajuns la etapa republicană sînt bine pregătiți. Ei pot lega cunoștințele teoretice de practică, lucru dovedit prin executarea lucrărilor de laborator, prin rezolvarea problemelor date la lucrarea scrisă sau prin răspunsurile bune la examinarea orală.

Anul acesta s-au format colective de profesori din învățămîntul superior și mediu care au verificat problemele înainte de a fi multiplicate, ceea ce a contribuit la evitarea unor greșeli sau inadvertențe.

La etapa finală au fost premiați 58 elevi (23 la matematică și 35 la fizică), iar 39 elevi au fost menționați (20 la matematică și 19 la fizică).

Prezintă interes repartizarea premiaților și evidențiaților pe regiuni: orașul București 23, reg. Argeș 3, Bacău 2, Banat 6, Brașov 6, București 4, Cluj 4, Or. Constanța 3, reg. Dobrogea 2, Crișana 3, Galați 4, Hunedoara 2, Iași 6, Maramureș 1, Mureș Autonomă Maghiară 1, Oltenia 5, Ploiești 12, Suceava 5.

Lista premiaților și menționaților a fost publicată în G.M.F.-B nr. 7/1962.

O parte din cei premiați la matematică (8 elevi) au participat la cea de a IV-a ediție a olimpiadei internaționale din R. S. Cehoslovacă. Alți 12 elevi au primit ca premiu și o excursie de 2 zile în R. P. Bulgaria.

Închiderea festivă a olimpiadei s-a făcut în ziua de 13 iunie în sala de teatru a Palatului Pionierilor.

In ansamblu, cea de-a 13 ediție a O.M.F. a sporit preocuparea elevilor și profesorilor pentru această manifestare a activității extrașcolare la matematică și fizică și a stimulat creșterea permanentă a cunoștințelor științifice ale tinerei generații.

In momentul de față, în activitatea S.S.M.F., vor trebui atrase cu mai multă vigoare, cele mai devotate cadre didactice, tinere și vîrstnice, din școlile de nivel mediu și din institutele de învățămînt superior.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1963

PROGRAMA MATERIEI CERUTĂ PENTRU OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ PE ETAPE

MATEMATICĂ

I — *Etapa locală — la 10 februarie 1963*

A — *Clasa a VIII-a și anul I școli pedagogice*

1. *Algebră:* Numere raționale, expresii algebrice, expresii raționale fracționare. (pînă la capitolul: Expresii iraționale).
2. *Geometrie:* Unghiuri, triunghiuri, perpendiculare și oblice. drepte paralele. Pînă la capitolul: Patrulatere.

B — *Clasa a IX-a și anul II școli pedagogice*

1. *Algebră:* Ecuații de grad superior care se reduc la gradul II, sisteme de ecuații de gr. II (șiruri de numere). progresii aritmetice și geometrice (Pînă la funcții).
2. *Geometrie:* Segmente proporționale, asemănarea triunghiurilor și poligoanelor (pînă la capitolul: Relații metrice).

C — *Clasa a X-a*

1. *Algebră:* Analiza combinatorie și binomul lui Newton, divizibilitatea numerelor și polinoamelor, cel mai mare divizor și cel mai mic multiplu comun al numerelor și polinoamelor (pînă la capitolul: Numele complexe).
2. *Geometrie:* Drepte și plane paralele, drepte perpendiculare pe un plan, proiecții, unghiuri diedre și plane perpendiculare (pînă la capitolul: Poliedre).
3. *Trigonometrie:* Funcții trigonometrice (pînă la capitolul: Formule fundamentale).

(*La anul III școli pedagogice* se cere materia predată la zi).

D — *Clasa a XI-a*

1. *Analiză matematică:* Numere, noțiuni elementare despre mulțimi, șiruri, puteri și logaritmi, simboluri cu $+\infty$ și $-\infty$ funcții, limite de funcții, continuitate (pînă la capitolul: Derivate).
2. *Geometrie analitică:* Geometrie pe o dreaptă, geometria în plan, linia dreaptă, locuri geometrice (pînă la capitolul: Cercul).

E — *Anul I școli profesionale*

1. *Algebra* (pînă la ecuațiile de gradul I).
2. Geometria plană.

F — Anul II școli profesionale

Sisteme de ecuații; reprezentări grafice; puteri, radicali.

G — *Anul I școli tehnice de maiștri*

1. Aritmetica. 2. Algebra, pînă la ecuații de gradul I. 3. Geometria plană, pînă la poligoane regulate. 4. Trigonometria pînă la variații de funcții.

H — *Anul II școli tehnice de maiștri*

Toată materia de pe trimestrul I.

II — *Etapa regională — la 23—25 martie 1963*

A — *Clasa a VIII-a și anul I școli pedagogice*

1. *Algebră:* La această etapă, pe lîngă materia prevăzută pentru prima etapă se mai adaugă și capitolele: Ecuația de gradul I, sisteme de ecuații de gr. I cu 2 și 3 necunoscute (pînă la capitolul: Inegalități de gradul I).
2. *Geometrie:* în plus: patrulatere, drepte concurente în triunghi (pînă la capitolul cercul).

B — *Clasa a IX-a și anul II școli pedagogice*

1. *Algebră:* în plus capitolul: Expresii irațională, Funcția de gradul II, discuția ecuațiilor (pînă la capitolul: Funcții exponențiale).
2. *Geometrie:* în plus capitolul: Relații metrice (pînă la capitolul: Poligoane regulate).

C — *Clasa a X-a*

1. *Algebră:* în plus capitolul: Numere complexe (pînă la capitolul: Proprietăți ale polinoamelor și rezolvarea ecuațiilor).
2. *Geometrie:* în plus capitolul: Poliedre (pînă la capitolul: Corpuri rotunde).
3. *Trigonometrie:* în plus capitolul: Formule fundamentale, rezolvarea triunghiului dreptunghic (pînă la Relații între elementele triunghiurilor oarecare).

(La anul III școli pedagogice se cere materia predată la zi).

D — *Clasa a XI-a*

1. *Analiza matematică:* Capitolul: Derivate (pînă la studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor).
2. *Geometrie analitică:* în plus capitolul: Cercul, Elipsa (pînă la cap. Hiperbola).

E — *Anul I școli profesionale*

1. *Geometria în spațiu* pînă la cap. Cilindrul.
2. *Algebră:* Ecuații de gr. I.

F — *Anul II școli profesionale*

1. *Trigonometria* (pînă la triunghiul dreptunghic).
2. *Algebra:* Ecuația de gradul II.

G — *Anul I școli tehnice de maiștri*

1. Algebra pînă la ecuațiile de grad superior. 2. Trigonometria pînă la Relații și formule trigonometrice.

H — *Anul II școli tehnice de maiștri*

Toată materia anului I și anului II.

III — *Etapa finală — la 26—28 mai 1968*

Intreaga materie.

FIZICĂ

I — *Etapa locală, la 17 februarie 1963*

Clasa VIII-a

Materia pînă la capitolul: Dinamica.

Clasa IX-a de zi

Materia pînă la capitolul: Fizica moleculară și căldura.

Clasa X-a de zi și serală

Materia pînă la „Curentul electric în electroliți".

Clasa XI-a de zi, serală și școli tehnice pentru personal tehnic

Materia pînă la capitolul: Optica.

Clasa VIII-a serală

Materia pînă la capitolul: Atracția universală.

Clasa IX-a serală

Materia pînă la capitolul: Proprietățile lichidelor.

Școli pedagogice

Pentru toți anii: materia predată la zi.

Anul I școli profesionale

Toată mecanica teoretică.

Anul I școli tehnice de maiștri

Materia pînă la capitolul: Electricitatea.

II — *Etapa regională, la 23—25 martie 1963*

Clasa VIII-a

De la început pînă la capitolul: Atracția universală.

Clasa IX-a

De la început pînă la capitolul: Proprietățile corpurilor lichide

Clasa X-a și a X-a serală

De la început pînă la capitolul: Forța electrodinamică.

Clasa XI-a zi, serală și școli tehnice pentru personal tehnic

De la început pînă la capitolul: Optica fizică.

Clasa VIII serală

De la început pînă la capitolul: Planul înclinat.

Clasa IX serală

De la început pînă la capitolul: Stările de agregare.

Anul I școli profesionale

Mecanica teoretică și rezistența materialelor.

Anul I școli tehnice de maiștri

De la început plus capitolul: Electricitatea.

III — *Etapa finală, la 26—28 mai 1963*

Toată materia.

CALEIDOSCOP MATEMATIC

La o serată la care participa și marele poet rus *Lermontov*, un jucător de cărți care se pretindea cunoscător al științelor fizice și matematice i-a cerut acestuia să facă o urare.

Lermontov, a cărui predilecție pentru matematici era cunoscută i-a spus: „Îți doresc să ai noroc la cărți de atîtea ori, pe cît de multe sînt numerele egale cu patratul sumei cifrelor lor", după care toți cei de față au aplaudat.

Să vedem în ce constă esența urării poetului:

Să considerăm numărul $N = \overline{x_1x_2x_3\ldots x_n}$

Trebuie să avem:

$$\overline{x_1x_2x_3\ldots x_n} = (x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2$$

Pentru $n \geqslant 5$ este adevărată dubla inegalitate:

$$10^{n-1} < \overline{x_1x_2x_3\ldots x_n} = (x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2 \leqslant (9n)^2$$

Dacă $n = 4$, obținem

$$1000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4 = A^2 \qquad (1)$$

unde am notat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A$. Efectuînd calculele avem:

$$111x_1 + 11x_2 + x_3 = \frac{1}{9} \cdot A \cdot (A - 1)$$

Din relația (1) reiese că $A^2 < 1000$, deci $A < 31$.

Dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 9$, avem $S = 36 > 31$. Obținem astfel numărul $111x_1 + 11x_2 + x_3 = 140$, care nu corespunde.

Analog rezolvăm pentru cazul $n = 3$. Obținem un număr care nu corespunde. Pentru $n = 2$ obținem soluția unică: $N = 81 = (8 + 1)^2$.

Vodă Gh. Viorel, elev, București

PROBLEME REZOLVATE

Problema 4906

Fie H ortocentrul triunghiului ABC înscris în cercul de rază R și A', B', C' inversele punctelor A, B, C față de polul H și puterea K. Să se demonstreze că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$ și $\frac{K}{2R}$ este raza acestui cerc. (În legătură cu problema 2884).

Ixaru Grigore, profesor Găești

Soluție. Considerăm $K < 0$. Prin ipoteză avem:

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = K. \qquad (1)$$

Din primele două rapoarte scoatem: $\frac{HA}{HB'} = \frac{HB}{HA'}$ deci triunghiurile ABH și $B'HA'$ sînt asemenea și deci $\sphericalangle ABH = \sphericalangle HA'B'$ (se opun la laturi proporționale). Deci, $\sphericalangle AA'B' = 90^0 - A$.

De asemenea, avem din (1): $\frac{HA}{HC'} = \frac{HC}{HA'}$, deci triunghiurile AHC și $A'HC'$ sînt asemenea, deci: $\sphericalangle C'A'H = \sphericalangle HCA = 90^0 - A$.

Deci: $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle C'A'H = 90^0 - A$ și rezultă că AA' este bisectoare în triunghiul $A'B'C'$.

Analog demonstrăm că $C'C$ și $B'B$ sînt bisectoare în triunghiul $A'B'C'$, deci H (intersecția lor) este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$.

Proiectăm punctul H pe $A'B'$ în P. În triunghiul dreptunghic HPA' avem: $HP = r = HA' \cdot \sin \sphericalangle HA'B' = HA' \cdot \sin (90^0 - A) = HA' \cdot \cos A =$

$= \frac{K}{HA} \cos A.$

Dar, $HA = AC \sin \sphericalangle ACH \sec \sphericalangle BAH = 2R \cdot \cos A.$

Deci $r = \frac{K \cos A}{2R \cos A} = \frac{K}{2R}$.

Problema 4920

Se dă un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuțit a în A. Fie H simetricul lui B față de latura CD. Se notează cu b și c unghiurile HAB și HDC. Să se arate că între unghiurile a, b c avem relația:

$$\operatorname{ctg} a = 2 \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} c$$

* * *

Soluție. Se observă că: E și F fiind proiecțiile lui D și B respectiv pe AB și CD, $\operatorname{ctg} a = \frac{AE}{DE}$; $\operatorname{ctg} b = \frac{AB}{BH} = \frac{AB}{2DE}$; $\operatorname{ctg} c = \frac{DP}{FH} =$

$= \frac{AB - AE}{DE}$. Avem:

$$2 \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} c = \frac{AB}{DE} - \frac{AB - AE}{DE} = \frac{AE}{DE} = \operatorname{ctg} a,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 4932

O cantitate de hidrogen de 0,2 kg se află în cilindrul unei pompe la presiunea de 5 atmosfere și temperatura de 27°C. Gazul este supus unei destinderi la temperatură constantă, pînă la presiunea de 2 atmosfere.

a) *Să se afle volumul inițial și volumul final al gazului.*

b) *Se deschide apoi o supapă și o parte din gaz iese afară pînă cînd presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică normală. Dacă temperatura gazului a scăzut cu 2 grade să se afle cantitatea de gaz rămasă în corpul de pompă.*

Maria Vanță, profesoară Petroșani

Soluție. Cunoscînd presiunea, temperatura și masa gazului în stare inițială se poate determina volumul corespunzător aplicînd ecuația de stare, adică :

$$p_1 v_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \quad \text{sau :} \quad v_1 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT_1}{p_1}.$$

Folosind sistemul de unități CGS avem :

$$v_1 = \frac{200}{2} \cdot \frac{8{,}313 \cdot 10^7 \cdot 300}{5 \cdot 1{,}013 \cdot 106} = 2{,}4929\ m^3.$$

Pentru aflarea volumului final V_2 aplicăm legea lui *Boyle-Mariotte* pentru cele două stări și obținem :

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad \text{de unde :} \quad v_2 = \frac{p_1 v_1}{p_2} = 0{,}499 \cdot \frac{5}{2} = 1{,}247\ m^3.$$

Ca să determinăm cantitatea de gaz rămasă în cilindru aplicăm în starea finală, ecuația de stare $p_3\ v_2 = \frac{m_3}{\mu} RT_3$ de unde :

$$m_3 = \frac{p_3 v_2 \mu}{RT_3} = \frac{p_3 m T_1}{p_2 T_3} \quad \text{sau :} \quad m_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{300}{298} \cdot 200 = 100{,}3g = 0{,}1003kg.$$

Problema 4933

Să se afle numărul de patru cifre în care suma cifrelor sale este egală cu numărul format de primele două cifre mai puțin două unități, iar diferența între el și răsturnatul său este egală cu 270.

Ilie N. Constantinescu

Soluție. Fie $N = abcd$ numărul cerut, a, b, c, d fiind cifrele sale. Aceste cifre trebuie să satisfacă condițiile :

$$a + b + c + d = 10a + b - 2 \qquad (1)$$

$$1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a = 270$$

sau :

$$999(a-d) + 90(b-c) = 270 \text{ sau}$$

$$111(a-d) + 10(b-c) = 30 \text{ sau}$$

$$3.37(a-d) = 2.5(c-b+3)$$

37 fiind prim, ar trebui să dividă unul din factorii din membrul al doilea, ceea ce nu se poate.

Această egalitate nu este verificată decît pentru $a = d$, $b = c + 3$, astfel că numărul cerut este:

$$N = a(c + 3)ca.$$

Relația (1) devine în acest caz:

$$2a+2c+3=10a+c+3-2$$

$$8a-c=2$$

Această relație este satisfăcută numai pentru $a=1$, $c=6$.

Avem deci singura soluție $N=1961$.

Problema 4934

O bilă cu masa de 0,5 kg este aruncată în sus pe verticală și după 2 secunde atinge înălțimea maximă. Căzînd se înfundă în pămînt moale cu 10 cm. Să se determine rezistența întîmpinată de bilă cînd a pătruns în sol.

* * *

Soluție. — Cunoscînd timpul de urcare se poate determina înălțimea maximă la care urcă bila:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

și deci, putem calcula energia potențială a bilei:

$$W_p = mgh = m\frac{g^2t^2}{2}.$$

În căderea bilei, energia potențială se transformă în energie cinetică. Cînd bila pătrunde în sol energia ei se consumă pentru învingerea forței de rezistență, deci putem scrie că energia este egală cu lucrul mecanic al forței rezistente:

$$m\frac{g^2t^2}{2} = F \cdot s \quad \text{de unde:} \quad F = \frac{mg^2t^2}{2s}$$

sau:

$$F = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}81^2 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}1} \approx 960{,}4$$

$$\approx 98 \text{ kgf}.$$

Problema 4943

Printr-o conductă cu secțiunea variabilă curge un fluid. În două secțiuni S_1 și S_2 ale conductei se introduc tuburi manometrice. Cunoscînd denivelarea Δh a lichidului în cele două tuburi manometrice și secțiunile corespunzătoare S_1 și S_2, să se determine debitul fluidului în conductă.

* * *

Soluție. — Aplicăm ecuația continuității vînei de fluid pentru secțiunile considerate și obținem :

$$Q = S_1 v_1 = S_2 \cdot v_2 \tag{1}$$

în care cu Q am notat debitul volumetric, iar v_1 și v_2 sînt vitezele fluidului în secțiunile respective. Folosind de asemenea, ecuația lui Bernoulli ținînd seamă că conducta este orizontală. Avem :

$$\frac{\varrho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\varrho v_2^2}{2} + p_2. \tag{2}$$

Prin ρ am notat densitatea fluidului, iar prin p_1 și p_2 presiunile statice indicate de cele două monometre. Ecuația (2) se poate scrie și sub forma :

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}(v_1^2 - v_1^2) \tag{3}$$

sau ținînd seamă de faptul că $p_1 = h_1 \rho g$ și $p_2 = h_2 \rho g$ ecuația devine :

$$2\varrho g (h_1 - h_2) = \varrho (v_2^2 - v_1^2).$$

Deoarece $h_1 - h_2 = \Delta h$, iar ρ se simplifică avem :

$$2g\Delta h = v_2^2 - v_1^2. \tag{4}$$

Eliminăm acum pe v_1 și v_2 între ecuațiile (1) și ecuația (4). Obținem $2g\ \Delta h = \frac{Q^2}{S_2^2} - \frac{Q^2}{S^2}$ din care scoatem necunoscuta problemei :

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\varrho \Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Problema 4946

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene într-un triunghi oarecare ABC, iar A_2, B_2, C_2 punctele unde o transversală oarecare taie laturile BC, CA, AB. Se consideră punctele $A_3 \equiv (B_1C_2 ; BC)$, $B_3 \equiv C_1A_2 ; CA)$, $C_3 \equiv (A_1B_2 ; AB)$. Să se arate că AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente.

* * *

Soluție dată de *G. G. Nicolescu*, elev Roman. Conform teoremei lui Ceva, avem :

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

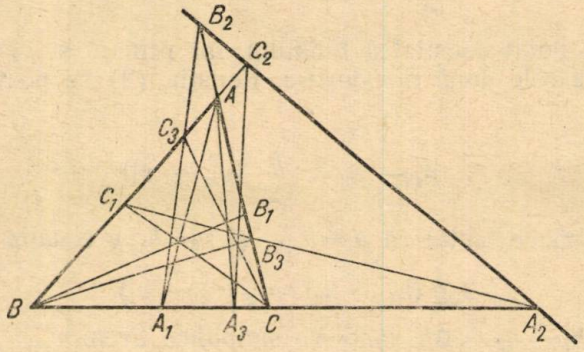
iar teorema lui Menelaus ne dă :

$$\frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} = 1.$$

Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului ABC tăiat de transversalele A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2, obținem

$$\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=1;\quad \frac{C_2B}{C_2A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_3C}{A_3B}=1;$$

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_3C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1.$$



Din aceste ultimele trei relații deducem:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_2C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1.$$

Ținînd seama de primele două relații, rezultă:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B}=1$$

adică conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente.

Problema 4947

Dacă între laturile a, b, c, ale unui triunghi avem relația:

$$a^2(-a^4+b^4+c^4)+b^2(a^4-b^4+c^4)+c^2(a^4+b^4-c^4)=3a^2b^2c^2$$

atunci, ortocentrul și centrul cercului circumscris coincid.

Ilie N. Constantinescu

Soluție. Distanța OH dintre ortocentru și centrul cercului circumscris e dată de formula cunoscută

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2);\ \text{dar}\ 4RS=abc\ \text{și}$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Deci :

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16S^2} = \frac{a^2b^2c^2}{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}$$

și

$$OH^2 = \frac{9a^2b^2c^2}{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]} - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Notăm numărătorul fracției din partea dreaptă cu M. Vom avea :

$$M = 9a^2b^2c^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2ab - c^2) \cdot (c^2 - a^2 - b^2 + 2ab),$$

sau

$$M = 9a^2b^2c^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Deci

$$M = 3a^2b^2 - a^2(-a^4 + b^4 + c^4) - b^2(a^4 - b^4 + c^4) - c^2(a^4 + b^4 - c^4)$$

Dacă $M = 0$, rezultă că $OH = 0$, deci ortocentrul și centrul cercului circumscris coincid.

Problema 4948

Să se demonstreze că aria dodecagonului regulate este egală cu de trei ori aria patratului ce are ca latură raza cercului circumscris.

* * *

Soluția. —

Fie $AB = BC = CD =$ latura dodecagonului și $OAFD$ patratul construit pe raza cercului circumscris dodecagonului.

Pe bisectoarea unghiului AOB luăm punctul E astfel ca $OE = AB$.

În triunghiurile AOE și ABF avem : $AO = AF =$ cu raza cercului, $OF = AB$ prin construcție și $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BAF$, ambele avînd ca măsuri jumătatea arcului AB.

Rezultă egalitatea triunghiurilor AOE și ABF, apoi a triunghiurilor BOE și DCF. De aici rezultă că $AE = BF$, $EB = CF$; iar $AB = BC$ ca laturi ale dodecagonului. Deci, triunghiurile ABE și BCF sînt egale.

Astfel, triunghiurile AOB și BOC și COD sînt egale, aria unuia din aceste triunghiuri este $1/4$ din aria patratului $AODF$, iar aria dodecagonului este $\frac{12}{4} = 3$ ori aria aceluiași patrat.

Problema 4951

Într-o fază de preparare a unui minereu acesta formează un amestec neomogen cu apa, astfel încît densitatea amestecului crește proporțional cu adîncimea. Știind că la suprafața vasului densitatea amestecului este de 1 g/cm³, iar la adîncimea de 20 cm de 5 g/cm , să se determine : a) *legea de variație a densității cu adîncimea,*

b) *legea de variație a presiunii cu adîncimea,*

c) *presiunea pe fundul vasului, dacă înălțimea amestecului în vas este de 0,5 m.,*

d) *forța de apăsare a fundului vasului, dacă acesta este un pătrat cu latura de 1 m.*

Maria Vanță, profesoară **Petroșeni**

Soluție. — a) Deoarece densitatea variază proporțional cu adîncimea x, ea se va exprima printr-o funcție de gradul I în x, adică:

$$\varrho = \varrho_0 + Kx. \qquad (1)$$

Pentru determinarea necunoscutului ρ_0 și K ne folosim de valorile cunoscute ale densității la suprafața vasului și la adîncimea de 20 cm. Cînd $x=0, \rho=1$ deci relația (1) devine:

$$1 = \varrho_0.$$

Cînd $x = 20$; $\rho = 5$, deci putem scrie:

$$5 = 1 + K \cdot 20,$$

de unde:

$$K = \frac{4}{20} = 0{,}2.$$

Astfel, relația (1) devine:

$$\varrho = 1 + 0{,}2\,x$$

care reprezintă legea de variație a densității cu adîncimea.

b) Pentru determinarea legii de variație a presiunii cu adîncimea, în formula cunoscută a presiunii $p = h \cdot \rho \cdot g$ vom înlocui pe h cu x, deoarece am notat adîncimea cu x și pe ρ din expresia (2) și vom obține:

$$p = g \cdot x\,(1 + 0{,}2\,x).$$

c) Presiunea pe fundul vasului se obține din (3) făcînd $x = 0{,}5\ m = 50$ cm. Obținem:

$$p = 50 \cdot 981\,(1 + 0{,}2 \cdot 50) = 53 \cdot 9 \cdot 550\ \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}$$

d) Determinăm forța de apăsare pe fundul vasului înmulțind presiunea cu suprafața fundului adică:

$$F = p \cdot S = 539550 \cdot 10 \text{ dine} = 53955 \text{ N}$$

$$F = \frac{53955}{9{,}81} = 5500 \text{ kgf}.$$

Problema 4955

Un condensator plan cu suprafața plăcilor de 31,4 cm² și distanța dintre ele de 1 mm este supus la o tensiune de 1200 volți. Dielectricul care umple spațiul dintre plăci are permitivitatea $\varepsilon = 4$.

a) *Ce valoare are sarcina electrică de pe armături și cum se schimbă dacă se scoate dielectricul dintre plăci menținîndu-se tensiunea constantă?*

b) *Cum variază tensiunea dintre armături dacă condensatorul încărcat se deconectează de la sursă și apoi i se scoate dielectricul?*

c) *Să se afle în ambele cazuri variația intensității cîmpului electric dintre armături.*

* * *

Soluție. — a) Deoarece $Q = C.V.$ pentru determinarea sarcinii este necesară determinarea capacității condensatorului

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} = \frac{4 \cdot 31{,}4}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1} = 100 \text{ ues CGS.}$$

Deci:

$$Q = 100 \cdot 4 = 400 \text{ ues CGS.}$$

Notînd cu Q_0 sarcina electrică în lipsa dielectricului avem:

$$Q_0 = \frac{S}{4\pi d} V = 100 \text{ ues CGS.}$$

b) Cînd condensatorul se deconectează de la sursă sarcina de pe el rămîne constantă și cum $Q = CV$, deoarece capacitatea scade, tensiunea trebuie să crească. În adevăr,

$$V_0 = \frac{Q}{c_0} = \frac{400}{25} = 16 \text{ ues} = 4800 \text{ volți.}$$

c) Intensitatea cîmpului în prezența dielectricului este:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1200}{0{,}1} = 12000 \text{ volți/cm.}$$

Dacă menținîndu-se tensiunea constantă se scoate dielectricul, intensitatea cîmpului rămîne constantă.

În cazul în care condensatorul se deconectează de la sursă prin scoaterea dielectricului tensiunea crește și o dată cu ea cîmpul electric.

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = 48000 \frac{\text{volți}}{\text{cm.}}$$

Problema 4962

Pe o suprafață metalică de cesiu cad radiații electromagnetice cu lungimea de undă $\lambda = 5$ mμ.

a) *Să se determine viteza maximă a fotoelectronilor emiși de suprafață, dacă pragul fotoelectric al cesiului este $\lambda_0 = 6600$*

b) *Presupunînd că toți fotoelectronii cad pe armătura unui condensator cu capacitatea $C = 100$ cm și-l încarcă pînă la tensiunea $V = 300$ volți, să se determine numărul de fotoelectroni emiși de suprafața metalică.*

Maria Vanță, profesoară Petroșeni

Soluția autoarei. — Aplicăm ecuația lui Einstein pentru efectul fotoelectric

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + h\nu_0$$

în care $h\nu$ este energia fotonilor incidenți, $h\nu_0$ este energia pragului fotoelectric, iar $\frac{mv^2}{2}$ energia cinetică a fotoelectronilor emiși.

Obținem:

$$v^2 = \frac{2h(\nu - \nu_0)}{m}.$$

Deoarece $\nu = \frac{c}{\lambda}$ și $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, expresia precedentă devine:

$$v^2 = \frac{2hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}{m} = \frac{2hc(\lambda_0 - \lambda)}{m\lambda\lambda_0}$$

sau:

$$v = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_0 - \lambda)}{m\lambda\lambda_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}624 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10\,(660 - 5)10^{-7}}{9{,}107 \cdot 10^{-28} \cdot 5 \cdot 660 \cdot 10^{-14}}}$$
$$\approx 93 \cdot 10^7 \text{ cm/s}.$$

Aflăm apoi, sarcina condensatorului:

$$Q = CV = 100 \cdot 1 = 100 \text{ u.e.s.}$$

și cunoscînd sarcina electronului aflăm numărul lor:

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{100}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} = \frac{10^{12}}{4{,}8} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ electroni.}$$

Problema 4974

Să se arate că expresia $E = 2^{4^n} + 5$ se divide prin 21, unde n este număr natural.

* * *

Soluție și generalizare. — Expresia $E = a^{4^n} + a^3 - a - 1$ se divide cu produsul $(a^{2^n} + a + 1)\ (a+1)\ (a-1)$.

Vom arăta aceasta prin inducție completă.

Pentru $n=1$ avem $E_1 = a^4 + a^3 - a - 1 = (a-1)\ (a+1)\ (a^2+a+1)$ deci, E_1 se divide prin fiecare din factori.

Să presupunem că E_k se divide prin trei factori și să demonstrăm că și $E_{k+1} = a^{4^{k+1}} + a^3 - a - 1$ se divide prin aceiași factori:

Putem scrie:

$$E_{k+1} = (a^4 - a + a)^{4^k} + a^3 - a - 1 = [a(a^3 - 1) + a]^{4^k} + a^3 - a - 1 =$$
$$= \mathfrak{M}(a-1)\ (a^2 + a + 1) + a^{4^k} + a^3 - a - 1 = \mathfrak{M}(a-1)\ (a^2 + a + 1).$$

Dar,

$$E_{k+1} = (a^4 + a - a)^{4^k} + a^3 - a - 1 = [a(a^3+1) - a]^{4^k} + a^3 - a - 1 =$$
$$= \mathfrak{M}(a+1) + a^{4^k} + a^3 - a - 1 = \mathfrak{M}(a+1).$$

Deoarece expresiile $(a+1)$, $(a-1)$ și $a^2 + a + 1$ sînt prime între ele rezultă că expresia $E(n) = a^{4^n} + a^3 - a - 1$ se divide prin produsul $(a^2 + a + 1)\ (a+1)\ (a-1)$.

Pentru $a = 2$ avem $E = 2^{4^n} + 5$, care se divide prin 21, adică problema 4974.

Problema 4979

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} - \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2.$$

Matematika v școle, Moscova 1961

Soluție și generalizare. — Sub o formă mai generală ecuația se scrie:

$$\sqrt[n]{\frac{a-kx^m}{b+kx^m}} - \sqrt[n]{\frac{b+kx^m}{a-kx^m}} = c.$$

Notînd $\sqrt[n]{\frac{a-kx^m}{b+kx^m}} = u.$ obținem

$$u^2 - c \cdot u - 1 = 0 \text{ sau: } u_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2+4}}{2}.$$

Prin urmare.

$$\frac{a-kx^m}{b+kx^m} = \frac{(c \pm \sqrt{c^2+4})^n}{2^n} \text{ sau: } \frac{a+b}{b+kx^m} = \frac{(c \pm \sqrt{c^2+4})^n + 2^n}{2^n} = A$$

de unde: $x = \sqrt[m]{\frac{a+b(1-A)}{A \cdot k}}$.

În cazul problemei date $m = 1$. $k = 1$ și $n = 4$ și $c = 2$ deci

$$x = \frac{(a-(1 \pm \sqrt{2})^4 \cdot b}{(1 \pm \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{a-(17 \pm 12\sqrt{2})b}{6(3 \pm 2\sqrt{2})}.$$

Problema 4980

Să se demonstreze că suma: $7 + 7^2 + \ldots + 7^{4n}$. n fiind un număr natural, se divide prin 100.

* * *

Soluție. — Fiind o progresie geometrică avem:

$$7 + 7^2 + \ldots + 7^{4n} = \frac{7^{4n+1} - 7}{7 - 1} = 7\,\frac{7^{4n} - 1}{6} = 7\,\frac{49^{2n} - 1}{6} =$$

$$= 7\,\frac{(49^n - 1)(49^n + 1)}{6} = \frac{\mathfrak{M}7\,(49 - 1)(49 + 1)}{6} = \mathfrak{M}\,2800.$$

Problema 4988

Să se rezolve în numere întregi sistemul

$$x - 2y + z = 0$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - axyz = 0,\ y \neq 0$$

unde a este un parametru întreg.

Dacă x, y, z sînt coordonatele unui punct M (x, y, z) dintr-un sistem de axe oxyz care formează un triedru tridreptunghic, să se afle valorile întregi ale lui a pentru care coordonatele punctului M sînt numere întregi, soluții ale sistemului dat.

Gh. Cezar, student București

Soluția autorului. Se rezolvă în numere întregi sistemul

$$x - 2y + z = 0$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - axyz = 0,\ y \neq 0.$$

Fie întregul $k = y - x$. Din prima ecuație rezultă $x = y - k$ și $z = y + k$ și substituind în a doua se obține:

$$(y - k)^3 + y^3 + (y + k)^3 - ay\,(y - k)\,(y + k) = 0$$
$$y\,[(3 - a)\,y^2 + (6 + a)\,k^2] = 0$$
$$\left(\frac{k}{y}\right)^2 = \frac{a - 3}{a + 6};\ y \neq 0 \text{ deci } a \neq -6.$$

Dacă există a întreg astfel încît fracția $\frac{a-3}{a+6}$ să fie patrat perfect, luînd pe y^2 astfel încît să dividă cîtul dintre numărul $a + 6$ și cel mai mare divizor comun al numerelor $a - 3$ și $a + 6$, se obține întregul k și sistemul se rezolvă în numere întregi.

Deoarece $a + 6 - (a - 3) = 9$, fracția $\frac{a-3}{a+6}$ se poate simplifica numai cu 3 și 9 (sau -3 și -9). Numerele $a - 3$ și $a + 6$ sînt patrate perfecte sau opusele lor, deci fracția $\frac{a-3}{a+6}$ este sau devine ireductibilă prin simplificare cu 9 (patrat perfect). Dar singurele patrate perfecte care diferă prin 9 sînt 0,9 și 16,25:

$$a - 3 = 16,\ a + 6 = 25,\ a_1 = 19,\ a - 3 = -25,\ a + 6 = -16,$$
$$a_2 = -22,\ a - 3 = 0,\ a + 6 = 9,\ a_3 = 3.$$

Numerele $a-3$ și $a+6$. dacă nu sînt patrate perfecte sau opusele lor, prin simplificarea fracției $\frac{a-3}{a+6}$ cu 3 se obține fracția ireductibilă $\frac{m-1}{m+2}$ cu întregul $m = a/3$, iar numerele $m-1$ și $m+2$ sînt pătrate perfecte sau opusele lor. Dar singurele patrate perfecte care diferă prin $m+2-(m-1)=3$ sînt 1 și 4:

$$m-1=1,\ m+2=4,\ m_1=2;\ a_4=3m_1=6,\ m-1=-4,$$

$$m+2=-1,\ m_2=-3;\ a_5=3m_2=-9.$$

Deci există numai 4 curbe ale familiei $x-2y+z=0$, $x^3+y^3+z^3-axyz=0$, $a\neq 3$ care trec prin puncte de coordonate întregi nesituate în planul xoz, pentru valorile parametrului întreg a: -22, -9, 6, 19.

Observare. Pentru $a_3=3$, găsim ca soluții și mulțimea punctelor de coordonate întregi, diferite de origine, ale bisectoarei triedrului *oxyz*.

Problema 4993

Să se demonstreze că dacă n este un număr întreg impar și pozitiv, există relația

$$(n+1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}C_n^{2k}=2^n.$$

Stănescu Cicerone

(În legătură cu problema 4530).

Soluție. Folosim dezvoltarea.

$$(1+x)^{n+1}=1+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+C_{n+1}^3x^3+\ldots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$$

care se poate scrie

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}=C_n^0x+\frac{C_n^1}{2}x^2+\frac{C_n^2}{3}x^3+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1}.$$

Pentru $x=1$ avem:

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\qquad(1)$$

iar pentru $x=-1$ avem

$$1-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-\frac{1}{4}C_3^n+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\qquad(2)$$

Adunînd relațiile (1) și (2) și ținînd seama că n este număr fără soț obținem:

$$2+\frac{2}{3}C_n^2+\frac{2}{5}C_n^4+\frac{2}{7}C_n^6+\ldots+\frac{2}{n}C_n^{n-1}=\frac{2\cdot 2^n}{n+1}\qquad(3)$$

sau simplificînd cu 2 obținem:

$$1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{5}C_n^4+\frac{1}{7}C_n^6+\ldots+\frac{1}{n}C_n^{n-1}=\frac{2^n}{n+1}$$

Aceasta mai poate fi scrisă astfel:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}C_n^{2k}=\frac{2^n}{n+1}\text{ sau }(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}=2^n.$$

Problema 4994

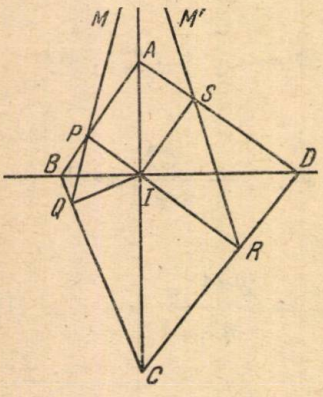
Fie P, Q, R, S proiecțiile intersecției I a diagonalelor AC, BD ale patrulaterului ABCD pe laturile AB, BC, CD, DA. Să se arate că dacă AC, BD sînt perpendiculare una pe alta, atunci PQ și RS se întîlnesc pe BD.

Gh. Buicliu

Soluție. Fie M intersecția PQ, AC. Transversala QPM față de triunghiul ABC dă

$$\frac{MA}{MC}\cdot\frac{QC}{QB}\cdot\frac{PB}{PA}=1. \tag{1}$$

Din triunghiurile dreptunghice AIB și BIG se vede că avem



$$BI^2=BA\cdot BP,\qquad AL^2=AB\cdot AP \tag{2}$$

și

$$BI^2=BC\cdot BQ,\qquad CI^2=BC\cdot QC \tag{3}$$

Din (2) și (3) se scoate

$$\frac{BI^2}{AI^2}=\frac{PB}{PA}\text{ și }\frac{CI^2}{BI^2}=\frac{QC}{QB}.$$

Înmulțind aceste relații și aducînd rezultatul în (1) avem

$$\frac{MA}{MC}=\frac{CI^2}{AI^2}=1\quad\frac{MA}{MC}=\frac{AI^2}{CI^2} \tag{4}$$

Notînd cu M' intersecția RS, AC și procedînd la fel cu triunghiurile AID și CID se găsește

$$\frac{M'A}{M'C}=\frac{AI^2}{CI^2} \tag{5}$$

Din(4) și (5) se vede că M și M' se confundă.
La fel se arată că PS, QR se întîlnesc pe BD.

Problema 4995

Să se arate că dacă $a + b + c$ divide pe $am + bn + cp$ atunci divide și pe $a(n + p) + b(m + p) + c(m + n)$ a,b,c,m,n,p fiind numere întregi.

George Dincă, student București

Soluție. Evident $a + b + c$ divide pe $a + b + c$ și orice multiplu de $a + b + c$.

Deci $a + b + c$ divide pe $(a + b + c)(m + n + p)$. Dezvoltînd avem că $a + b + c$ divide pe:

$$am + bn + cp + a(n + p) + b(m + p) + c(m + n)$$

$a + b + c$ divizînd această sumă și prin ipoteză termenul $am + bn + cp$, divide și celălalt termen. Deci $a + b + c$ divide pe:

$$a(n + p) + b(m + p) + c(m + n).$$

Problema 4996

Să se construiască un triunghi oarecare, cunoscînd pozițiile în plan a centrului de greutate, a centrului cercului înscris, precum și poziția punctului de contact a cercului înscris cu una din laturi.

Florescu Dan, elev, București

Soluție. Considerăm triunghiul ABC, triunghiul său antimedian (anticomplementar) $A''B''C''$, precum și punctele G (centrul de greutate al triunghiului ABC) I (centrul cercului înscris triunghiului ABC) și N (punctul lui Nagel al triunghiului ABC) N, punctul lui Nagel este punctul de concurență al dreptelor care unesc vîrfurile triunghiului ABC cu punctele de contact ale cercurilor exînscrise, situate pe latura opusă.

Printr-o proprietate cunoscută N este centrul cercului înscris în triunghiul antimedian cu raza 2r. El este deci complementar cu I. Triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sînt însă omotetice cu centrul de omotetie în G.

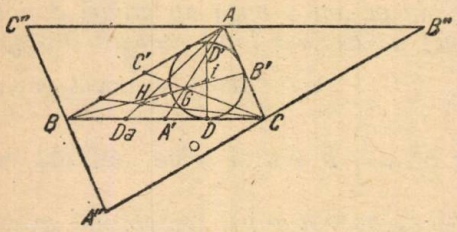
Dreapta NI trece prin centrul de omotetie deci N, G, I sînt colineare.

Omologia punctelor I și N în triunghiurile ABC și $A'B'C'$ dă $\frac{IG}{GN} = \frac{1}{2}$ raportul de omotetie; deci punctul G împarte segmentul NI în raportul $\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$ iar $NG = 2\ GI$.

Pe de altă parte ceviana $ANDa$ trece prin punctul D', dimetral opus lui D în cercul înscris căci razele ID' și la Da sînt omoloage (Ia fiind centrul cercului exînscris tangent la BC) deoarece cercurile cu centrele în I și Ia sînt direct omotetice.. Extremitățile sînt puncte omoloage și deci dreapta DaD' va trece prin centrul de omotetie A.

Este cunoscut faptul că Da și D sînt simetrice față de mijlocul lui BC, A'. Construcția. Cu raza ID (dată de centrul cercului înscris și

punctul de contact se trasează cercul înscris) și se duce perpendicular pe ID și tangentă la cerc o dreaptă (Δ) pe direcția lui BC. Prelungind IG cu o lungime $GN = 2IG$ obținem punctul lui Nagel N. Dreapta care trece prin N și D' (care se poate afla prelungind DI) taie dreapta (Δ) tangentă în D la cerc în D_a.



Cunoscînd D și D_a și aflînd mijlocul segmentului $D\,D_a$ aflăm piciorul medianei AA', adică mijlocul laturei BC.

$A'G$ prelungită cu lungimea $GA = 2A'G$ ne dă vîrful A. (G se află la $\frac{1}{3}$ de A' și la $\frac{2}{3}$ din A). Ducînd din A tangente la cercul de rază ID), tangentele vor tăia pe (Δ) în B și C, fiind astfel perfect determinate toate cele 3 vîrfuri ale triunghiului ABC.

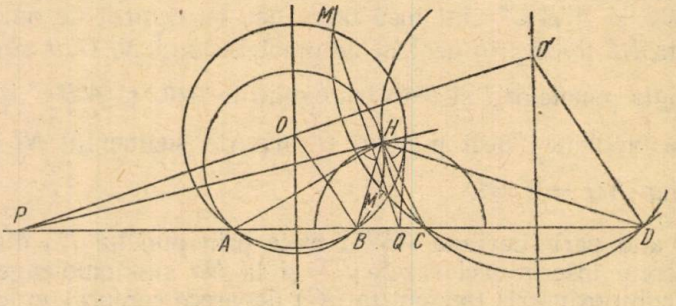
Problema 4998

Pe o dreaptă (Δ) sînt situate două segmente $AB=a$ și $CD=b$, care nu au puncte comune. Se duc arcele de cerc (Γ) și (Γ') capabile de același unghi, α, construite, pe segmentele AB și CD, de aceeași parte a dreptei (Δ).

Să se construiască arcele de cerc (Γ) și (Γ') în cazul cînd ele sînt tangente exterioare.

Gh. D. Simionescu

Soluția autorului. Fie O, O' centrele a două cercuri care trec respectiv prin A, B și prin C, D, astfel ca segmentele AB, CD, să fie văzute sub unghiuri egale. Rezultă că triunghiul OAB asemenea cu $O'CD$. Linia OO' prelungită taie dreapta (Δ) în P astfel că avem $\frac{PA}{PC} = \frac{OA}{O'C} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} =$ = const., deci P este fix.



Problema se reduce la determinarea dreptei POO'. Ducem două cercuri prin A,B și prin C,D astfel ca $\sphericalangle AOB = \sphericalangle CO'D$ și ele să fie secante în M și M' și fie Q punctul în care MM' taie pe (Δ). Avem $QM.QM' = QA.QB = QC.QD$.

Pentru ca cercurile să fie tangente în H trebuie să avem $QH^2 = QA \cdot QB'$ (Q este fix), deci QH este lungimea tangentei din Q la oricare din cercurile (Γ) sau (Γ'), această lungime fiind constantă. Se scrie cercul cu centrul în Q și raza QH, apoi se duce din P tangenta la acest cerc de aceiași parte cu Γ și Γ' față de (Δ) și fie R punctul de contact. Cercurile sînt ABR și CDR, iar O și O' sînt intersecțiile dreptei PR cu mediatoarele segmentelor AB și CD.

Problema 4999

Să se arate că:

$$S = k! + \frac{k!\,k}{1!} + \frac{(k+1)!\,k}{2!} + \ldots + \frac{(p-1)!\,k}{(p-k)!} = \frac{p!}{(p-k)!}$$

unde p și k sînt două numere naturale, astfel încît $p > k$.

Soluție. — Se mai poate scrie:

$$S = k!\left(1 + \frac{k}{1!} + \frac{(k+1)\,k}{2!} + \ldots + \frac{(p-1)\ldots(k+1)\,k}{(p-k)!}\right)$$

sau:

$$S = k!\,(1 + C_k^1 + C_{k+1}^2 + \ldots + C_{p-1}^{p-k}) = k!\,C_p^{p-k}$$

dar

$$C_p^{p-k} = \frac{p!}{(p-k)!\,k!}$$

deci

$$S = \frac{p!}{(p-k)!\,k!} \cdot k! = \frac{p!}{(p-k)!}.$$

PROBLEMA 828 (M.F.L.)

Să se rezolve ecuația

$$\log_2 [\log_3 (\log_9 x)] = 2 \log_4 \frac{1}{\log_9 (\log_3 x)}.$$

* * *

Soluția dată de elevul *Zsidó György, școala* medie nr. 5 „Unirea" din Brașov.

Deoarece $\log_2 N = 2 \log_4 N$, ecuația dată se scrie

$$2 \log_4 [\log_3 (\log_9 x)] = 2 \log_4 \frac{1}{\log_9 (\log_3 x)},$$

de unde

$$\log_3 (\log_9 x) = \frac{1}{\log_9 (\log_3 x)}.$$

La fel, deoarece $\log_9 M = \frac{1}{2} \log_3 M$, ecuația precedentă este echivalentă cu ecuația $\log_3 \frac{\log_3 x}{2} = \frac{1}{\frac{\log_3 (\log_3 x)}{2}}$

de unde

$$\log_3 (\log_3 x) - \log_3 2 = \frac{2}{\log_3 (\log_3 x)}$$

sau

$$[\log_3 (\log_3 x)]^2 - \log_3 2 \log_3 (\log_3 x) - 2 = 0.$$

Folosind substituția $\log_3 (\log_3 x) = y$, ajungem la următoarea ecuație de gradul al doilea:

$$y^2 - (\log_3 2)\ y - 2 = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații sînt

$$y_{1,2} = \frac{\log_3 2 + A}{2}, \text{ unde } A = \sqrt{(\log_3 2)^2 + 8}.$$

Folosind relația $y = \log_3 (\log_3 x)$, obținem pentru x

$$x_1 = 3^{3^{y_1}},$$

Se poate constata că pentru x_2 ecuația dată nu are sens, deci x_2 nu este o soluție a ecuației date.

PROBLEMA 829 (M.F.L.).

Punctele A și A' sînt extremitățile axei mari a unei elipse. Tangența variabilă la această elipsă taie tangențele la elipsă în punctele A și A' în punctele T și T'. Să se arate că:

$$AT \cdot A'T' = \text{constant}$$

$$\sphericalangle TF'T' = 90°,$$

unde cu F' am notat unul dintre focarele elipsei.

* * *

Soluția dată de elevul *Zsigmond Gyula*, școala medie din Cristur. Ecuația elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuațiile tangentelor la elipsă în punctele A și A' sînt: $x = a$ și $x = -a$. Ecuația tangentei variabile la elipsă este

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Pentru a găsi coordonatele punctelor T și T', să rezolvăm sistemul format din ecuația (1) și din $x = a$ și sistemul format din ecuația (1) și din $x = -a$. Coordonatele punctelor de intersecție sînt:

$$T\left(a, \frac{b^2(a - x_0)}{a\,y_0}\right) \text{ și } T'\left(-a, \frac{b^2(a + x_0)}{a\,y_0}\right)$$

(1) $$AT \cdot AT' = \frac{b^2(a - z_0)}{a\,y_0} \cdot \frac{b^2(a + x_0)}{a\,y_0} = \frac{b^2(a^2 b^2 - b^2 x^2)}{a^2 y_0^2}.$$

Deoarece punctul $(x_0\ y_0)$ să găsește pe elipsă, avem

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

sau

$$a^2 y_0^2 = a^2 b^2 - b^2 x_0^2,$$

deci

$$AT \cdot AT' = b^2 = \text{constant}.$$

2) $\sphericalangle TFT' = 90°$ atunci și numai atunci cînd

$$m_{FT} \cdot m_{FT'} = -1.$$

Avem

$$m_{FT} = \frac{b^2(a - x_0)}{a\,y_0(a - c)},\quad m_{FT'} = -\frac{b^2(a + x_0)}{a\,y_0(a - c)}$$

deci

$$m_{FT} \cdot m_{FT'} = -\frac{b^4(a^2 - x_0^2)}{a^2 y_0^2 (a^2 - c^2)} = -\frac{b^2(a^2 - x_0^2)}{a^2 y_0^2} = -1$$

ceea ce înseamnă că $\sphericalangle TFT' = 90°$.

PROBLEMA 830 (M.F.L.).

Notînd cu N numărul unui an oarecare de după 1750, să se arate că următoarea limită este egală cu numărul zilelor din anul N; deci, calculînd limita putem decide dacă anul N este sau nu este un an bisect:

$$\lim_{n \to \infty} \left[365 + \left(\cos^2 \frac{N\pi}{4}\right)^n - \left(\cos^2 \frac{N\pi}{100}\right)^n + \left(\cos^2 \frac{N\pi}{400}\right)^n\right].$$

* * *

Soluție dată de elevul *Zsidó László*, școala medie nr. 5 „Unirea" din Brașov.

Pe baza convenției, anul N este un an bisect, cînd numărul N nu se termină cu două zerouri și se divide prin 4 sau în cazul cînd se termină cu două zerouri, nnumărul obținut prin neglijarea celor două zerouri se divide prin 4.

Să calculăm limita dacă N nu este un an bisect. Avem două cazuri:

1. Numărul N nu se termină cu două zerouri și nu se divide prin 4. În acest caz $\cos^2 \frac{N\pi}{4} < 1$, $\cos^2 \frac{N\pi}{100} < 1$, $\cos^2 \frac{N\pi}{400} < 1$, deci $\lim_{n\to\infty} \left(\cos^2 \frac{N\pi}{4}\right)^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \left(\cos^2 \frac{N\pi}{100}\right)^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \left(\cos^2 \frac{N\pi}{400}\right) = 0$ și astfel expresie dată are limită 365.

2. Numărul N se termină cu două zerouri, deci $N = 100\ N'$, dar N', nu se divide prin 4. În acest caz avem $\cos^2 \frac{N\pi}{4} = 1$, $\cos^2 \frac{N\pi}{100} = 1$ și $\cos^2 \frac{N\pi}{400} < 1$, deci limita este egală cu $365 + 1 - 1 = 365$.

Dacă anul N este un an bisect, la fel avem două cazuri:

1. N nu se termină cu două zerouri și se divide prin 4. În acest caz $\cos^2 \frac{N\pi}{4} = 1$, $\cos^2 \frac{N\pi}{100} < 1$, $\cos^2 \frac{N\pi}{400} < 1$, deci limita este egală cu $365 + 1 = 366$.

2. N se termină cu două zerouri și numărul format neglijînd cele două zerouri se divide prin 4, deci $N = 400\ N'$. În acest caz, $\cos^2 \frac{N\pi}{4} = 1$.

$$\cos^2 \frac{N\pi}{100} = -1,\ \cos^2 \frac{N\pi}{400} = 1$$ și limita este 366.

PROBLEME PROPUSE *)

5541. Cîți litri de acetilenă se consumă sub presiunea de 1 atmosferă la o sudură cu flacără oxiacetilenică dintr-un tub de 50 litri supus la presiunea de 120 atmosfere, dacă după terminarea sudurii presiunea în tub scade la 60 atmosfere.

Sabin Vîlceanu, student București

5542. Să se afle extremele funcției

$$f(x) = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x.$$

N. Bebea, profesor Pucioasa

---

* VIII (5558, 5559, 5560, 5562, 5563); IX (5541, 5544, 5551, 5552, 5553, 5564); X (5543, 5545, 5548, 5549, 5554, 5555); XI (5542, 5546, 5547, 5550, 5556, 5557, 5561).

5543. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin a \cdot \operatorname{tg}^2 a}{\sin(b-a)\sin(c-a)} + \frac{\sin b \operatorname{tg}^2 b}{\sin(c-b)\sin(a-b)} + \frac{\sin c \operatorname{tg}^2 c}{\sin(a-c)\sin(b-c)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}$$

* * *

5544. Densitatea unui gaz în condiții normale de presiune și temperatură ($p_0 = 1$ atm, $t_0 = 0°C$) este ρ_0.

Cu cît trebuie mărită presiunea exercitată asupra acestui gaz, astfel ca la temperatura $t°C$, densitatea să rămînă constantă?

Aplicație: $\rho_0 = 0{,}000089$ g/cm^3; $t = 127°C$.

Drugă M. Gh., absolvent Breaza

5545. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei:

$$E = x^{1000} + \frac{1}{x^{1000}}$$

Știind că x satisface condiția $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Generalizare.

Ionel Atanasiu, prof. Focșani

5546. Dacă două conice au axele paralele (sau perpendiculare) atunci ele se taie în patru puncte conciclice.

La parabolă centrul acestui cerc este al patrulea vîrf al unui paralelogram avînd 2 vîrfuri opuse în cele două focare și al treilea în punctul de intersecție al directoarelor.

Viorel Raicu, student București

5547. Fie tetraedru $ABCD$. În unghiurile diedre de muchii AB, BC, CD, DA consideră cîte două plane izogonale oarecare, respectiv P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}; P_{31}, P_{32}; P_{41}, P_{42} și dreptele de intersecție $(D_1) \equiv (P_{12}, P_{21})$; $(D_2) \equiv (P_{21}, P_{31})$; $(D_3) \equiv (P_{32}, P_{41})$; $(D_4) \equiv (P_{42}, P_{11})$. Planele determinate de perechile de drepte BD, (D_1); BD, (D_3); CA, (D_2); CA, (D_4) taie respectiv pe AC în K și K' și pe BD în L și L'. Planul paralel cu AB ce trece prin K' și L' taie pe BC și DA respectiv în M și N. Să se arate că punctele K, L, M, N sînt coplanare.

Tudor Zamfirescu, student București

5548 a) Folosind funcțiile trigonometrice să se arate că dacă avem relația $\cos 2a \cos 2b \cos 2c = 1$, atunci există și relația $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}^2 c$, iar dacă avem $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}^2 c$, atunci poate oare există și relația $\cos 2a \cos 2b \cos 2c = 1$, sau această ultimă relație nu depinde de precedenta? Caz particular cînd $\operatorname{tg}^2 a$, $\operatorname{tg}^2 b$ sau $\operatorname{tg}^2 c = 1$

c) să se arate că dacă $\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}^2 c = 1$, atunci $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2a \cos 2b \cos 2c = 0$.

Se exclud cazurile cînd $\cos 2a$, $\cos 2b$ sau $\cos 2c$ sînt nule.

C. Ionescu-Țiu

5549. Se dă un poliedru convex astfel că din fiecare vîrf al său pleacă trei muchii şi că fiecare din feţe este un pentagon. Să se arate că acest poliedru are 12 feţe.

* * *

5550. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+a\sin\frac{x}{n}\right)^n$

N. Bebea, profesor Pucioasa

5551. Motocicleta E.S. 250-1 fabricată de firma *M.Z.* din *R.D.G.* atinge o viteză de 115 km/h. Ştiind că, pe 100 km consumul de benzină este 3,13 kg, iar benzina are puterea calorifică de 11 000 kcal/kg, să se calculeze puterea teoretică a motorului.

Gh. I. Căpitan, profesor Anina

5552. Să se simplifice expresia

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m^2}\right)$$

(Olimpiada, Varşovia, 1961)

5553. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$(x^2+11)\sqrt{y^2+21}=180,$$
$$(y^2+21)\sqrt{z^2+33}=100$$
$$(z^2-33)\sqrt{x^2+11}=96$$

* * *

5554. Să se construiască un patrulater cunoscînd lungimile celor două diagonale, lungimile a două laturi opuse şi distanţa dintre mijloacele celorlalte două laturi.

(Matematikai Lapok, Budapesta 1962)

5555. La un tetraedru dat *ABCD*, se consideră sferele care au ca diametre muchiile *AD*, *BD*, *CD*. Fiecare din aceste sfere taie planul feţei *ABC* după cîte un cerc. Să se arate că aceste trei cercuri au un punct comun.

* * *

5556. Să se găsească domeniul de existenţă al lui a, pentru care a, a^2, a^3 exprimă laturile unui triunghi.

* * *

5557. a) Se dă şirul cu termen general A_n, unde

$$A_1=\sqrt{1+\sin x},\ A_2^2=1+A_1;\ A_3^2=1+A_2;\ \ldots A_n^2=1+A_{n-1}.$$

Să se afle natura şirului.

b) Idem pentru șirul cu termen general B_n, unde

$$B_1=\sqrt{1+\cos x};\ B_2^2=1-B_1;\ B_3^2=1+B_2;\ \ldots;\ B_n^2=1+(-1)^{n-1}B_{n-1}.$$

c) Idem pentru șirul cu termen general C_n, unde

$$C_1=\sqrt{\sin^2 x};\ C_2^2=\sin^2 x+C_1;\ C_3^2=\sin^2 x+C_2;\ \ldots;\ C_n=\sin^2 x+C_{n-1}.$$

d) Idem pentru șirul cu $D_n=\sqrt{|1+(-1)^{n-1}D_{n-1}|}$, unde

$$D_1=\operatorname{tg} x,\ D_2=\sqrt{1+\operatorname{tg} x},\ D_3=\sqrt{|1-D_2|}.$$

C. Ionescu-Țiu

5558. Un camion merge la o curbă cu o viteză de 30 km/h. Raza de curbură este $R = 50$ m. La un moment dat camionul este frînat cu o accelerație $a = -0{,}2$ m/s^2. Care este supraînălțarea curbei pentru ca mașina să nu deraieze? Care este accelerația totală în momentul cînd începe frînarea? După cît timp se oprește camionul?

* * *

5559. După două minute de la pornire o motocicletă atinge viteza de 43,2 km/h, apoi oprește frînînd prin micșorarea vitezei cu 1,2 m/s. Ce distanță a parcurs motocicleta pînă la oprire și în cît timp?

* * *

5560. Să se arate că:

$$\frac{2}{\left(1+\sqrt{1\pm\sqrt{1+\sqrt{1+a}}}\right)^3}+\frac{2}{\left(1-\sqrt{1\pm\sqrt{1+\sqrt{1+a}}}\right)^3}+$$

$$+\frac{1}{\left(1+\sqrt{1\pm\sqrt{1+\sqrt{1+a}}}\right)^4}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{1\pm\sqrt{1+\sqrt{1+a}}}\right)^4}=\frac{6-10\sqrt{1+a}}{(1+\sqrt{1+a})^2}$$

C. Ionescu-Țiu

5561. Se dau cercurile

$$(C_1)\ x^2+y^2-2\lambda x=0$$

$$(C_2)\ 2(x^2+y^2)-2(1+2\lambda)x+(1-2\lambda)y+4\lambda=0,$$

λ fiind un parametru.

a. Să se arate că axa lor radicală trece printr-un punct fix.

b. Să se determine λ astfel încît ele să fie ortogonale.

c. Să se afle locul geometric al punctelor lor de intersecție cînd λ variază.

V. Băghină, profesor Breaza

5562. Să se demonstreze că expresia:

$$E=7\cdot 2^{6n+3}-57\cdot 2^{4n}+1$$

se divide prin 3^3.

I. Candrea, profesor Sibiu

5563. Să se determine toate numerele de trei cifre distincte știind că atît ele cît și răsturnatele lor sînt divizibile cu 7.

Masgras V., student București

5564. În interiorul unui cerc de rază R se ia un punct A fix la distanța de centru $OA = a$. Să se afle poziția unui punct M de pe cerc astfel că unghiul AMO să fie maxim.

Adrian Chisăliță, student Cluj

CHESTIUNI DE EXAMEN

5565. Se dă ecuația: $x^2 - (a-1)x - 3(a+2) = 0$ în care necunoscuta este x. Se cere: a) să se rezolve ecuația: b) să se determine valorile lui a pentru care există următoarea relație: $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 18$; c) să se verifice identitatea $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{cotg} x) = 2(1 + \operatorname{cosec} 2x)$; d) Să se reprezinte grafic funcția $y = \dfrac{x^3}{2x^2 - x - 1}$

(La Institutul Politehnic Iași, 1962)

5566.) Baza mare a unui trapez este egală cu de patru ori baza mică. Știind că baza mică este de 2 cm., iar înălțimea trapezului e medie proporțională între cele 2 baze, se cere să se afle aria trapezului.

b) Un con circular drept are diametrul bazei de 12 cm și generatoarea de 10 cm. Se consideră un cilindru drept înscris în con care are ca bază secțiunea paralelă cu baza conului, făcută în con la distanța de 6 cm de baza conului. Să se afle volumul corpului cuprins între con și cilindru.

(La Institutul Politehnic Iași, 1962)

5567. a) Pentru pregătirea unei băi se amestecă apă caldă de 66°C cu cea rece la 11°C. Ce cantitate de apă de un fel și de altul este necesară spre a obține 550 l apă la 36°C ?

b) O minge este ținută sub apă la adîncimea de 50 cm și la un moment dat este lăsată liberă. În ipoteza că nu ar exista frecare între minge și apă, minge și aer, să se calculeze: accelerația mingii în timpul mișcării sub apă; viteza mingii cînd iese din apă; înălțimea pînă la care se ridică mingea deasupra apei. Se dă densitatea apei $\varrho_a = 1$ g/cm^3, densitatea medie a mingii $\varrho_m = 0{,}1$ g/cm^3 și accelerația în căderea liberă $g = 9{,}81$ m/sec^2.

(La Inst. Politehnic Iași, 1962)

5568. Se dau două puncte situate pe axa absciselor și anume A de coordonate $(-1,0)$ și B de coordonate $(5,0)$.

a) Să se scrie coordonatele vîrfului C al triunghiului isoscel ABC știind că înălțimea corespunzătoare acestui vîrf este egală cu 3; b) Să se scrie ecuația medianei corespunzătoare vîrfului A; c) Să se scrie ecuația înălțimii corespunzătoare vîrfului B; d) Să se calculeze perimetrul triunghiului ACM în care M este punctul de intersecție dintre mediana corespunzătoare vîrfului A și înălțimea corespunzătoare vîrfului C; e) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului ABC.

(La Inst. Politehnic Iași, 1962)

5569. Se consideră un triunghi ABC. Pe latura BC se consideră un punct D și se notează cu O și O' respectiv, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD.

a) Să se arate că raportul razelor cercurilor O și O' este constant cînd triunghiul ABC rămîne același, iar D variază pe BC; b) Se cere poziția punctului D, astfel încît razele cercurilor corespunzătoare O și O' să fie minime; c) Să se demonstreze că triunghiurile AOO' și ABC sînt asemenea.

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5570. Se consideră un sistem de axe Oxy în plan și două cercuri C_1 și C_2 cu centrul în originea axelor O, de raze $R_1 = 2$ și $R_2 = 3$. O semidreaptă cu originea în O întîlnește cercul C_1 în P_1 și cercul C_2 în P_2. Se consideră perpendiculara din P_2 pe Ox și simetricul M al punctului P_1 față de această perpendiculară.

a) Să se scrie ecuația locului (L) descris de punctul M cînd semidreapta se rotește în jurul lui O; b) Fie S un punct al locului (L) și T un punct care împarte segmentul OS într-un raport dat K; să se arate care este locul geometric descris de T cînd S descrie locul (L); c) Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba (L) în punctele sale de intersecție cu cercurile C_1 și C_2; d) Fie A și B două puncte de pe curba (L) astfel încît OA și OB să fie perpendiculare; fie u unghiul pe care-l face OA cu Ox. Să se calculeze valoarea expresiei: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ (se va vedea că nu depinde de u).

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5571. a) Să se determine α, așa ca între rădăcinile ecuației $\alpha x^2 - x + \beta = (x^2 - 3x + a)^2$ să existe relația $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

b) Cu această valoare a lui α, să se determine β, astfel ca funcția

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha x^2 x + \beta}}{x - 1}$$

să aibă punctul de abscisă -1, un punct de extrem.

c) Cu α și β mai sus determinate, să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{\sqrt{\alpha x^2 - x + 2\beta}}{x - 1}$$

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5572. a) Să se rezolve ecuația $9(x^2 + 1) = 25(x^2 - 1)^2$.

b) Să se deriveze funcțiile:

$$\arccos \frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{x}\right); \quad \arcsin \frac{\sqrt{-4x^2 + 17x - 4}}{5x}$$

c) Presupunem că laturile a, b, c ale unui triunghi ABC satisfac relației $b^2 + c^2 = 5a^2$ și notăm cu α unghiul laturii BC cu mediana corespunzătoare. Să se calculeze $\cos A$ și $\cos \alpha$.

d) Să se determine valorile maxime și minime ale unghiurilor A, α cînd laturile triunghiului variază.

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5573. Un ceasornic cu pendul metalic la temperatura de 0°C înaintează cu 7 secunde în 24 de ore, iar la temperatura de 20°C rămîne în urmă cu 9 secunde în 24 de ore. Să se afle coeficientul de dilatație a metalului.

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5574. În fața unei oglinzi concave se găsește un obiect a cărui imagine este de două ori mai mare decît obiectul. Față de această imagine la distanța de 15 cm se găsește o lentilă convergentă cu distanța focală de 8,5 cm și care are drept obiect imaginea formată în oglindă. Lentila și oglinda au axele optice principale în prelungire. Cunoscîndu-se mărimea obiectului egală cu 3 cm și distanța dintre obiect și imagina sa în oglindă egală cu 20 cm, să se calculeze: a) distanța focală a oglinzii concave; b) distanța față de lentilă la care s-a format imaginea în lentilă; c) mărimea imaginii dată de lentilă.

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5575. Se consideră un sistem de coordonate în plan și un paralelogram variabil ale cărui laturi trec respectiv prin cîte un punct fix: una prin punctul $A(-2,0)$; a doua prin punctul $B(O,O)$, a treia prin punctul $C(1,0)$, iar a patra prin $D(4,0)$, astfel încît A și C să fie situate pe laturi opuse ale paralelogramului.

a) Să se arate că fiecare diagonală a acestui paralelogram trece printr-un punct fix: una printr-un punct fix M, iar cealaltă printr-un punct fix N. b) Să se arate că M și N sînt situate pe dreapta $ABCD$ (axa Ox). c) Se consideră cercurile care trec prin punctele fixe B și C și tangentele din M și N la aceste cercuri. Care este locul punctelor de contact al acestor cercuri și tangente?

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5576. Considerăm triunghiul ABC. Prin vîrful B ducem exterior o dreaptă care face 60° cu latura AB, pînă taie mediatoarea laturii AB în C_1. Prin vîrful C ducem exterior o dreaptă care face 30° cu latura AC, pînă taie mediatoarea laturii AC în B_1. Fie β și γ cercurile de centru B_1, respectiv C_1, care trec prin vîrful A.

a) O dreaptă arbitrară dusă prin vîrful A taie cercurile β, γ în B' și C'. Să se arate că dreptele CB', BC' sînt perpendiculare.

b) Cercurile β, γ se retaie în punctul M. Să se arate că unghiul BMC este drept.

c) Dacă A_1 este mijlocul laturii BC să se arate că triunghiul $A_1B_1C_1$ este dreptunghic cu un unghi de 30° și altul de 60°.

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5577. a) Să se arate că într-un tetraedru regulat două muchii opuse sînt perpendiculare.

b) dacă m este bimediana unui tetraedru regulat de muchie a volumul tetraedrului este $V = \frac{a^2 m}{6}$ (se numește bimediană dreapta care unește mijloacele a două muchii opuse).

c) Dacă într-un tetraedru $ABCD$ muchiile AD și BC sînt perpendiculare atunci bimedianele care corespund perechilor de muchii AB și DC respectiv AC și BD sînt egale și reciproc, dacă muchiile AD și BC sînt egale, bimedianele considerate sînt perpendiculare.

(Facultatea de fizică, București, 1962)

5578. Fie A și B două puncte situate pe o parabolă de vîrf O; proiectăm punctele A, B în A', B' pe tangenta în vîrf la parabolă.

a) Fie I simetricul vîrfului O față de focarul F și C' mijlocul segmentului $A'B'$. Să se arate că dreptele AB, C'I sînt perpendiculare. b) Dacă punctele A și B sînt mobile pe parabolă, iar intersecția dreptei AB cu tangenta la vîrf este un punct fix, să se arate că intersecția dreptelor AB', $A'B$ descrie o dreaptă care trece prin vîrful O.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5579. Se consideră un triunghi isoscel OAB ($OB = OA$) și în planul triunghiului un cerc cu centrul în O. Fie P punctul de intersecție al unei tangente din A la cercul O cu o tangentă din B la același cerc.

a) Care este locul geometric (L) al punctului P cînd raza cercului O variază?

b) Fie P un punct al locului (L) nesituat pe axa de simetrie a triunghiului OAB, iar R punctul de contact al tangentei AP cu cercul respectiv; să se arate că $PA \times PB = OA^2 - OP^2$.

c) P fiind un punct al locului (L) pe dreapta PB se consideră punctul T astfel încît să avem $PT = PA$; care este locul descris de punctul T cînd P descrie loocul (L)?

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5580. Considerăm un cerc, un punct A pe cerc, tangenta în A și o dreaptă perpendiculară pe tangentă care taie cercul în punctele B și C și tangenta în T. Fie M mijlocul coardei BC. Să se arate că:

a) $4TM^2 = AB^2 + AC^2$; b) diferența unghiurilor ABC și ACB este un unghi drept, bisectoarele unghiului BAC sînt egal înclinate pe tangenta AT; c) Fie E intersecția lui AB cu diametrul OM și F intersecția lui AC cu același diametru; să se arate că mijlocul segmentului EF coincide cu punctul de intersecție al tangentelor în B și C la cerc. În punctul A ridicăm o perpendiculară AU pe planul ABC.

d) Să se arate că dreapta UT este perpendiculară pe BC; c) Cum trebuie luat punctul U astfel ca unghiul BUC să fie drept?

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5581. Într-o elipsă ducem o coardă BC paralelă cu axa mare AA'. Fie T proiecția vîrfului A pe dreapta BC. a) Să se arate că $b^2\, TB \cdot TC = a^2\, TA^2$, a și b fiind semiaxele elipsei; b) Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor $A'B$, AM, unde M este mijlocul coardei BC.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5582. Se consideră ecuația $tg^2 \alpha - a\ tg \alpha + 1 = 0$.

a) Pentru ce valori ale lui a ecuația admite soluții? b) pentru valorile lui a pentru care ecuația admite soluții situate în primul cadran se consideră aceste soluții α_1 și α_2; $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Să se calculeze $\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2$; c) notăm $2\alpha_1 = f(a)$. Să se studieze variația funcției $f(a)$ și să se reprezinte grafic.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5583. Să se determine patrulaterul de arie maximă înscris în cercul de rază R, știind că două laturi opuse sînt de lungimi constante $2a$, respectiv $2b$.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5584. Două pendule oscilează în același timp și în același loc: primul face 10 oscilații în timp ce al doilea face numai 6 oscilații. Să se calculeze lungimile celor două pendule, știind că unul este mai lung decît celălalt cu 20 cm.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1962)

5585. — Într-un sistem de axe ortogonale $x'Ox$ și $y'Oy$ se dă curba (Γ) de ecuație

$$x(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

a) Să se exprime y în funcție de x și să se determine intervalul în care trebuie să varieze x pentru ca y să fie definit. De aici să se deducă că curba (Γ) este în întregime conținută într-un anumit interval.

b) Să se studieze variația lui y în intervalul de definiție și să se construiască curba (Γ). Se va determina în particular, axa sau axele de simetrie ale curbei (Γ), punctele în care curba taie axele ortogonale, tangentele în aceste puncte, asimptota sau asimptotele, punctele în care se duc tangentele paralele la $x'Ox$.

(Bacalaureat Guineea, 1962)

5586. — a) În același sistem de axe să se scrie ecuația generală notată (2) a dreptelor (D_t) trecînd prin punctul $S(-1;0)$ și avînd ca pantă pe t; b) Dreptele (D_t) întîlnesc (Γ) într-un punct fix și în două puncte M_1 și M_2 depinzînd de t. Să se scrie ecuația (3) a absciselor punctelor M_1 și M_2 și să se determine coordonatele acestor puncte în funcție de t. Să se găsească locul geometric al punctului P reprezentînd mijlocul segmentului M_1M_2 cînd t variază.

(Bacalaureat Guineea, 1962)

5587. — Se consideră totdeauna în același sistem de axe ortogonale, fascicolul liniar de cercuri (C_m) de ecuație

$$(1 + m)(x^2 + y^2) + 2x + 2my = 0 \tag{4}$$

m fiind un parametru.

a) Să se determine prin coordonatele lor, punctele fixe ale acestui fascicol.

b) Să se arate că orice cerc (C_m) taie curba (Γ) într-un punct independent de m și în două puncte dependente de m; să se scrie ecuația (5) a absciselor ultimelor două puncte.

(N. B. — Această ecuație va fi dată sub formă întreagă, adică sub forma unui polinom întreg în x egal cu zero).

Să se exprime ordonata y a unui punct de intersecție a curbei (Γ) și a cercului (C_m) în funcție rațională de x și m. Fie (6) această ecuație. (N. B. — Se va putea folosi direct ecuațiile (1) și (4)).

c) Să se găsească valorile lui m pentru care cercurile (C_m) sînt tangente la (Γ). Să se găsească, folosind ecuațiile (5) și (6), coordonatele punctelor de contact și să se scrie în fiecare caz, ecuația cercului tangent.

(*Bacalaureat Guineea*, 1962)

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE *) PENTRU CLASELE V—VIII

E : **1915.** Ca rezultat al întrecerii socialiste, o fabrică a depășit planul anual, dînd mărfuri peste plan în valoare de un milion de lei, producția realizată fiind cu 15% mai mare decît cea din anul trecut. Pe anul în curs s-a planificat ca producția să fie cu 5% mai mare decît cea de anul trecut. Să se calculeze valoarea producției pe anul în curs.

Vodă Viorel, student București

E : **1916.** Să se demonstreze că orice triunghi cu toate unghiurile ascuțite are două unghiuri a căror diferență este mai mică decît 30°.

* * *

E : **1917.** Să se arate că suma patratelor a cinci numere întregi consecutive oarecare se divide prin 5 și nu se divide prin 25.

* * *

E : **1918.** Să se arate că E = a, unde :

$$E=\frac{1-\dfrac{1-A}{1+A}}{1+\dfrac{1-A}{1+A}},\quad A=\frac{1-\dfrac{1+B}{1-B}}{1+\dfrac{1+B}{1-B}}\ \text{și}\ B=\frac{1-\dfrac{1+a}{1-a}}{1+\dfrac{1+a}{1-a}}$$

C. Ionescu-Țiu

E : **1919.** În mijlocul unei grădini patrate se află un bazin cu gura patrată. Depărtarea de la fiecare colț al gurii bazinului la colțul respectiv al grădinii este de $6\sqrt{2}$ m, diagonala gurii bazinului este de $\sqrt{2}$ m, iar în jurul bazinului se află o alee lată de 1 m. Să se calculeze aria terenului din jurul bazinului.

Florea I. Dumitrescu, Craiova

---

* V (1920, 1921, 1925); VI (1915, 1916, 1919, 1922); VII (1917, 1918, 1923, 1924).

E : 1920. Să se însumeze toate numerele întregi de la 1 la 1 000, care au cifra 2 de două ori.

Corneliu Georgescu, Craiova

E : 1921. O G.A.C. a însămînțat cu grîu 4/5 și încă 52 ha din suprafața de teren ce avea, apoi a însămînțat cu porumb 1/7 fără 16 ha din aceeași suprafață. Știind că a obținut 2 800 kg grîu la ha și 3 200 kg porumb boabe la ha să se afle suprafața ocupată de fiecare cultură și producția totală de grîu și porumb.

D. Mîrzan, profesor R.-Vîlcea

E : 1922. Să se arate că :

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{200}=\sqrt{722}$$

$$\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{50}-\sqrt{32}=\sqrt{200}-\sqrt{162}=\sqrt{2}.$$

C. I.-T.

E : 1923. Dacă $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+c}=0$, atunci

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{3}{a+b+c}.$$

* * *

E : 1924. Se dă un triunghi ABC. Pe latura AB se alege punctul M astfel încît $AB = 4AM$, iar pe latura BC se alege punctul N astfel încît $BC = 3NC$. Să se arate că dreapta MC trece prin mijlocul dreptei AN.

V. Băghină, profesor Breaza

E : 1925. Să se demonstreze că nu există numere de trei cifre din care scăzînd răsturnatele lor să se obțină patrate perfecte.

C. N. Tudor, student București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare)

(Soluții bune primite pînă la 15.X.1962)

NĂSĂUD. **Ș.m. 1. Cl. X. Pleș Gheorghe** (7296, 98, 305, 11, 13, 14, 40, 43, 45, 46, 55, 84). **Cl. XI. Acu Dumitru** (5249—51, 65, 68, 69, 82, 92, 94, 96, 301, 02, 06—15, 17—19, 21, 32, 35—37, 45, 49, 52, 55, 65, 72, 92, 94).

NOVACI. **Ș.m. 1. Cl. IX. Anghel Petre** (5296—98, 305, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 27, 32, 40, 43, 45—47, 49—51, 55, 59, 92, 407, 23, 24, 28).

OLĂNEȘTI-ȘAT (Argeș). **Șc. elem. de 8 ani. Cl. VI. Constantinescu Georgeta** (E: 1871—74, 76, 77), **Hodorogea Gheorghe** (E: 1871—73, 75—77), **Mureanu Georgeta** (E: 1871—75, 77), **Pîrvulescu Victoria** (E: 1871—76).

ORADEA. **Ș.m. 1. Cl. XI. Stăneulescu Carmen** (5326, 33, 54, 56, 57, 63, 68, 72, 83, 98, 400, 02, 03, 06—12, 17—20, 22, 24, 28, 30, 32, 38, 39, 41, 46, 54—57, 61, 63), **Toma Dragomir** (5326, 31, 33, 46, 54, 56, 60, 63, 68, 72, 98, 400, 02—04, 06—12, 17—20, 22—24, 27—32, 38—41, 46, 52, 54—57, 61, 63).

Ș.m. 2. Cl. XI. Vertes Petru (5339—41, 43—48, 82, 83).

Școala medie nr. 4. Cl. VIII. Bálint József (E: 806, 07, 10, 12, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24); **Kiss Lajos Cl. XI.** (E: 853, 57, 60, 63, 780, 869, 71, 73, 76, 77).

OȚELUL ROȘU. Ș.m. 1. Cl. VIII. Biriș Laurențiu (E: 1845—47, 50, 58, 59, 63, 64, 66, 73, 77), Luca Mihai Dorin (E: 1857—59, 62—64, 70—74, 76), Săbău Livia (E: 1857—59, 63, 64, 66, 67, 70, 71, 73).

PĂUNEȘTI (Bacău). Șc. elementară. Cl. VII. Apreutesei Elena (E: 1855, 57, 60, 62, 63, 71, 73, 74, 76; 5319), Berbece Marioara (E: 1853, 55, 60, 63, 71, 73—76; 5319), Cantiș Gheorghe (E: 1857, 60, 62, 63, 67, 71, 73—76; 5319), Manea Tatiana (E: 1851, 54, 55, 71—77, 79, 80), Nica Costică (E: 1860, 71—74, 76, 77, 79; 5403), Popa Elena (E: 1845, 53, 54, 57, 59, 60, 62—64, 73, 74).

PETROȘANI (Hunedoara). Ș.m. 1. Cl. VIII. Martinovici Mihai (E: 1843, 45—47, 50, 53, 59, 60, 62, 64, 66, 67, 70; 5392). Cl. IX. Lepădatu Ion (5248, 51, 57, 59, 61, 62, 66, 70). Cl. X. Goldstein Beniamin (5296—99, 313, 14, 17, 21, 28, 32, 55, 86), Orlov Zinaida (5296—99, 305, 09, 14, 21, 28, 32, 55, 72, 87, 92, 422). Cl. XI. Hîndorean Viorel (296, 98, 305, 07, 13—15, 41, 43—45, 48, 92, 422), Pantilimon Mihai (5296—302, 05, 07—09, 12, 13, 17, 27, 32, 41, 44, 45, 55, 85, 87, 92, 93, 95).

Student Ilie Emil (5355, 71, 73, 74, 86, 92, 97, 98, 400, 03, 08, 09, 22, 28, 30, 36).

PITEȘTI. Ș.m. 1. Cl. VI. Budan Octav (E: 1830, 31, 60, 63, 71, 72, 75). Cl. X. Dobrescu Dumitru (E: 1846, 47, 80; 5297, 98, 313, 27, 32, 40, 43, 45, 46, 55). Cl. XI. **Ianeu Ion** (5251, 66, 74, 82—84, 90, 97, 309, 17, 18, 21, 29, 39, 41, 47, 55, 65, 66, 86, 87, 92, 93, 95, 96, 400, 01, 02, 07, 09, 12, 14, 17, 22, 27, 28, 30, 32), **Mărgineanu Doru George** (5302, 05, 12, 35, 41, 46, 48, 55, 63, 65, 72, 74, 77, 80, 83, 86, 92, 94—96, 98, 400, 02, 03, 06, 07, 09, 10, 12, 15, 17, 18, 21, 22, 24, 27, 28, 30).

Ș.m. 3. Cl. IX. Ionescu Marcel (5301, 21, 27, 55, 56, 61—63, 72—74, 86, 92, 93, 98, 403, 07, 15, 21, 22, 24, 27, 28).

Absolvent **Zamfir D. Corneliu** (5265, 78, 81, 83, 85, 86, 96, 98—302, 11—13, 15, 24, 27, 32, 34, 37, 39, 41, 44, 45, 49, 55, 80, 84, 92, 94, 96, 98, 400, 03, 10, 17, 22).

PLOIEȘTI. Ș.m. 1. Cl. VI. Brenner Mircea (E: 1843, 45, 60, 63, 64, 71—73, 75), Gafițeanu Carmen (E: 1843, 45, 54, 57, 58, 62—64, 66). Cl. VII. Bretcanu Sabine (E: 1858, 62, 71—76). Cl. VIII. **Aisner Rolanda** (E: 1843—54, 56—64, 66—68, 71, 73—76, 79—81; 5349, 84, 92, 95, 422), Bucșa Viorel (E: 1834, 36, 37, 39, 45, 47, 49; 5343, 45), Dima Ștefan (E: 1858, 63, 64, 66, 90), Elecu Georgeta (E: 1858—60, 63, 64, 66, 67, 69—73, 90), Mihăilescu Cristian (E: 1844, 58, 59, 60, 63, 66, 69—73, 90), Nica Vasile (5296, 98, 99, 313, 14, 17—18, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 39, 50, 74), Petrea Sorin (E: 1757—59, 61, 63, 66—68, 73, 80), Pîrvu Constantin (E: 1858—60, 63, 64, 66, 69—73, 90), Popescu Lidia (E: 1858—60, 62—64, 66, 69—73, 90), Tăbăcaru Mucio (E: 1858—60, 62—64, 66, 69—73, 90), Unvari Adrian (E: 1858—60, 63, 64, 66, 69—73, 90), Voinea Mircea (5310, 13, 17, 19, 28, 32, 95, 50, 51, 97). Cl. IX. Călui Maria (E: 1857—60, 63, 64, 66, 67, 75, 80), Crăiniceanu Gheorghe (E: 1858—60, 63, 64, 66, 67, 75, 80), Circioni Victoria (E: 1857, 58, 60, 63, 64, 66, 71, 73, 75, 80; 5357), Dascăl Hary (E: 1857, 58, 60, 63, 65, 66, 71, 73), Diaconescu Aurelia (E: 1857, 58, 65, 73, 74, 76, 80), Dumitrescu Gabriel (E: 1857—60, 63—67, 71, 73, 75, 77, 80), Enescu Sorin (5296—98, 313, 14, 18, 19, 21, 28, 32, 43, 45, 49, 52), Nicolae Ștefan (E: 1858, 64, 66, 71, 73, 75, 80), Rathbach Jose (E: 1857—60, 63, 66, 67, 71, 73, 80), Silaev Silvia (E: 1857—67, 69, 71—81; 5422), Stoicescu Maria (E: 1857, 58, 60, 63, 65, 66, 73, 74, 76, 80). Cl. XI. Apostolescu Anca (5297, 98, 300, 02, 06, 10, 13, 19, 20, 21, 28—30, 32, 34, 49—51), Apostol Gheorghe (5297, 98, 300, 02, 06, 10, 13, 19—21, 28—30, 32, 34, 49—51), **Aisner Sergiu** (5310, 20, 21, 28—31, 34, 39—41, 49—51, 54, 55, 65, 68, 74, 80, 84, 92—96, 98, 400, 06, 09, 11, 17, 20, 22, 24, 27, 28, 30), Cotoneagă Rodica (5311, 15, 43—45, 55, 92, 402, 20, 21, 30), Ivanciu Constanța (5297, 306, 07, 29, 41, 92, 409, 17, 20, 49), Neacșu Viorel (5297, 300, 06, 07, 09, 29, 41, 49, 92, 409, 17, 20), Weisman Martin (5310, 21—28, 30, 49—55, 65, 68, 80, 84, 92).

Ș.m. 2. Cl. VIII. Ionescu Boeru Liana (E: 1843—47, 50—53, 56, 58, 59, 62—64, 73, 75, 79), Știul Adam (E: 1843—45, 47, 49, 51, 53, 73, 66; 5345).

Ș.m. 3. Cl. VIII. Dîmboianu Marilena (E: 1845, 47, 59, 62—64, 66, 71, 73, 75, 79; 5344), Dumitru Daniela (E: 1843, 45, 47, 58, 60, 63, 64, 66, 67, 71—73), Ivanovici Elena (E: 1843, 45, 58, 60, 63, 64, 66, 67, 71, 73, 75, 79). Cl. X. Florea Rodica (5296, 305, 27, 28, 39, 43, 400, 03, 22—24, 28), Georgescu Cristian (5296—302, 05—15, 17—19, 21, 27—29, 32, 35, 39, 41, 43—45, 49, 51), Lecca Octavian (296—99, 305, 06, 09, 10, 13, 14, 17—19, 21, 27—29, 32, 40, 43, 46, 50), Cl. XI. Stăvaru Cristina (5296, 98, 305, 07, 13, 14, 19, 21,

27, 28, 32, 34, 35, 39, 41, 43, 45, 49, 52, 55).

Ş.m. Rafinăria Teleajen. Cl. X. Bădoiu Traian (5297—99, 301, 02, 06—08, 10—13, 15, 17, 19, 36, 37, 39). Absolvenţi: Gheorghiu Elie (5248, 49, 51, 56—62, 64, 66, 67, 70, 81, 85, 94, 96, 97—300, 02, 03, 05—07, 09, 11—15, 20, 22, 27, 33, 34, 45, 52, 61, 62, 73—76, 86, 92, 97—99), Minculescu Gheorghe (344, 72, 92, 402, 10, 12, 22, 28, 30).

PREDEAL. Ş.m. Cl. X. Cardaş Vladimir (5296, 97, 99, 305, 06, 14, 27, 31, 45, 55, 58).

PUCIOASA. Ş.m. Cl. X. Măciucă Ion (5296—98, 305, 11, 13, 21, 27, 41, 44, 45, 49, 55, 58, 92, 422).

RĂDĂUŢI. Ş.m. 2. Cl. IX. Weinstein Jack (5296, 97, 306, 07, 09, 17, 19, 27, 32, 40, 43—45, 47, 49).

REGHIN. Ş.m. 1. Cl. VIII. Kacso Ferenc (E: 1843, 45, 48, 54; 5344).

REGHIN. Şc.m. Petru Maior. Cl. VIII. Kacsó Ferenc (E: 747, 806, 07, 08, 12).

SF. GHEORGHE. Şc.m. 2. Cl. VI. Szász György (E: 806, 07, 08, 12, 13, 14, 17, 19, 26).

RÎMNICU SĂRAT. Ş.m. 2. Cl. XI. Micu Nicolae (5296—98, 312, 14, 19, 20, 24, 53—58, 65, 66, 68, 80, 88, 89, 409, 30).

RÎMNICU VÎLCEA. Ş.m. 1 „Vasile Roaită". Cl. VIII. Harinov Cornel (E: 1867, 71—80; 5339, 95, 407, 22).

Ş.m. 2. „Nicolae Bălcescu". Cl. XI. Tănase Ilie (5250, 83, 86, 96, 98, 302, 05, 07, 11—15, 18, 19, 26, 37).

Comuna RÎU. Şc. elem. Cl. VII. Pavel Gheorghe (E: 1845, 47, 57, 58, 64, 66, 73; 5443).

ROŞIORII DE VEDE. Ş.m. Cl. XI. Nebunescu Alexandru (5298—302, 05, 07, 08, 12, 13, 17, 19, 27, 28, 37, 39, 44, 45, 47, 49).

RUPEA. Ş.m. Ştefan O. Iosif. Cl. VIII. Diaconescu Nicolae (E: 1834, 38, 40, 51, 55, 56, 67, 69, 71—81; 5112, 13, 26, 54, 55, 80, 91; 5222, 64, 67, 74, 77, 79, 83, 84, 86, 309, 10).

SALONTA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Bînă Ioan (E: 1843—45, 49, 58, 63, 64, 66; 5349). Cl. XI. Borcea Valeria (5296, 97, 315, 32, 44, 45, 93, 400, 09, 12, 30), Guiaş Eugen (5293, 96, 97, 315, 32, 44, 45, 50, 92, 430).

SATU MARE. Şc. de 8 ani nr. 8. Cl. VII. Mitaru Alexandru (E: 1858, 59, 62, 63, 66, 70, 74, 75).

Ş.m. 1 „Mihail Eminescu". Cl. XI. Oşan Adrian (5296, 98, 302, 05, 12—15, 19, 37, 45, 49).

SĂVENI. Ş.m. Cl. X. Onofrei Mihai (5207, 08, 10, 12, 14, 16—18, 24, 31, 36, 38—40, 42, 44—46, 48—51, 56, 57, 59—62, 65—67, 70, 84, 96—98, 302, 11—13, 15, 32, 34, 45). Cl. XI. Mănăluţă Maria (5264, 75, 86, 96, 98, 302, 07, 08, 10, 13, 15, 19, 27, 35—37, 50, 65, 72, 84, 92, 95, 403, 06, 22, 30, 48), Mihalache Vasile (5296—98, 302, 06, 11—13, 15, 43—45).

SIBIU. Şc. elem. nr. 9. Cl. VII. Doboş Iuliana Viorica (E: 1843, 44, 58—60, 62, 66, 73, 74, 76), Nicolae Traian (E: 1843, 45, 58, 61, 63, 64, 66, 73, 74, 76), Stoica Adriana (E: 1848, 49, 58—60, 63, 64, 66, 77), Ţurcanu Laura (E: 1843, 58, 59, 62, 63, 66, 71, 73, 74, 76).

Ş.m. 1. Cl. XI. Ionuşi Constantin (5319, 32, 35, 37, 400, 09, 12, 22, 28, 30.

Ş.m. 2. Cl. XI. Gherban Doru (5296, 97, 300—02, 12—15, 17, 19, 21, 27, 32, 36, 37, 39, 41, 44, 45, 49, 51, 55, 92, 95, 400, 09, 22—24).

Ş.m. 3. Cl. VIII. Albitaru Doina (E: 1843—45, 47, 58—61, 63, 64, 66, 69). Cl. XI. Costescu Mariana (5296, 314, 15, 32, 35, 44, 45, 55, 409, 28, 30).

SINAIA. Ş.m. 1. Cl. VIII. Bacalu Magdalena (E: 1843, 45, 47, 57, 59, 63—65, 67, 69—73), Buligă Emilia (E: 1843, 45, 47, 57, 60, 63, 64, 67, 71, 73, 75), Catană Ilie (E: 1844, 48, 54, 57, 64, 71, 73—76, 78—80; 5305, 09, 11, 95, 401, 22). Neagoe Constantin (E: 1943, 45, 47, 57, 59, 64, 66, 67, 71—73, 79, 80), Păun Dorina (E: 1843, 45, 47, 57, 59, 60, 64, 66, 67, 71—73, 75, 79), Scarlat Paula (E: 1943, 45, 47, 57, 59, 64, 66, 67, 71—73, 75, 79), Tănase Veronica (E: 1843, 45, 47, 57, 59, 71, 73), Trnobransky Wanda (E: 1843, 45, 47, 57, 59, 63—65, 67, 71, 73, 75). Cl. XI. Mocanu Cornelia (5296, 98, 301, 02, 05, 06, 12—15, 17, 19, 35, 37, 41, 44, 45, 55, 65, 92, 400, 03, 22).

SIGHET. Ş.m. Cl. X. Iacobovici Mayer (5296—98, 306, 11, 13, 14, 17, 27, 32, 43, 45, 47).

SIRET. Ş.m. Cl. XI. Airinei Anton (5296, 98, 302, 08, 12, 14, 32, 34, 36, 52, 54, 55, 92, 412, 30), Chebici Doina (5297—99, 305—09, 14, 18, 21, 32, 34, 35, 39—41, 43—45, 50—52, 55, 72, 92, 400, 09, 22, 30).

SLĂNIC. Ş.m. 1. Cl. IX. Alionte Constantin (5296—98, 305, 13, 17, 28, 32, 39, 40, 43, 45, 47, 55, 84, 92, 93).

SUCEAVA. Ş.m. 1. Cl. XI. Verciuc Nicolae (5296, 302, 07, 12, 13, 15, 37, 44, 45, 55, 422, 30).

TIMIŞOARA. Ş.m. 1. Cl. IX. Walachy Evelin (5296, 313, 14, 17, 27, 32, 45, 55, 57, 92, 422, 28). Cl. X. Andru Dorina (249, 71, 82, 95, 305—08, 13—15, 17—19, 21, 27, 28, 32, 34—37, 39, 40, 50,

E1426

55, 65, 66, 72, 84, 92—96, 400, 03, 04, 09, 12, 22, 28), **Rujan Octavian** (300, 06, 09, 10, 16, 20, 22, 24, 44, 45, 47—49, 51, 52, 57, 66, 72—74, 76, 80, 84, 85, 87, 89, 99, 407, 09, 11, 12, 15, 19, 20, 22, 24, 27, 28, 30), **Stern Toma** (5306, 09, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 27, 43, 47, 48, 52, 54, 57, 65, 66, 68, 70, 74, 76, 80, 84—87, 93, 94, 96, 99, 400, 02, 03, 06, 07, 09, 12, 15, 19, 20, 22, 24, 27, 28, 30). Cl. XI. **Catalina Ioan** (5306, 07, 09, 15—17, 20, 22, 27, 28, 47, 48, 55, 65, 66, 72, 74, 80, 84, 85, 87, 95, 400, 02, 03, 07, 09, 11, 12, 15, 20, 22, 24, 27, 28, 30), **Sperneac Sorin** (5296, 98, 300, 02, 07, 11, 12, 15, 18, 20, 27, 28, 32, 44, 50).

Ş.m. 2. Cl. IX. **Păsăreanu Nicolae** (5296—97, 306, 09, 14, 27, 39, 40, 43, 47, 49, 51, 55, 59, 72, 403).

Ş.m. 5. Absolvent **Lusztig A. Gheorghe** (5303, 04, 06—11, 16, 17, 22, 25, 27, 31, 38, 44, 45, 54—56, 58, 60—62, 65—72, 74—76, 80, 81, 86, 87, 92, 94—400, 02, 03, 06, 11, 12, 17, 18, 20, 22, 24, 30, P).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1833

TABLA DE MATERII

a „Gazetei Matematice și Fizice", seria B, anul XIII (1962)

I — ARTICOLE

Pag

1. *P. Apostol* — Jean Baptiste Biot 147
2. *M. Burlacu* — Efectul Compton 74
3. *P. L. Cebîșev* — (din lucrarea Oameni ai științei ruse) . . . 577
4. *Florica T. Cîmpan* — Réné Descartes 257
5. *I. Crișan* — Scurtă privire istorică asupra dezvoltării algebrei . 525
6. Din istoria mașinilor electrice (prelucrare din l. rusă) . . . 584
7. *Gh. Dochițeanu* — Cîteva probleme de programare lineară . . 1
8. *Gh. Th. Gheorghiu* — Facultatea de matematică-fizică a Institutului Pedagogic de 5 ani Timișoara 351
9. *I. Hitzig* — Determinanți 267
10. *M. Ianovici* — Tuburi electronice 652
11. *M. Iosifescu* și *R. Theodorescu* — Probabilități 129
12. *M. Iosifescu* și *Radu Theodorescu* — Elemente de teoria informației 193
13. *F. Kelemen* — Camera cu bule 712
14. *M. A. Koreț* și *Z. L. Ponizovski* — Pribegii galaxiei . . . 202
15. *J. Lörincz* — Presiunea artificială în lichide 331
16. *S. Marcus* — Introducere elementară în teoria algoritmilor . . 451
17. *I. Maurer* — Fracții continue 385
18. *Al. Myller* — Arhimede 705
19. *Al. Nadolski* — G. A. Tihov 215
20. *M. V. Ostrogradski* (din lucrarea Oameni ai științei ruse) . . 17
21. *Maria Popescu* — Blaise Pascal și opera sa științifică . . . 462
22. *E. Rusu* — Deplasări 514
23. *Gh. D. Simionescu* — Unele observații în legătură cu lucrările scrise la cea de-a III-a olimpiadă internațională de matematică, 1962 65
24. *Gh. D. Simionescu* — A patra olimpiadă internațională de matematică, 1962 325
25. *D. Smaranda* — David Hilbert 641
26. *D. Stadnicov* — Stroboscopia 394
27. *Al. Stoenescu* — Omul în Cosmos. Suprasarcina și imponderabilitatea 211

28. *Al. Stoenescu* — Cîteva calcule referitoare la traiectoriile în cosmos ale lui Gagarin și Titov 264
29. *Tatiana Tofan* — Noțiuni despre mașini electronice de calculat . 10
30. *V. Tuțuraș* — Cîteva noțiuni despre pol, polară și figuri polare reciproce 658

II — EDITORIALE

1. La marea sărbătoare a eliberării patriei noastre de sub jugul fascist de *C. Ionescu-Bujor* 449
2. La început de nou an școlar de *Ilie Popa* 513
3. Sărbătorim a 45-a aniversare a Marii Revoluții Socialiste din Octombrie 577

III — PENTRU CERCURILE DE ELEVI

a) *Articole scurte.*

1. Despre asemănarea triunghiurilor de *Alice Corduneanu* . . . 21
2. Observarea eclipsei de soare din 15 februarie 1961 de către membrii cercului de astronomie din Iași de *L. Nadolski* 23
3. Constanta de elasticitate a unui resort de *V. Botoacă* . . . 79
4. Trioda funcționînd ca amplificatoare de oscilații electrice de *N. Izverceanu* 81
5. Acustică și ultraacustică. Sunetul (din Enciclopedia sovietică) . 91
6. Calculul capacității unui condensator plan, fix și variabil de *A. Cornescu* 140
7. Stabilirea geometrică a unor relații trigonometrice (din Matematica v skole) 217
8. O metodă pentru demonstrarea formulei lui Thomson de *Nistor Gall* 277
9. Latura poligonului regulat cu $2(2n-1)$ laturi de *Th. Jaluba* . 279
10. Asupra unor inegalități de *E. Vișa* 338
11. Generalizarea unei teoreme referitoare la triunghiuri de *F. Kacso*, student, Cluj 340
12. Cîteva cunoștințe utile despre transformări de *I. Török* . . . 471
13. Figuri geometrice cu elemente inaccesibile. Construcții grafice de *L. Lupovok* Hmelnițki (U.R.S.S.) 589
14. Unele aplicații geometrice ale calculului vectorial de *D. M. Bătinețu*, student matematici, București 595
15. Experiențe simple cu ajutorul turului electronic, fotocelulei electrice și a lămpii cu neon de *L. Csimbalmoș* și *P. Kirner* . . 663
16. Noutăți din știință și tehnică de *D. Silaghi* 672
17. Despre cubajul bușteni lor de *K. Kovacs* 719

b) *Dări de seamă.*

1. Din activitatea cercurilor de matematică și fizică ale elevilor școlilor profesionale din Iași 51
2. Scrisoarea Consiliului științific al facultății de matematică și fizică a Universității din București, către colaboratorii G.M.F.-B. 166
3. Către cititorii „Gazetei matematice și fizice" seria B și ai revistei „Matematikai es fizikai lapok". 374

4. Despre activitatea cercului de matematică al clasei a XI-a de la școala medie nr. 1 „N. Bălcescu" din București 552
5. Olimpiada de matematică și fizică 1962 (Dare de seamă) . . 723
6. Pragrama pentru Olimpiada de matematică și fizică 1963 . . 726

IV — NOTE MATEMATICE

1. Asupra problemelor 3488 și 3668 de *L. Lupaș*, student, București. 28
2. Două inegalități de *V. Vodă*, elev ș.m. 12 București . . . 29
3. Asupra problemei 4464 de *Gh. Buicliu* 92
4. Asupra unor șiruri recurente de *Gh. Lusztig*, elev Timișoara . . 147
5. Asupra problemei 3259 de *A. Ghica*, elev Pitești 220
6. Generalizări ale problemelor 4591, 3652, 4950 de *L. Lupaș*, student, București 221
7. Asupra unei probleme de *C. G. Bănică*, student București . . 344
8. Despre reprezentarea grafică a funcțiilor compuse de *N. O. Zaharia*. 400
9. Asupra teoremei lui Morley de *R. Bodnărescu* și *E. Wasserstrom*. 407
10. Generalizarea problemei 3797 de *T. Căsăndroiu*, student București. 476
11. Stabilirea unor inegalități de *D. M. Bătinețu*, student București. 478
12. Asupra unor ceviene de *V. Vodă*, elev București 528
13. Demonstrarea unor inegalități trigonometrice de *C. D. Zamfir*, elev ș.m. 3 Pitești 605
14. Asupra problemei 4249 de *A. Ghica*, elev ș.m. 1 Pitești . . 606
15. Asupra unei inegalități de *Gh. Lustig* elev Timișoara . . . 722

V — CHESTIUNI DE EXAMEN *)

1. Institutul politehnic București, 1961 (40, 41, 42)
2. Institutul politehnic Timișoara 1961 (167, 169).
3. Institutul de mine Petroșani 1961 (167, 168).
4. Institutul politehnic Iași 1961 (240).
5. Institutul politehnic București 1962 (695, 696).
6. Facultatea de chimie industrială, Iași 1961 (240, 244).
7. Institutul de construcții București 1962 (675, 676).
8. Facultatea de Chimie industrială București 1962 (696, 697).
9. Facultatea de fizică București 1962 (700).
10. Olimpiada matematică, Lwow, 1961 (628).
11. Olimpiada unională matematică, U.R.S.S., 1961 (49, 50).
12. Admitere în clasa a VIII-a 1961 (49).
13. Olimpiada matematică 1961, U.R.S.S. (626, 627).
14. Olimpiada fizică, 1961 (113, 114, 115).
15. Olimpiada fizică, 1962 (244, 245, 300, 368, 369, 549, 550).
16. Olimpiada matematică, 1962 (292, 293, 294, 295, 296, 360, 361, 362, 363, 364, 425, 426, 427, 428).
17. Olimpiada internațională de matematică, 1962 (502, 503).
18. Bacalaureat, 1961 (298, 299, 367, 423, 424, 499, 502, 544, 545, 548, 623, 697, 756).
19. Maturitate 1962 (498, 622, 623).
20. Institutul politehnic Iași, 1962 (752).
21. Fac. de fizică și Fac. de matematică-mecanică București, 1962 . 755

*) In paranteze este trecută pagina la care s-a publicat.

VI — CALEIDOSCOP MATEMATIC ȘI FIZIC

— Caleidoscop matematic (83, 345, 481, 669, 729).
— Caleidoscop fizic (283, 602, 669).

VII — SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

1. Aparat pentru studierea curentului alternativ de *I. Gross* . . 222
2. Un aparat simplu pentru determinarea forțelor electromagnetice și electrodinamice de *J. Vonhaz* 404
3. Un aparat de fizică construit cu mijloace locale de *D. Mondescu.* 465
4. Construcția unui aparat de mărit foto de *I. Nagy* 667

VIII — POȘTA REDACȚIEI ȘI CĂRȚI NOI

1. Către rezolvitorii de probleme (pe ultima copertă).
2. Anunțarea datelor olimpiadelor pe etape (ultima copertă).
3. Biblioteca Societății de științe matematice și fizice (ultima copertă).
4. Concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică (coperta III).
5. Înscrieri la întrecerea între școli medii (coperta nr. 9—11).
6. Rubrica rezolvitorilor de probleme (pag. 53, 177, 247, 302, 375, 431, 506, 630, 700, 764).
7. Evidențiați (pag. 53, 127, 184, 247, 305, 375, 437, 509, 566, 630, 700).
8. Cărți noi (pag. 52, 176, 372, 505, 554, 629, 699).

IX — DIN VIAȚA SOCIETĂȚII

1. Premiile Gazetei matematice și fizice, seria B pe anul 1961 . . 29
2. Chemare la întrecere între cercurile de matematică și fizică pe 1962 30
3. Rezultatul întrecerii între școlile medii din țară privind activitatea extrașcolară și a cercurilor de elevi la matematică și fizică pe anul 1961. 150
4. Activitatea în cercuri și „Chemarea la întrecere" 151
5. Un concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică. 153
6. Evidențiații la Olimpiada de matematică și fizică, etapa finală din 10—13 iunie 1962 409

X. — PROBLEME PROPUSE REPARTIZATE PE AUTORI *)

Acker Elena (5083), *Albu Toma* (5459), *Amberg Iuliu* (5155), *Ambrozie L.* (5191), *Apostol Victor* (5498), *Atanasiu Ionel* (5420, 5545, E: 1906), *Bădescu Lucian* (5367, 5411), *Băghină V.* (5561, E: 1924), *Bagosi E.* (5349), *Baidaff I. B.* (5369), *Bănică G. C.* (5146, 5216), *Bătinețu M. D.* (5129, 5516, E: 1777, 1845, 1846, 1881, 1884, 1885), *Bazacov Gh.* (5234, 5297, 5485), *Bebea N.* (5423, 5542, 5552), *Bică Emilian* (5195), *Birzan Romulus* (5414), *Bobolea I.* (5134), *Bogdanov Z.* (5456), *Bogen Otilia* (E: 1801), *Boldescu Petre* (5525), *Botoacă V.* (5102, 5106), *Brînzănescu V.* (5486, E: 1910), *Brînzei P. Dan* (5081), *Buicliu Gh.* (5179, 5372, 5445), *Candrea Ion* (5562), *Căpitan I. Gh.* (5401, 5551, E: 1879), *Căsăndroiu Tudor* (E: 1877), *Cernescu Petre* (5274), *Cirje M.* (5395), *Cohal Lidia* (5082), *Cohal Traian* (5254, 5298, 5327, 5451), *Constantinescu L.* (5175), *Costăchescu V. C.* (5187, 5364), *Condrea I.* (5562), *Chisăliță Adrian* (5564), *Coșniță C.* (5138, 5176, 5296, 5443, 5458),

*) În paranteză sînt trecute problemele pe care le-a propus autorul.

Cucoș Ștefan (5246), *Cuș A. Ioan* (E: 1818), *Dinulescu C.* (5101, 5415), *Dobrescu C.* (E: 1890, 1894), *Dogăroiu Emanoil* (5225, 5392), *Dorin Alexandru* (5506, E: 1834), *Drăgan Marin* (5104), *Drugă M. Gh.* (5544), *Dumitrescu I. Florea* (E: 1919), *Dumitriu C.* (E: 1800), *Dumitru Nicolae* (5256), *Fătu Constantin* (5192), *Fila Eugen* (5381), *Flondor D.* (5389, 5523), *Florescu M.* (5206), *Georgescu Corneliu* (5232, 5299, 5328, 5360, 5385, 5388, E 1 1920), *Germain S.* (E: 1813), *Ghica S. Anton* (5365, 5417), *Ghiman V.* (5107), *Gligor Groza* (5156), *Gloden A.* (5307), *Goldstein S.* (5029), 5385, 5388, E: 1920), *Germain S.* (E: 1806, 1808, 1874, 1876), *Gruia Ștefan* (5140), *Gușiță Marcel* (5105), *Hadîrcă I.* (5173, 5403), *Hajos Ladislau* (5229), *Herling C.* (5142), *Hortopeanu I.* (E: 1774), *Iacob Șt. Eug.* (5359), *Ionescu V. D.* (5126), *Ionescu-Țiu C.* (5080, 5084, 5128, 5137, 5144, 5172, 5178, 5188, 5220, 5222, 5233, 5273, 5278, 5279, 5307, 5309, 5319, 5325, 5326, 5354, 5356, 5361, 5386, 5387, 5404, 5412, 5444, 5453, 5479, 5482, 5490, 5497, 5510, 5514, 5515, 5548, 5557, 5570, E: 1780, 1797, 1815, 1823, 1829, 1849, 1861, 1862, 1883, 1887, 1902, 1905, 1909, 1914, 1918, 1922), *Jaliu I.* (5242), *Joandrea A.* (E: 1775, 1893), *Jurcă Iulian* (E: 1911), *Kacso M.* (5351), *Kiss Elemer* (5224), *Lalescu Al.* (E: 1878), *Lambă Stelian* (5526, E: 1825, 1886), *Leonte A.* (5446), *Lopovoc M. L.* (5202, E: 1846), *Lörincz Joszef* (5382), *Mahalniski S.* (E: 1804, 1805, 1820, 1822), *Man Octavian* (5507, 5508, 5509), *Mănescu Lucian* (5228, 5528), *Mărgineanu I.* (5263), *Manolache I. D.* (5214), *Marica Ștefan* (5141), *Mariș Ioana* (E: 1907, 1908), *Masgras V.* (5088, 5563), *Matei I. Augustin* (5227, 5518), *Matei Gh.* (E: 1786), *Mateș T.* (5147), *Menciu C.* (5226, 5271), *Mihail M.* (5093), *Mihăileanu N.* (5086, 5087, 5127, 5268, 5321), *Mihalache Ilie* (5257), *Mirzan D.* (E: 1899, 1924), *Morțun Emil* (5170, 5213, 5325, 5353), *Munteanu I.* (E: 1830, 1875, 1882), *Musta St.* (5097), *Nan Octavian* (5085), *Năstăsescu C.* (5418, 5503), *Necula V.* (5131), *Olivotto Ivanca* (5311), *Oprea Miron* (5400, 5524, E: 1848), *Oprișan Gh.* (5502), *Oproiu Ion* (5217), *Panu C. D.* (5181), *Pavel N. Radu* (5196, 5290, E: 1787, 1879, 1844), *Paxino Gh.* (5198), *Petrescu Anastasie* (5413), *Pîrșan Liviu* (5318, 5457, 5484, E: 1807, 1826, 1835, 1847, 1889, 1891), *Pislaru Gh.* (5529), *Popescu D.* (E: 1871, 1912), *Popescu Gh.* (5197, 5235, 5248, 5251, 5390, 5504, 5527), *Popescu I. Șerban* (5270), *Popescu I.* (E: 1827, 1888), *Popescu Viorica* (5195, 5201), *Poru Ioan* (5319), *Poșta N.* (5180, 5511, 5512), *Poterașu V.* (5368), *Pravăț V.* (5505), *Predoiescu I. Marin* (5174), *Radu N. Ion* (5099, 5407), *Raicu Viorel* (5546), *Răzvan Vladimir* (5108), *Reinheimer E.* (5314, 5315), *Rertenz Antal* (521), *Roman Tiberiu* (5253, 5310) *Rus A. Ioan* (E: 1855), *Rusu E.* (5471), *Săbăilă Aurel* (5449), *Sacter O.* (5252, 5300, 5301, 5393), *Săndulache C.* (5375, 5376, 5405), *Schwartz Lajos* (5383, E: 1869), *Sfetcu I.* (5190), *Simionescu D. Gh.* (5096, 5098, 5139, 5177, 5265, 5302, 5304, 5316, 5391, 5394, 5396), *Simon Petre* (5092, 5350, 5380), *Stănășilă Octavian* (5303), *Stăncescu St. N.* (5269), *Stănescu Ilie* (5249), 5424, E: 1865, 1866), *Stănescu N.* (5241), *Stavre Petre* (5133), *Stoicescu P. Aurel* (5130), *Stamate I. I.* (5324, 5355, 5362, 5519, E: 1900), *Strătilă Șerban* (5215), *Strătescu Ion* (5483, 5487), *Stancu M. Ion* (517, E: 1836), *Szollosy Gh.* (5520), *Tănase D.* (5194, 5199), *Tăzlăoanu D.* (5291), *Teodorescu C.* (5144), *Tilici Emil* (E: 1873, 1813), *Toacsen Livia* (5499), *Todoran I.* (5171, 5363), *Tomescu Ion* (5357), *Tudor Gheorghe* (5402), *Tudor N. C.* (5460, E: 1925), *Țigănoiu Al.* (5223), *Țene Lucia* (5384), *Țimbălaru Jean* (5135), *Ursulescu St. Valeriu* (5183), *Ursulescu O.* (E: 1810, 1872), *Vasilescu C.* (5255), *Vasiliu Florin* (5421, 5425), *Vilceanu I. Sabin* (5193, 5200, 5541), *Vitalyos E.* (E: 1870), *Vodă G. Viorel* (5089, 5136, 5218, 5275, 5450, E: 1892, 1915), *Weissmann Martin* (54), *Wolf Alexandru* (5530), *Zamfirescu I. Tudor* (5091, 5132, 5416, 5522, 5547).

XI — PROBLEME REZOLVATE *)

4458 (31), 4476 (93), 4491 (94), 4500 (32), 4501 (226), 4518 (94), 4520 (33), 4521 (96), 4522 (33), 4523 (97), 4525 (97), 4532 (153), 4533 (229), 4535 (229), 4536 (230), 4537 (98), 4538 (239), 4543 (35), 4544 (154), 4547 (154), 4549 (99), 4552 (99), 4556 (155), 4558 (36), 4559 (37), 4560 (156), 4561 (157), 4564 (158), 4566 (101), 4567 (231), 4568 (159), 4569 (160), 4570 (234), 4571 (235), 4581 (236), 4585 (161), 4586 (236), 4588 (237), 4589 (161), 4591 (285), 4592 (161), 4593 (285), 4594 (162), 4596 (163), 4602 (238), 4604 (239), 4609 (287), 4611 (287), 4612 (288).

*) În paranteză este trecută pagina la care este rezolvată problema.

4613 (621), 4618 (289), 4619 (346), 4630 (347), 4635 (348), 4641 (348), 4643 (349), 4646 (350), 4648 (350), 4649 (351), 4650 (411), 4651 (412), 4652 (412), 4654 (413), 4655 (413), 4659 (414), 4669 (415), 4662 (415), 4663 (416), 4664 (416), 4665 (417), 4666 (418), 4670 (418), 4671 (484), 4677 (485), 4681 (485), 4682 (486), 4684 (488), 4686 (489), 4687 (489), 4688 (490), 4693 (490), 4694 (491), 4704 (531), 4711 (531), 4715 (532), 4722 (533), 4724 (533), 4742 (534), 4744 (534), 4752 (535), 4754 (537), 4755 (538), 4771 (607), 4787 (608), 4790 (609), 4795 (611), 4799 (611), 4811 (674), 4812 (675), 4813 (675), 4814 (676), 4815 (677), 4818 (679), 4819 (680), 4836 (681), 4837 (682), 4838 (682), 4850 (685), 4858 (684), 4860 (685), 4866 (685), 4868 (65), 4869 (66), 4870 (67), 4871 (69), 4872 (71), 4873 (72), 4874 (616), 4906 (730), 4920 (730), 4932 (731), 4933 (731), 4934 (732), 4943 (732), 4946 (733), 4947 (734), 4948 (735), 4955 (732), 4962 (737), 4974 (738), 4979 (739), 4980 (739), 4988 (740), 4993 (741), 4949 (742), 4995 (743), 4996 (743), 4998 (744), 4999 (745), 5427 (643), 5428 (644), 5429 (645), 5430 (656), 5431 (646), 5432 (647), 5433 (649).

E: 1528 (101), 1587 (102), 1589 (102), 1591 (103), 1596 (103), 1612 (103), 1629 (164), 1630 (104), 1631 (164), 1632 (165), 1633 (104), 1634 (105), 1635 (106), 1637 (165), 1638 (351), 1641 (106), 1645 (352), 1646 (107), 1647 (353), 1648 (353), 1658 (354), 1659 (290), 1660 (107), 1661 (291), 1665 (292), 1670 (491), 1674 (492), 1676 (492), 1677 (493), 1700 (540), 1701 (540), 1702 (541), 1703 (612), 1707 (612), 1709 (613), 1717 (614), 1720 (615), 1724 (614), 1764 (615), 1766 (616), 1779 (616), 1807

M.F.L.: — 807 (354), 808 (355), 809 (356), 810 (356), 811 (357), 812 (358), (686), 1810 (687).

813 (358), 814 (359), 815 (419), 816 (419), 817 (420), 818 (493), 819 (494), 820 (494), 821 (495), 828 (745), 829 (746), 830 (747), E. 753 (496), 754 758 (542), 759 (543), 760 (617), 761 (618), 762 (618), 763 (619), 764 (619), 765 (620), 766 (621), 774 (688), 775 (689), 776 (689), 777 (690), 778 (690), 779 (690), 780 (691).

Total 241 probleme rezolvate.

XII. EVIDENȚIAȚI *)

1. *Abrudan Viorel* (187), 2. *Acu Dumitru* (510, 700), 3. *Airinei Anton* (510), 4. *Aisner Sergiu* (54, 305, 438, 509, 700), 5. *Aisner Rolanda* (700), 6. *Aldea Z. Ion* (54), 7. *Alexandrescu Petruț* (184, 700), 8. *Almer David* (700), 9. *Ambruș Mircea* (567), 10. *Anca Daniel* (438, 567), 11. *Andreescu Liviu* (437), 12. *Andrei Maria* (375), 13. *Andrei Paul* (510), 14. *Andriaș Nicolae* (567), 15. *Andronescu Gh.* (305, 438, 631), 16. *Andru Dorina* (375, 510, 700), 17. *Anghel Vasile* (305, 438, 510, 631), 18. *Apostol Adriana* (567), 19. *Apostol Dan* (54), 20. *Balaci Ion* (438), 21. *Banu N. Gh.* (54, 509, 517), 22. *Barsoni Andrei* (631), 23. *Barth Ferencz* (631), 24. *Barth Laszlo* (631), 25. *Bădescu N. Lucian* (53, 127, 184, 375, 566), 26. *Bădulescu Grigore* (509, 631), 27. *Băluță Gheorghe* (184, 306, 375, 509, 567), 28. *Băluțescu Mihai* (510), 29. *Băncilă Maria* (510), 30. *Bejan Costel* (375), 31. *Bejancu Aurel* (375, 438, 509, 630), 32. *Bibicu Ion* (567), 33. *Birză Ilie* (375, 510, 700), 34. *Birzănescu Vasile* (248, 305, 509), 35. *Biscă Octavian* (567), 36. *Boicescu Vlad* (54), 37. *Boicu Emil* (510), 38. *Boldea Ion* (127, 184, 248, 375, 509), 39. *Bolocan Gabriel* (54), 40. *Borza Ioan* (509), 41. *Bluoss I. Hans* (54), 42. *Bosteanu Livia* (438), 43. *Brănici Doru* (631), 44. *Brenner Paul* (631), 45. *Brincuș Dan* (127), 46. *Brinda Rodica* (127, 631), 47. *Bucur Lelia* (305, 631), 48. *Budișteanu Radu* (181), 49. *Buiculescu Mioara* (510), 50. *Bulzan Tiberiu* (510), 51. *Bunea Bănică* (184, 305, 510), 52. *Butaciu Nic.* (247, 375, 567), 53. *Butcă Alex.* (305), 54. *Cala Constantin* (306), 55. *Caloianu Pompiliu* (54), 56. *Caloianu Gabriel* (248), 57. *Caraman Dan* (54), 58. *Cătălina Ioan* (510, 700), 59. *Cepoiu Mariana* (54), 60. *Chisăliță Adrian* (631, 700), 61. *Chiriac Ioan* (510, 631), 62. *Chiș Gheorghe* (700), 63. *Cimponeriu Traian* (247, 375, 438, 567), 64. *Ciobanu Viorel* (567), 65. *Ciocoiu Virgil* (510), 66. *Ciornea Dumitru* (567), 67. *Ciura Alexandru* (375, 510, 567), 68. *Ciurtin Cătălin* (510), 69. *Cojanu Marius* (510), 70. *Cojocaru Florian* (375), 71. *Cojocaru Ion* (375), 72. *Cojocaru Sebastian* (375), 73. *Conache Petre* (567), 74. *Corcoțoi Ion* (509), 75. *Constantinescu Al. Marius* (54, 305, 437), 76. *Cornea Dumitru* (306, 438, 631), 77. *Costea Dumitru* (631), 78. *Costeie Doru* (510), 79. *Catană Ilie* (510), 80. *Circu Ion* (437), 81. *Crainic Emanuel* (305, 509, 566), 82.

*) In paranteză sînt trecute paginile la care a fost evidențiat rezolvitorul.

Cula Constantin (510), 83. *Crețu Dumitru* (248, 305), 84. *Crețu Marcel* (127), 85. *Crișan Victor* (510, 631), 86. *Crivăț Dan* (375), 87. *Cupcea Nicolae* (54), 88. *Daba Dan* (306, 438, 631), 89. *Danciu Iulian* (305), 90. *Dăncilă Ion* (305, 437, 567), 91. *Dănuță Ion* (631), 92. *Dalyai Pal* (631), 93. *Demeny Pal* (631), 94. *Depărățeanu Dan* (510), 95. *Diaconescu Ion* (184, 375, 517), 96. *Diaconescu Nicolae* (184, 438), 97. *Diaconescu Nicolae* (Rupea) (510, 700), 98. *Diaconescu C. Radu* (53, 184, 247, 375, 438), 99. *Diaconu Nicolae* (509, 631), 100. *Diaconescu Florin* (567), 101. *Dobre Dan* (248), 102. *Dobriță Gheorghe* (437), 103. *Dolteanu Temistocle* (631), 104. *Dorin Alexandru* (248, 567), 105. *Drăgan Victor* (438), 106. *Drăgulinescu Dumitru* (567), 107. *Drugă Gheorghe* (127, 184, 305, 375, 567), 108. *Dumitru Cornelia* (375, 631), 109. *Elec Maria* (54), 110. *Elek Ana* (631), 111. *Enache Ion* (54), 112. *Ender Lucian* (184, 305, 375, 566), 113. *Ene Ion* (631), 114. *Erdely Klara* (631), 115. *Eremia Dinu* (567), 116. *Enca Aurel* (184), 117. *Feran Monica* (510), 118. *Ferențin Militon* (127, 438, 567), 119. *Filip Emilian* (438), 120. *Filip Liana* (510), 121. *Francu Octavian* (567, 700), 122. *Frankenfeld Georgian* (54, 305, 438, 631), 123. *Frincu Zaharia* (375), 124. *Frajko Laszlo* (631), 125. *Fülop György* (631), 126. *Gajzago Maria* (631), 127. *Galatzky Gheorghe* (438, 700), 128. *Galeriu Dan* (438, 631), 129. *Ganciu Teohari* (247), 130. *Garabedian Rodica* (53,) 131. *Georgescu Horia* (54), 132. *Georgescu Cristian* (438), 133. *Georgescu Ștelian* (53, 305), 134. *Gheorghe Constantin* (631, 700), 135. *Gheorghiu Ilie (700), 136. Gherban Doru* (375, 510), 137. *Gherguș Felicia* (54), 138. *Gheț Ion* (438), 139. *Ghiță R. Teodor* (127, 305), 140. *Goldstein Beniamin* (127, 141. *Gologan Viorel* (700), 142 *Grădeanu Gheorghe* (54, 127), 143. *Grădeanu Valeria* (54), 144. *Grigoriu Mihai* (54, 375), 145. *Grigorescu I. Șerban* (54, 566, 700), 146. *Gropper Jean* (375, 700), 147. *Grozavu Mihai* (700), 148. *Grozeanu Ion* (567), 149. *Grunberg Ilie* (248, 438), 150. *Gusiță M.* (53), 151. *Guță Cristian* (305), 152. *Gurămultă Dan* (631), 153. *Haim Marcel* (375, 510), 154. *Hajos Ladislau* (510), 155. *Hegedus Istvan* (631), 156. *Hodiș Gheorghe* (127), 157. *Horovitz Ossi* (306, 438), 158. *Hridor Teodor* (305), 159. *Iacobovici Sorin* (510, 700), 160. *Iancu Ion* (700), 161. *Ifrimela Ștefan* (631), 162. *Ilie Justin* (567), 163. *Ilie Mihai* (53), 164. *Iliescu Victor* (567), 165. *Ion Alexandru* (567), 166. *Ionescu Marcel* (437), 167. *Ionescu Gregorian* (567), 168. *Ionescu Mihai* (510, 700), 169. *Ioniță Maria* (509), 170. *Iordan Dumitru*, Bîrlad, (375, 510, 567), 171. *Iordan Dumitru, Babadag*, (305), 172. *Iordan Mariana* (510), 173. *Ivanov Ilie* (567), 174. *Ivănescu Alexandru* (567), 175. *Jucov Gheorghe* (567), 176. *Jakab Ferenc* (631), 177. *Joița Ioan* (305), 178. *Jora Boris* (306, 509, 700), 179. *Jucov* 181. *Jurcă Ioan* (438, 510, 631), 182. *Gheorghe* (375), 180. *Juga Mihai* (700), 181. *Jurcă Ioan* (438, 510, 631), 182. *Kivu Elena* (248), 183. *Kiss Lajos* (631), 184. *Kovacs Ilona* (631), 185. *Kopan Șandor* (631), 186. *Lazea Adrian* (375), 187. *Lazea Ion* (54), 188. *Leon Dorel* (631), 189. *Leția Ion* (54, 184), 190. *Liciu Eugen* (375, 510), 191. *Lucaci Nic.* (510), 192. *Lucaci Pompiliu* (567), 193. *Lusztig Gheorghe* (54, 247, 305, 437, 566, 700), 194. *Luță Cristian* (510), 195. *Maftei Radu Eugen* (54, 438, 630), 196 *Manda Rodica* (375), 197. *Marcus Sergiu* (184), 198. *Marian Iuliu* (700), 199. *Marinescu Victor* (53, 184), 200. *Matei Gheorghe* (305, 438, 567), 201. *Matei Ion* (248, 509), 202. *Maxim Dan* (375), 203. *Maxim Paul* (248), 204. *Măntăluță Maria* (375), 205. *Mărculescu Dan* (248, 438), 206. *Mărgineanu Doru* (54, 184, 437, 509, 700), 207. *Mendelsohn Zeppy* (510), 208. *Mendel Sorin* (54), 209. *Migdalovici Marcel* (305, 510, 700), 210. *Mihăilescu Elena* (54), 211. *Mincinopski Gh.* (510), 212. *Mocanu Rodica* (54), 213. *Mocioiu Doru* (184, 375), 214. *Mol-* 138), 206. *Mărgineanu Doru* (54, 184, *dovan Gabriel* (567, 631), 215. *Moraru Ion* (375, 567), 216. *Morgenstern S.* (305), 217. *Moscovici Cornel* (305, 567), 218. *Moțit M. Horia* (54), 219. *Mozes Ervin* (510), 220. *Munteanu Elena* (306, 567), 221. *Munteanu Gh. Mihai* (54, 631), 222. *Munteanu G. Mircea* (54, 248, 305, 509, 567), 223. *Mura Ana* (631), 224. *Mușatescu Virgil* (567), 225. *Naceaev Mihai* (510), 226. *Năstăsescu Constantin* (54), 227. *Neacșu Viorel* (247, 438, 631), 228. *Neagu Gheorghe* (54), 229. *Neagoe Sorin* (567), 230. *Neagoe Victor* (510, 631), 231. *Necula Mihai* (54), 232. *Negruțiu Vasile* (375, 509), 233. *Negoescu Gheorghe* (248), 234. *Negreanu Mircea* (54), 235. *Nemeș Vasile* (54), 236. *Nicolau Petru* (248, 437), 237. *Niculescu Constanța* (631), 238. *Niculescu Gh. Gheorghe* (54, 247), 239. *Niță Petru* (700), 240. *Nițescu Dan* (631), 241. *Oanță Sima* (247, 509), 242. *Olariu Adrian* (306, 509, 631), 243. *Olar Iacob* (306), 244. *Olariu Ștefan* (631), 245. *Onofrei Mihai* (700), 246. *Onu Va-*

sile (375, 509), 247. *Oprea Victor* (631), 248. *Oprescu Mihai* (375), 249. *Ostin Mihai* (184), 250. *Oprișan Gh.* (184, 305), 251. *Ostap Ion* (631), 252. *Paidiu Ion* (437, 700), 253. *Panea Mihaela* (305), 254. *Pantelimon Anton* (54, 184, 510, 567), 255. *Pancu Adriana* (631), 256. *Paul Alex.* (437), 257. *Pavel Eva* (54), 258. *Pavel Marin* (127), 259. *Pavel Nicolae* (305), 260. *Pavel N. Radu* (54), 261. *Păcuraru Liana* (375), 262. *Păsăreanu Dan* (305), 263. *Pătrașcu Gh.* (375), 264. *Pătrașcu Mihai* (567), 265. *Persache Octavian* (305), 266. *Petrescu Margareta* (510), 267. *Piscupescu Gabriel* (127), 268. *Pirșan Liviu* (54, 306, 631), 269. *Pîrvulescu Constantin* (54, 510), 270. *Peiulescu Marius* (375), 271. *Popa Emil* (375), 272. *Pop Liviu* (306), 273. *Popa I. Nicolae* (53), 274. *Popa Alexandru* (127, 438, 567), 275. *Popa Radu* (248, 305, 509), 276. *Popa Ion* (438, 509), 277. *Popa Nicolae*, Pitești, (438), 278. *Popescu Gh. Andrei* (54), 279. *Popescu S. Gheorghe* (54), 280. *Popeea Corneliu* (54), 281. *Popescu Domițian* (305, 375, 567, 630), 282. *Pupăzan Nicolae* (53, 509), 283. *Popovici Cornel* (248, 306, 375, 438, 509, 700), 284. *Popescu Dumitru* (631), 285. *Potcovaru Gheorghe* (510), 286. *Preda Victoria* (510), 287. *Prodan Constantin* (567), 288. *Puiu Mihai* (247, 437), 289. *Rabinovici Silviu* (184, 438, 510, 631), 290. *Radian Thea* (375, 567), 291. *Radu Dan* (509, 631), 292. *Rădan Sorin* (566), 293. *Rădulescu Tudor* (567), 294. *Rădulescu Dorin* (700), 295. *Răzvan Vladimir* (248), 296. *Reghină N. Petre* (54, 184, 305, 438), 297. *Rîmbu Revișoara* (438), 298. *Reoemer Vincențiu* (375, 567), 299. *Rosenberg Petru* (305), 300. *Rosenberg Harry* (306), 301. *Rosenberg Flavia* (375, 567, 631), 302. *Rus Petru* (375), 303. *Rujan Octavian* (375, 509, 631, 700), 304. *Rusu Constantin* (438, 510), 305. *Sajin Valeriu* (127), 306. *Sandu Marin* (375), 307. *Sandu Ian* (438), 308. *Savitescu Gh.* (54, 305, 567), 309. *Săbăilă Aurel* (184, 305, 375, 567), 310. *Sănduț Medeea* (375), 311. *Segal Zeilic* (184), 312. *Selinger Doina* (306, 567), 313. *Serachitopol Adrian* (54, 247, 305, 438, 567), 314. *Serțer Irvin* (247, 567), 315. *Sicoe Constantin* (375), 316. *Simplăceanu Virgil* (375, 510), 317. *Simion Alexandru* (248, 567, 631), 318. *Siroker Iosif* (509), 319. *Scurtu Ionel* (54, 305), 320. *Ștefan Marița* (305), 321. *Sfetcu Ioan* (53, 127, 248), 322. *Spircu Tiberiu* (54 509, 631), 323. *Sgăvîrdea Dumitru* (510), 324. *Smicală Ion* (375), 325. *Soare Marin* (305), 326. *Soare Dumitru* (184), 327. *Stan Ștefan* (53), 328. *Stancu Ion* (54, 247, 305, 509, 700), 329. *Stan Lucian* (248), 330. *Stăculescu Radu* (247), 331. *Spătaru Aurel* (510), 332. *Stănciulescu Carmen* (567, 631, 700), 333. *Stănescu Cicerone* (305), 334. *Stern Toma* (437, 509, 567, 700), 335. *Stoia Manuela* (54), 336. *Stratan Valentin* (501), 337. *Soare Cristel* (567), 338. *Șandru Victor* (510), 339. *Șerban Dumitru* (305), 340. *Șerban Doina* (53, 306, 375, 510), 341. *Sucitu Gheorghe* (54), 342. *Semlyen Janos* (631), 343. *Șerb Ioan* (700), 344. *Solcan Nicolae* (375), 345. *Ștefănescu Sabba Ion* (305, 375), 346. *Tăbușcă Ion* (567), 347. *Tănase Virgil* (305, 437), 348. *Tărăbuță Mihai* (184, 437), 349. *Tătar Ioan* (510), 350. *Teodor Theodor* (184), 351. *Țifui Maria* (54), 352. *Tigmeanu Ion* (631), 353. *Timoșenko Alexandru* (54, 567), 354. *Tîrcă Ion* (305), 355. *Tofan Emil* (248), 356. *Toma Dragomir* (184, 247, 305, 509, 567, 700), 357. *Toma Marin* (631), 358. *Tomescu Dumitru* (248, 438), 359. *Thirer Nonel* (510), 360. *Tonceanu Dan* (54), 361. *Țuchel Sanda* (306, 567), 362. *Țințăreanu Cristian* (54), 363. *Trif Mariana* (54), 364. *Ursulescu Octavian* (437, 567), 365. *Varga Somogy* (631), 366. *Vasile Cornel* (700), 367. *Vasiliu Florin* (306), 368. *Vasiliu Dan* (127, 184, 305, 437), 369. *Văcaru Vasile* (700), 370. *Viorel Costea* (306, 438, 507), 371. *Vîlceanu Sabin* (305, 437, 567, 631, 700), 372. *Vlase Aurelian* (248, 438, 630), 373. *Vlădoreanu Cornel* (247, 567, 631), 374. *Vodă Viorel* (184, 305, 437, 567), 375. *Vlăduțiu Mircea* (127, 184), 376. Vlaicu Ion (306), 377. *Voiorica Octavian* (375), 378. *Weissmann M.* (509), 379. *Weinstein Jack* (631), 380. *Zamfir Gh. Ion* (54, 247, 306, 375, 509, 631), 381. *Zamfir Luca* (54), 382. *Zamfir Dumitru* (305), 383. *Zamfirache Maria* (54), 384. *Zamfir Corneliu* (509, 631, 700), 385. *Zara Dan* (375), 386. *Zăgreanu Marius* (306, 438, 509, 631), 387. *Zegheanu Petre* (127, 184, 305, 375, 437, 631), 388. *Zissu Tudor* (375, 437, 566, 630, 700), 389. *Zisu Ana* (54, 437, 566, 630, 700), 390. *Zoler David* (305, 375, 567), 391. *Zsido Laszlo* (630), 392. *Zsido Gyorgy* (631), 393. *Zsido Agnes* (631).

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenţii care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoţind-o de toate calculele necesare şi de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Se primesc lunar într-un plic soluţii numai la problemele şi exerciţiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea şi şcoala pe care o urmează rezolvitorul pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme şi a listei celor evidenţiaţi. **Evidenţiaţii trebuie să aibă cel puţin 36 soluţii bune.**

Problemele care se propun de către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite şi însoţite de soluţii, să fie personale, iar nu luate din cărţi sau reviste. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărţi sau reviste, este rugat să arate precis volumul şi pagina unde a mai apărut enunţul sau soluţia problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce, să schiţeze cîte o notă rezultată dintr-o observaţie făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note **să fie făcute de mai multe ori înainte de a fi trimise**, pentru ca redactarea lor să fie **cît mai clară şi concisă**. Figurile să fie făcute separat. In redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\| = ; \sim ; \ast\ast\ast ; \perp ; \| ;$ Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a putea urmări uşor desfăşurarea unei demonstraţii. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menţiona rezolvitorii care au dat o bună redactare şi o soluţie interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor IX—XI sau studenţii vor trimite soluţii la problemele propuse pentru clasele VIII—XI. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.F.—B sau M.F.L. Problmele rezolvate de matematică şi fizică vor fi expediate odată în cursul unei luni într-un singur plic şi vor fi însoţite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie şcoala, clasa şi localitatea rezolvitorului. Problemele propuse vor fi scrise pe foi separate.

Elevii claselor V—VII vor fi anunţaţi la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trmit cel puţin 7 probleme bine rezolvate, iar elevii VIII—XI, pentru cel puţin 12 probleme bine rezolvate. Elevii din clasa VIII pot trimite soluţii şi la E: V—VIII.

— Colaboratorii G.M.F.-B, profesori şi elevi, sînt rugaţi să trimită îndată redacţiei, fişa completată cu activitatea extraşcolară şi în cercurile de elevi pe anul 1961—1962, conform celor publicate în nr. 1, 1962, pag. 30.

Evidenţiaţii de cel puţin 2 ori pot trimite totalizarea problemelor rezolvate şi anunţate în nr. 1—11 G.M.F.-B-1962, dacă au însumat minim 140.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B, nu vor fi publicate.

Autorii sînt rugaţi să semneze clar la sfîrşitul lucrării persoanele pe care o trimit pentru publicat şi adresa lor exactă.

Pînă la 20 octombrie 1962 s-au primit fişele la întrecerea pe anul 1961—1962 de la următoarele şcoli medii din ţară: Aiud, Alexandria, (Ş. m. 1), Botoşani (Ş. m. 1), Borşa (Maramureş), Brăila (Ş. m. 2), Bucureşti (Ş. m. 1, 10, 11, 13, 22), Caransebeş (Ş. m. 1, 2), C-lung Moldovenesc, Oradea (Ş. m. 1, 3), Năsăud, Rupea, Petroşeni, Piatra Neamţ (Ş. m. 1), Salonta (Ş. m. 1), Sighet, Sinaia, Turda, Tr. Măgurele, Tr. Severin (Ş. m. 1).

Rugăm responsabilii cu activitatea ştiinţifică din celelalte şcoli medii în cadrul S.S.M.F. să ne trimită de îndată fişe cu punctajul obţinut conform celor publicate în G.M.F.-B pag. 30, şi 151 din 1962.

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

GH. ȚIȚEICA	Culegere de probleme de geometrie, ed. IV-a (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
C. BORȘ	Noțiuni de geometrie proiectivă.
M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
H. STEINHAUS	Caleidoscop matematic.
C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura, originea și evoluția lor.
C. DRIMBA	Elemente de mecanică cerească.
C. IONESCH-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
C. IONESCH-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
A. I .MARKUȘEVICI	Numere complexe și reprezentări conforme.
I. S. GRADSTEIN	Teorema directă și reciprocă.
V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivata ?
G. N. BERMAN	Despre numere și studiul numerelor.
A. IAGLOM și I. IAGLOM	Probleme neelementare tratate elementar.
CIUCU și SIMBOANU	Culegere de probleme de calculul probabilităților și statistică.
N. D. FEDOROV	Ciclotronul.
O. SACTER	Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente.
V. ATANASIU	Noțiuni de fizică generală. Vol. I.
C. BORȘ și D. BORȘ	Numere complexe.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

pentru elevii școlilor medii, profesionale, pedagogice și tehnice de maiștri, din anul 1963, are loc astfel:

— etapa locală — la 10 februarie 1963 (matematică)
— etapa locală — la 17 februarie 1963 (fizică)
— etapa regională — 23, 24, 25 martie 1963
— etapa finală — 26—28 mai 1963.

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— *Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.*

Întreprinderea Poligrafică Nr. 6 — c. 5504

Lei 1,50

Popescu Elena (E: 1776, 79, 801—03, 05—07, 09), Schneider Mihaela (E: 1775, 77—80, 86, 96, 809; 5107, 49), Wartepuiuk Mihaela (E: 1775, 77—80, 802, 03, 36, 08, 11). Cl. X. Ionescu Sorin (5067, 69, 70, 72, 80, 81, 84, 86, 87, 89). S.m.3. Cl. VIII. Cherciu Mihai (E: 1790, 807, 08, 10, 11—14, 5118, 20, 52, 93). Cl. IX. Leca Octavian (5067, 68, 70, 86, 87, 89, 90, 96, 99, 107, 10, 12, 16, 18, 20, 21, 23, 36, 39, 41, 41, 44). Cl. X. Georgescu Cristian (5067, 69, 70, 72—74, 80, 83, 84, 86, 87, 89, 96, 99, 100, 03, 05, 07, 08). Cl. XI. Gheorghiu Constantin (5067, 68, 69, 70, 71, 72, 79, 80, 81, 84, 87, 89, 94, 97).

S.m.4. Cl. X. Blava Mihai (5069, 86, 96, 109, 10, 15, 16, 30, 39, 44). S.m.6. Cl. V. Gafiţeanu Carmen (E: 1800—03, 05, 06, 08, 11, 14). Cl. IX. Pătraşcu Mihai (5067, 68, 86, 110, 16, 29, 39, 59, 60, 67, 75, 80). Cl. X. Pătraşcu Tudor (E: 5067, 68, 69, 86, 89, 109, 10, 16, 39, 58, 59, 60, 67, 70, 75, 80).

PUCIOASA. Ş.m. Cl. VIII. Bîrlog Corneliu (E: 1790, 801, 02, 03, 05—11, 5116), (Diaconu Eugenia (E: 1775, 79, 80, 98, 802, 03, 06, 07, 09, 10), Diaconescu Nădejde (E: 1778, 80, 81, 83, 86, 90, 93, 802, 03, 07, 09, 11, 5035, 192), Niţescu Dan (E: 1778, 81, 86, 802, 03, 05—07, 09—11, 5193), Rădulescu Virgil (E: 1773, 75, 77—79, 90, 802, 03, 07—11), Vasilescu Ana (E: 1790, 95, 98, 800, 02, 03, 06, 07, 09, 12). Cl. IX. Măciucă Ion (5073, 77, 99, 100, 03, 07, 18—20, 23, 25, 49, 50, 52, 53, 95). Cl. X. Anca Dorinel (4966, 78, 90, 5011, 67, 69, 70, 72—74, 80, 82, 86, 89, 99, 100, 03, 10, 15, 16, 18—20, 22, 23, 25, 44, 49), Doda Gheorghe (5067, 74, 80, 96, 100, 03, 07, 15, 17, 19, 35), Ene Ion (5067, 76, 80, 96, 99, 100, 07, 10—12, 15, 16, 18, 19, 30, 31, 33, 35, 62, 63, 95, 96, 202), Manea Ilie (4973, 5024, 27—31, 73, 107, 16, 20, 39). Cl. XI. Diaconescu Radu (4966, 68, 5013, 19, 42—44, 51—55, 59, 60, 67—74, 77—84, 86, 92, 5110—20).

PREDEAL. Ş.m. Cl. VIII. Ioniţă Maria (E: 1774—81, 90, 800). Cl. IX. Cardaş Vladimir (5099, 104, 18, 20, 21, 45, 52—54, 93, 95). Cl. XI. Ivaşcu Dumitru (5068—72, 79, 80, 88, 93, 112).

RĂDAUŢI. Ş.m. 1. Cl. XI. Moroşanu Ioan (5024—27, 31, 69, 108, 10, 11, 13—17, 19). Ş.m. 2. Cl. VIII. Weinstein Jack (E: 1775—77, 79, 81—83, 85—87, 89; 5072—74, 99, 100, 03, 05, 06, 08).

REŞIŢA. Cl. VIII. Lazăr Elisabeta (E: 1775, 802, 03, 06, 07, 09, 5193), Lichwar Renek (E: 1775, 77—80, 86, 90, 803, 07, 09, 5193), Stiofu Magda (E: 1775, 77, 80, 90, 801—03, 06—09), Liceul seral de pe lîngă Combinatul metalurgic. Cl. IX. Orza Gheorghe (5107, 18, 20, 21, 45, 49, 52, 55). Absolvent Boiangiu Corneliu (5103, 12, 15, 18, 23, 24, 35, 39, 43—45, 50, 55, 63—65, 68, 70, 72, 79, 82, 89).

ROMAN. Ş.m. Cl. XI. Segal Akiva (5110, 11, 15—17, 42, 58—61, 67, 81). Absolvent Szatmari Emeric (5020, 24, 27, 30, 33, 69, 89, 109—11, 16, 17, 26, 30, 35, 39, 44, 60, 67).

ROŞIORII DE VEDE. Ş.m. Tudor Vladimirescu. Cl. VIII. Toacsen Livia (5099, 104, 06, 45, 49, 52, 65, 93, 95, 200). Cl. X. Diaconu Venera (5073, 74, 99, 100, 03, 05, 08, 18—20, 22, 25). Cl. XI. Boia Dan (5067—74, 79, 80, 86, 89, 96, 99, 100, 03, 04, 07).

ROZNOV. Ş.m. Cl. VI. Simion Violeta (E: 1775, 77—79, 87, 88, 90).

RÎMNICU SĂRAT. Ş.m. 1. Cl. VIII. Horduna Luminiţa (E: 1775, 77—80, 93, 806, 09, 10, 13, 15), Popa Dumitru (E: 1775, 77—80, 97, 806, 07, 09, 10). Cl. IX. Manolache Ion (5087, 96, 5110, 12, 16, 39, 49, 50, 67, 74, 80), Tănăsescu Horaţiu (5070, 96, 112, 18, 41, 45, 49, 67). Ş.m. 2. Cl. VIII. Diaconescu Emil (E: 1779, 86, 802, 04—09, 5193).

RÎMNICUL VÎLCEA. Ş.m. Vasile Roaită, Cl. VIII. Droaşcă Bogdan (E: 1770, 72, 75, 79, 80, 86—90, 5041, 99, 145), Marinov Cornel (E: 1801—11, 14). Cl. X. Neghina Adriana (5067, 68—70, 73, 74, 80, 84, 86, 96, 100, 03, 05, 07). Ş.m. N. Bălcescu. Cl. VIII. Tigveanu Ion (E: 1767, 71, 73, 74, 90, 92, 95, 98, 5033, 41). Cl. X. Solea Marcel (5067, 69, 80, 96, 109, 10, 15, 16, 26, 30, 31, 35, 39, 44, 61, 75, 80), Tănase Ilie (5024, 27, 32, 35, 80, 96, 109, 10, 15, 16, 26, 35, 39).

RINGHILEŞTI. Şc. de 8 ani. Cl. VII. Amînov Florea (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 11).

RUPEA. Ş.m. Cl. VIII. Diaconescu Nicolae (E: 1786—93, 95, 98, 99, 801—05; 5021, 23, 25, 28, 29, 41, 49, 73, 99, 107, 10, 16, 18, 20, 29, 44, 45, 49, 52). Cl. IX. Şchiopu Viorica (5110, 12, 16, 39, 44, 60, 67, 75, 86, 88). Cl. XI. Lazea Ioan (5067—72, 79, 80, 87, 89, 94, 96, 98).

SALONTA. Cl. VI. Rus Ştefan (E: 1775, 78, 79, 802, 03, 06, 07, 09, 14—16, 18). Ş.m. Arany Janos. Cl. VIII. Aristan Florea (E: 1775, 77—80, 802, 03, 06, 07, 09), Ban Aurelia (E: 1777, 79, 88, 90, 802, 03, 06, 07, 09, 15), Fried Petru (E: 1780, 98, 801, 03, 04, 07—10, 14, 15), Kovacs Margit (MFL: 757—61), Salyom Aniko (MFL: 757—61). Cl. IX. Balogh Erszebet (MFL: 807, 09,

10, 15, 17, 18), Illyes Ilona (MFL: 752, 93, 95, 96, 807, 09, 10, 15, 17, 18). Cl. X. David Floarea (5032, 54, 80, 82, 84, 110, 15, 16, 29, 35, 39, 69), Farkas Emilia (MFL: 807—09, 11, 12, 16—18, 20).

SASCUT SAT. **Absolvent Băluță Gheorghe** (5084, 93, 109—17, 26, 28—30, 39—42, 44, 48, 57—62, 67—70, 75, 81, 83, 86—88, 90, 91).

SATU MARE. **Ş.m. Mihail Eminescu.** Cl. VIII. Gătină Vasile (E: 1775, 79, 80, 90, 801—04, 06—08, 10). Cl. X. Aniţaş Lucian (5067, 69, 72, 80. 110, 15, 16, 39, 60, 75), Litan Ioan (5073, 74, 99, 100, 03, 05, 18—20, 23, 25, 53), Pop Mircea (5069, 80, 99, 100, 10, 15, 16, 18—25, 35, 39, 60, 75, 80), Racolţea Gheorghe (5073, 74, 103, 18, 19—23, 25, 43, 63), Timoc Ion (5073, 74, 99, 100, 03, 18—21, 25). **Ş.m. Kölczei Ferencz.** Cl. VIII. Agardi Illes (MFL: 762, 47, 94, 816—18), Erdős Katalin (MFL: 753, 94, 816—18).

SĂCELE (Braşov). **Ş.m. serală.** Cl. VIII. Bulai Mihai (E: 1772, 90, 95, 802—04, 06—08, 11, 14, 49, 95, 118, 20, 21, 52, 92, 95).

SĂCĂDAT. **Şc. de 7 ani.** Cl. VI. Bonta Aurelia (E: 1765, 67, 69, 71—73, 75, 78, 79), Urs Teodor (E: 1779, 90, 800—03, 06).

SĂLIŞTE. **Ş.m.m.** Cl. VIII. Carabulea Ilie (E: 1775, 76, 79, 82, 88, 90, 800—03, 06, 08), Cojocaru Dan (E: 1776, 88, 92, 800, 02, 06, 08), Matei Ioan (E: 1775, 77, 79, 80, 90, 802, 03, 06—10), Popa Alexandru (E: 1776, 79, 82, 86, 88, 90, 800, 02, 06, 08), Roşca Liviu (E: 1775, 77, 79, 80, 90, 91, 802, 06—09, 15).

SĂVENI. **Ş.m.** Cl. VII. Zoller Aron (E: 1775, 76, 78—80, 86, 88, 95, 98, 800—09, 11). Cl. VIII. Bucher Dumitru (E: 1775, 79, 90, 96, 806, 07, 09—11), Ciubotaru Natan (E: 1780, 82, 83, 93, 809, 10, 12—15), Mălăiescu Gabriel (E: 1775, 79, 80, 807, 09—14). Cl. X. Buruiană Constantin (5103, 15, 16, 18—22, 25, 35), Grişaru Iosif (5022, 56, 100, 03, 18—22, 25, 49, 50, 52), **Mănţăluţă Maria** (5022, 25, 33, 67, 69, 73, 74, 96, 99, 100, 03, 05, 06—10, 13, 15, 16, 18—25, 35, 39, 43, 49, 50, 69, 202), Mihalache Vasile (5069, 72, 73, 80, 89, 99, 100, 03, 07, 09, 10, 12, 15, 16, 18—25, 35, 39, 43, 45), Onofrei Mihai (5022, 51, 103, 09—11, 15—22, 25, 35, 39, 41, 49, 50, 52—54), Sănduc Medeea (5072—74, 99, 100, 03, 05, 10, 12, 15, 16, 18—23, 25, 30, 35, 39, 49, 50, 53, 54, 59, 60, 63, 69, 70, 80, 202). Cl. XI. Enache Ion (5067, 69, 70—72, 86, 87, 89, 95, 96, 110, 13, 15, 16, 35, 39, 41, 44, 57—62, 67, 73, 80, 85, 86, 202), **Onu Vasile** (5067—74, 80, 87, 89, 92, 99, 100, 03, 05, 07—09, 11—26, 29, 35, 39, 43, 45, 50, 52—55, 58, 60, 63, 93), **Zoller David** (5067—72, 80, 86, 89, 92, 96, 97, 109—17, 26, 29, 35, 39, 41, 44, 46, 48, 56—62, 67—69, 75).

SEBEŞ. **Ş.m.** Cl. VIII. Bleric Petru (E: 1775, 77, 79, 80, 802, 03, 06—10). Cl. X. Voian Ştefan (5073, 100, 03, 05, 18—20, 22, 25, 43, 55).

SF. GHEORGHE. Cl. VI. Szasz György (MFL: 757—59, 62—67).

SIBIU. **Ş.m. 1.** Cl. VI. Biţu Radu (E: 1783, 90, 91, 93, 800, 01, 03—05), Moga Monica (E: 1775, 76, 78, 800—06), Radu Marioara (E: 1792, 95, 800, 02, 03, 05), Scurtu Florin (E: 1778, 90, 93, 96, 800—04). **Ş.m. 5.** Atănăsoaie Elena (E: 1775, 78, 801—08), Cişmaru Mioara (E: 1775, 78, 801—08), Cojocaru Elena (E: 1775, 79, 801—09). **Ş.m. 9.** Cl. V. Munteanu Lucian (E: 1775, 76, 79, 98, 800, 02—04). Cl. VI. Trifan Cornel (E: 1778, 90, 91, 99, 802—04). Cl. VII. Constantinescu Mihaela (E: 1775, 78—91, 99, 801, 02, 06, 07, 15), Olaru Liliana (E: 1775, 77—79, 801—08), Potîrniche Irina (E: 1765, 67, 75, 77—79, 90, 801—03), Pop Rodica (E: 1775, 78, 79, 90, 801—06), Pricop Sorin (E: 1776, 88, 801, 03, 04, 06—08, 10), Suhastru Ileana (E: 1775, 78, 79, 90, 91, 99, 801, 02, 06, 07), Sigmireanu Mihaela (E: 1775, 77—79, 90, 98, 99), Voinea Alexandru (E: 1779, 801, 03—06, 08, 10, 11, 15). **Şc. elem. nr. 15.** Cl. V. Bucur Dănuţ (E: 1775, 79, 90, 98, 802, 06, 08). Cl. VII. Băluitescu Carmen (E: 1778, 79, 87, 88, 89, 802, 03, 06, 08), Bogdan Elena (E: 1775, 77, 79, 808, 10), Costin Laura (E: 1779, 87—90, 802, 03, 06, 08, 11—13), Drăgoi Mircea (E: 1787, 88, 90, 803, 08), Duca Doina (E: 1775, 77—79, 93, 98), Florescu Mioara (E: 1779, 87, 89, 90, 802, 03, 06, 08, 10), Manu Margareta (E: 1779, 87—90, 802, 03, 06, 08, 11—13), Popa Gheorghe (E: 1790, 96, 800, 02, 03), Răducu Ion (E: 1778, 87—89, 802, 03, 06, 08), Radu Angela (E: 1778, 87—89, 802, 03, 06, 08, 12, 13), Rosenfeld Tiberiu (E: 1778, 88, 89, 802, 03, 06, 08). **Ş.m. 1.** Cl. VI. Lesiacu Dan (E: 1775—77, 79, 803). Cl. VIII. Balomirii Adrian (E: 1775, 77, 79, 90, 802, 06—08, 10, 11), Ciuceanu Adrian (E: 1775, 77, 79, 90, 802, 06—08, 10, 11). Cl. X. Păcuraru Iuliu (5067—71, 80, 82, 84, 86, 87, 89, 96, 109, 10, 15, 16, 39, 41). Cl. XI. Scurtu Ionel (5078, 83, 87, 93,

98, 113, 35, 39, 44, 49, 70, 91, 202). Ş.m. 2. Cl. VIII. Dăncilă Gheorghe (E: 1775, 79, 80, 90, 802, 03, 06—09). Cl. X. Gherban Doru (5067—70, 72—74, 80—82, 84, 86, 87, 89, 95, 96, 99—101, 03, 04, 07—10, 15, 16, 18—22, 25, 35, 55, 63). Cl. XI. Gladcă Eugen (5068—70, 80, 83, 89, 92, 96, 111, 15—17). Ş.m. 3. Cl. VIII. Bucur Liliana (E: 1775, 79—81, 85, 90, 99, 801, 07, 09, 13, 5099, 180), Boac Antoaneta (E: 1770, 801—03, 05—10, 15, 5041) Dinulescu Aurelian (E: 1774, 78, 80—82, 87, 92—95), Dobrotă Marilena (E: 1796, 98, 802, 03, 06—09, 15, 5107), Gîlea Doina (E: 1780, 90—93, 95, 98, 99, 800, 02, 03), Holanda Doina (E: 1774, 85, 87, 95, 96, 801—05, 07, 08, 5089, 149), Mazilescu Gabriela (E: 1779, 80, 90, 91, 93, 98, 801—03, 06—09, 11, 13), Munteanu Rodica (E: 1791, 98, 901—03, 06—14), Moldovan Rodica (E: 1796, 98, 802, 03, 06—09, 15, 5107), Olşeszky Viviana (E: 1779, 80, 90, 802, 03, 06—08, 11), Popescu Adriana (E: 1790, 91, 99, 801—03, 06—11), Popescu Doina (E: 1778, 79, 85, 87, 90, 802, 03, 06—08), Sonici Rodica (E: 1774, 78, 79, 90, 802, 03, 06). Cl. IX. Găvozdea Ana (5025, 34, 35, 41, 45, 86, 110, 16, 39). Cl. X. Costescu Mariana (5023, 68, 72—74, 81, 83, 84, 86, 100, 03, 03, 08, 09, 15, 18, 19, 20, 22, 25, 5154, 60, 202), Mihucz Janos (MFL: 783, 87, 809, 16, 17), Szabo Cecilia (5110, 15, 16, 19, 63, 202). **Şc. tehnică de pro'ectări.** Andrei Maria (5069, 70, 72, 79, 80, 83, 89, 96, 98, 109—17, 35, 36, 39, 40, 44, 48, 57—62, 67, 70, 75). **Şc. superioară N. Bălcescu.** Burtan Gheorghe (5110, 11, 17, 21, 31, 39, 49, 57, 59, 60, 62, 67, 75, 89), **Cojocaru Ion** (5015, 18, 20, 22, 24—29, 31, 32, 39, 49, 51—53, 59, 60, 67—72, 74, 77, 78, 80, 83, 84, 86, 89, 90, 96, 98, 103, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22).

Absolventă Bucur Mariana (5067—72, 79, 80, 89, 94, 96, 109—17, 35, 39, 41, 49, 57—62, 67—69, 75, 80, 81, 88, 202).

SIGHET. **S.m. 1.** Cl. VIII. Marierovici Iacob (E: 1775—80, 82, 5067—70, 72, 86, 89). Cl. IX. Iacobovici Maier (5067, 70, 86, 89, 96, 110, 12, 15, 16, 29, 39, 44, 49), Moldovan Constantin (5067, 68, 71, 110, 12, 16, 60, 67, 144). Cl. X. Anton Rodica (5067, 69, 70, 89, 109, 15, 35, 60, 67, 70). Cl. XI. Elek Ana (5067—72, 79, 82, 83, 86, 89, 109, 10, 11), **Smicală** Ion (5067, 68, 69, 70—74, 79, 80, 82, 93, 96, 99, 100, 03, 05, 07, 10—12, 15—19, 21, 23—25, 39, 41, 44, 49, 50, 52—55).

SIGHIŞOARA. **Şc. de 8 ani nr. 1.** Cl. VII. Antonescu Adriana (E: 1778, 79, 90, 802, 03, 06—11), Dobre Valer (E: 1774, 78, 79, 90, 802, 03, 06—09), Kovacs Adalbert (E: 1775, 78, 79, 90, 802, 03, 06—09), Olteanu Livia (E: 1775, 80, 90, 802, 03, 06—09), Piroş Ioan (E: 1775, 90, 802, 03, 06—09, 11), Roşca Şerban (E: 1775, 90, 802, 03, 06—09, 11), Szabo Gheorghe (E: 1775, 78—80, 90, 802, 03, 06—10). **S.m. 1.** Cl. VIII. Iliuţ Rodica (E: 1769, 72, 75, 79, 802—06, 08, 10, 5107). Cl. IX. Oros Octavian (5099, 107, 18, 20, 21, 23, 34, 45, 49, 50, 54, 55, 65, 93). Cl. X. **Rus Petru** (5074, 96, 103, 07, 05, 15, 18, 19, 61, 70), Urdea Viorel (5067—69, 72, 73, 96, 109, 10, 13, 15, 16, 18—23, 25, 35, 39, 41, 57—64, 67, 70, 75, 80, 93, 95, 202), **Vonica Octavian** (5067, 69, 70, 72—74, 96, 99—103, 05, 07—10, 15, 16, 18—25, 34, 39, 43, 45, 49, 50, 53—55, 57—64, 66, 70, 80, 93, 95, 98, 200, 02). Cl. XI. Ajtai Maria (5067, 112, 18—21, 30, 50, 54, 64), Bojan Dan (5073, 74, 99, 100, 01, 03, 05, 08, 18, 19, 20—25). **S.m. 2.** Cl. X. Artz Dorotheea (5055, 69, 70, 72, 86, 95, 109, 10, 16, 39), Drechsler Daniel (5024, 25, 31, 54, 59, 70, 72, 84, 86, 95, 109, 10, 15, 16, 39), Paskewitz Dorit (5069, 70, 86, 93, 95, 109, 10, 13, 15, 16), Szilagyi A. (5069, 70, 72, 95, 109, 10, 13, 16, 35, 39), Weiszkopf Dagmar (5069, 70, 72, 86, 95, 110, 13, 15, 16, 39), Zimmermann Brigitte (5055, 69, 70, 72, 86, 93, 95, 109, 10, 15, 16, 39).

SINAIA. **S.m.** Cl. VII. Marinică Lucian (E: 1775, 78, 802, 03, 06, 06).

SLATINA. **Şc. elem. „23 August".** Cl. VII. Buicescu Radu (E: 1780, 86, 802, 06—10, 12).

S.m. Tudor Vladimirescu. Cl. VIII. Diaconescu Radu (E: 1780, 90, 95, 801—03, 06, 11, 12, 14). Cl. IX. Ionescu Mihai (5099, 104, 07, 18, 20, 21, 39, 45, 49, 64, 93, 95, 200). Cl. X. Oanţă Sima (5073, 74, 99, 100, 03, 07, 18—21, 24, 25, 43, 55, 52, 63, 64, 65, 93, 200).

SLĂNIC. S.m.m. Cl. IX. Dragu Cornel (5073, 99, 102, 03, 18, 20, 21, 23, 34, 50, 52, 53, 93, 95, 200), Salomeia Mugurel (5073, 102, 03, 18, 20, 21, 23, 34, 50, 52, 53, 93, 95, 200). Cl. XI. Constantinoiu Nicolae (5020, 27, 35, 51, 54, 67—70, 72, 80, 89, 96, 110, 11, 13, 14, 16, 17, 35, 39, 41).

SIRET. S.m.m. Cl. X. Airinei Anton (5069, 72, 80, 96, 109, 15, 44, 57, 75, 80), Cilirvici Doina (5068, 72, 89, 157, 59, 61, 69, 75, 80, 88), Panzer Nori (5080, 96, 109, 13, 15, 16, 44, 80, 88).

SINNICOLAU. S.m. Cl. VII. Finiss Elisabeta (E: 1775, 77—79, 802, 03, 06, 07, 09, 70), Jeanu Ionel (E: 1777, 79, 80, 98, 802, 06, 07, 09, 118, 20, 45, 52).

ŞTEFĂNEŞTI-Argeş. Şc. prof. ucenici. An. II. Oprea Victor (E: 1801—11, 14, 5067, 70, 96, 160, 70, 73, 93).

STREHAIA. S.m. Cl. IX. Mîndreanu Eugen (5014, 99, 118, 20, 45, 49, 52).

SUCEAVA. Şc. m. Ştefan cel Mare. Cl. VIII. Kostrakievici Sorin (E: 1775, 78—80, 800, 07, 09, 104, 07, 45, 93, 95). Cl. IX. Coifman Hardy (5069, 70, 74, 103, 09, 10, 15, 16, 19, 22, 35, 39, 41, 60, 63, 67).

TIMIŞOARA. S.m. 1. Cl. VII. Gheorghiu Doina Rodica (E: 1778—80, 93, 99, 807, 09—11, 14), Peniţa Doina (E: 1775, 78, 79, 90, 802, 03, 06, 07, 09). Cl. X. Andru Dorina (5067, 69, 70, 73, 74, 86, 96, 99, 100, 02, 03, 05—08, 10, 16, 18—25, 35, 43, 50, 52—55, 60, 63—65, 67, 95, 99, 200, 02), Balogh Pal (MFL: 803, 09, 16—20), Ioan Catalina (5069, 73, 74, 110, 16—21, 25, 30, 35, 49, 52, 60, 63, 65, 67, 73, 93, 95, 201, 02), Falniţă Eugen (5073, 74, 100, 03, 05, 08, 18—22, 25, 43, 45), Rujan Octavian (5022, 28, 33, 67, 69, 70, 73, 74, 80, 84, 86, 89, 96, 99, 100, 03, 05, 08—10, 16, 18—26, 30, 39, 43, 49, 50, 52—54, 63, 65, 67, 95, 98, 200, 02). Cl. XI. Munteanu Dan (5073, 74, 100, 01, 03, 18, 19, 20, 21, 25, 43, 49, 53, 54, 55). S.m. 2. Cl. VII. Teleagă Petru (E: 1793, 95, 801—11, 13, 14). Cl. VIII. Rusu Radu Simion (R: 1775, 78, 80, 99, 800, 01—04, 06—08, 11).

S.m. 5. Cl. X. Eibenschütz Robert (5069, 73, 74, 99, 103, 05, 08, 10, 15—21, 23, 35, 39, 45, 49, 63). Şc. muzică şi arte plastice. Cl. IX. Penţia Mircea (5073, 99, 103, 04, 07, 18, 20, 45, 93). Inst. Pedag. 5 ani. Student Pisat Ana (5068, 73, 74, 79, 110, 11, 16, 17, 41, 58, 60, 61, 65, 67, 99).

TIRGU MUREŞ. S.m. Bolyai Farkas. Cl. VIII. Andras Iozef (MFL: 746, 47, 52, 65, 67), Balasy Erika (MFL: 757, 58, 60, 61, 62), Baratosi Piroska (MFL: 746, 47, 51, 57, 58, 60, 61), Bajko Margit (MFL: 733, 46, 58, 60, 61), Boros Margit (MFL: 746, 48, 49, 52, 56—59, 60, 61), Bőjthe Edith (MFL: 757, 58, 59, 61, 65, 66, 67), Branisch György (MFL: 746—49, 57—59), Berzeviczy Agnes (MFL: 733, 34, 57, 59, 61), Farkas Zsuzsana (MFL: 757—62), Farkas Gyula (MFL: 757, 58, 60, 61, 63, 65), Fekei Lajos (MFL: 746, 47, 53, 54, 57, 59, 63—66), Gall Iulia (MFL: 733, 36, 46, 47, 57, 58, 60, 61), Grosz Jozesf (MFL: 757, 58, 60, 61, 63, 65), Gyenge Attila (MFL: 746—51, 58, 65, 67), Herman Judith (MFL: 757 — 62), Hodor Janos (MFL: 746, 47, 51, 57, 58, 60, 61), Kerekes Margit (MFL: 746, 48, 51, 58—60, 65—67), Kerestesi Erzebet (MFL: 747, 48, 57, 58, 61), Kerekes Karoly (MFL: 733, 40, 57—60), Kutasi Ida (MFL: 715, 18, 46, 49, 58, 60), Lako Hajnal (MFL: 733, 52, 58, 60, 61), Lazslo Erzsebet (MFL: 747, 48, 53, 57, 58, 61), Lörinczi Marietta (MFL: 757—62), Muth Katalin (MFL: 746, 48, 58, 61, 61, 63), Nemes Peter (MFL: 746—48, 58, 60, 62, 65), Nistor Mara (MFL: 733, 35, 46, 58—61), Palfy Erzebet (MFL: 730, 47, 92, 57, 58, 60), Racz Zsuzsana (MFL: 746, 57, 58, 60), Salamon Judit (MFL: 746, 47, 49, 52, 58,60), Szabo Erzsebet (MFL: 746—48, 52, 57—61), Szekely Zsuzsana (MFL: 757—62), Szöllösi Erzsbet (MFL: 696, 757 — 59, 61), Thuty Olga (MFL: 746, 47, 52, 58, 60, 61), Varadi Ibolya (MFL: 746, 51, 52, 58, 61), Zsigmond Magda (MFL: 757—62). Cl. X. Dalyai Pal (MFL: 807—14, 16—20). Cl. XI. Berszan Lajos (MFL: 807, 09, 12, 15, 17), Elek Zoltan (MFL: 792, 804—06, 16, 17, 20), Szabo Jenő (MFL: 807—12, 15—17, 19, 20), Szabo Miklos (MFL: 792, 804, 06, 09, 12, 16), Szasz Gyorgy (MFL: 767, 74, 809, 12, 15, 17). S.m. Alex. Papiu Ilarion. Cl. VIII. Marmor Gheorghe (E: 1775, 77—80, 90, 94, 95, 97, 800, 5145), Stratan Valentin (E: 1775—77, 79—81, 90, 91, 99, 800). S.m. 4. Cl. VIII. Ferencz Kalman (MFL: 746, 55, 66, 67, 800). Cl. X. Mathe Lyszlo (MFL: 807—09, 11, 17). Cl. XI. Orban Magda (MFL: 807, 09, 12, 16, 17). Institutul Pedagogic. Anul I. Buczi Lajos (MFL: 777, 84, 93, 98, 809, 14).

TECUCI. S.m. 2. Cl. VII. Gnatenko Emil (E: 1775, 78, 79, 86, 88, 90, 802, 03, 06—08, 10, 11), Hîncu Mihaela (E: 1775, 78, 79, 90, 802, 06, 07, 08, 11, 15), Mocanu Eugenia (E: 1775, 78, 79, 90, 802, 06, 07, 08, 09, 11, 15), Seuleanu Sibila (E: 1775, 77, 78, 86, 88, 98, 802, 03, 06, 08, 10). Cl. VIII. Aizic Alexandru (E: 1775, 77—79, 90, 91, 801—03, 06—08, 11), Ciobotaru Marioara (E: 1775, 93, 95, 98, 800, 02, 03, 05, 06, 07, 09, 10, 11, 13), Condache Maria (E: 1802, 03, 05—07, 09—11), Diaconu Eugen (E: 1802, 03, 05—07, 09—11), Dumitru Georgeta (E: 1775, 93, 95, 98, 800, 02, 03, 05—07, 09—11, 13), Filimon Săndulescu (E: 1775, 79, 93, 95, 99, 800, 02, 03, 06, 09), Popa Maria (E: 1802, 03, 05—08, 09—11), Radovici Mihai (E: 1775, 78—80, 90, 802, 03, 06—11), Tudor Florin (E: 1775, 79, 80, 90, 802, 03, 06—11).

TIRGU JIU. Şc. elem. nr. 4. Cl. VII. Bănică Matian (E: 1776, 77, 90, 91, 95, 801, 02, 07, 09, 11, 14). S.m. 1. Cl. X. Onca Romulus (5067—69, 73, 74, 96, 100, 03, 05, 10, 13, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 39, 45). S.m. 2. Cl. X. Păsăreanu Mihai (5070, 124, 29, 43, 50, 52—55, 57, 60, 67, 69, 70, 73, 88, 95).

TIRGOVIŞTE. S.m. 1. Cl. X. Brînzaru Irinel (5067—70, 80, 81, 86, 89, 110, 12, 15, 16, 39). S.m. 2. Cl. VIII. Bădincea Viorel (E: 1780, 96, 800, 02, 03, 05, 07, 08, 09—12, 14). S.m. 3. Cl. VIII. Ciuciulete Gheorghe (E: 1775, 78—80, 90, 802, 03, 06, 07, 09—11), Drosino Emanuel (E: 1775, 77—80, 90, 802, 03, 06, 07, 08). Cl. XI. Frîncu Zaharia (4978—80, 97, 5005, 17, 18, 22, 29, 33, 49, 56, 59, 60, 64, 67—74, 79, 80, 85, 94, 96, 103, 10, 11, 12, 16—22, 24, 25, 28, 35, 39, 41, 42, 48, 94).

TIRNAVENI. S.m. Cl. XI. Costea Viorel (4163, 65, 5073, 74, 118—20, 25, 96, 97).

TOPOLOVENI. S.m. Cl. X. Bădulescu Grigore (5067, 69, 70, 72, 73, 80, 96, 107, 22, 23, 24, 25, 26, 39, 41, 44).

TRUSEŞTI. S.m.m. Cl. VIII. Mîrza Mihai (E: 1775, 79, 80, 83, 90, 92, 93, 98, 802, 07, 09), Noroc Constantin (E: 1775, 79, 80, 83, 90, 92, 93, 98, 802, 07, 09), Seremet Elena (E: 1775, 79, 80, 83, 90, 92, 93, 802, 07, 09, 13), Turculeţ Demostene (E: 1775, 79, 80, 83, 86, 88, 90, 92, 93, 98, 802, 06, 07, 5073, 99, 107, 18, 20, 45, 52), Vieru Mihai (E: 1780, 83, 86—90, 92, 93, 802, 07, 09, 11, 13, 5099, 107, 18, 20, 45, 98), Zvîc Carmen Livia (E: 1775, 79, 80, 83, 86—90, 92, 93, 98, 802, 06, 07, 5099, 118, 20, 45, 93). Cl. IX. Melinte Dumitru (5073, 104, 18, 20, 23, 45, 50, 52, 53, 55, 93, 200). Cl. X. Iacob Aodirca (5073, 99, 100, 03, 07, 19, 20, 25, 50, 52, 96), Zotta Alexandru (5073, 100, 03, 07, 18—20, 25, 45, 52, 53, 96).

TULCEA. S.m. 1. Cl. X. Iurov Gheorghe (5068—70, 72—74, 80, 84, 86, 96, 99, 100, 03, 04, 08—10, 12, 13, 15, 16, 18—22, 25, 26, 29, 31, 35, 39, 41, 44, 46).

TURDA. S.m. 1. Cl. X. Apostol Adriana (5067, 72, 83, 96, 110, 15, 16, 30, 35, 39), Filip Liana (5070, 82, 8110, 15, 16, 35, 39, 60, 67, 70), Grosu Octavian (5073, 74, 103, 05, 07, 19, 20, 22, 25, 43, 63, 65), Kovny Magdalena (5073, 100, 03, 07, 18—20, 25, 63, 65, 95), Marian Alexandru (5110, 11, 15—17, 21, 30, 39, 60, 70), Păcuraru Liana (5067, 69, 70, 73, 74, 80, 83, 89, 96, 99, 100, 01, 03, 07, 09, 10, 13, 15, 16, 18—25, 30, 34, 35, 39, 41, 43, 45, 50—55, 60, 67, 69, 93, 98), Poloţca Ovidiu (5067, 110—12, 16, 17, 39, 60, 67, 70), Ştefănuţ Traian (5110, 12, 15, 16, 17, 39, 57, 60, 67, 70). S.m. 2. Cl. X. Olariu Adriana (E: 1801—09, 11).

TURNU MĂGURELE. S.m. Unirea. Cl. X. Cojocaru Florian (5063, 70, 72—74, 86, 89, 96, 99, 100, 03, 05, 07, 08, 10, 12, 13, 16, 18—22, 25, 35, 41, 43—45), Cojocaru Sebastian (5967, 5017, 20, 24—29, 31—33, 35, 49, 51, 55, 67—70, 72, 83, 84, 86, 89, 90, 92, 109—12, 14, 16, 17, 28, 29, 35, 36, 39, 44), Tudor Valeriu (5067, 70, 86, 89, 109, 10, 15, 16, 35, 39, 44).

TURNU SEVERIN. S.m. 1. Cl. VIII. Popescu Eleodor (E: 1775, 77—80, 90, 951, 5099, 108, 16, 18, 20, 21, 45, 49, 52), Vulpescu Dan (E: 1775, 78—80, 801—03, 08, 09, 5035). Cl. IX. Isaru Elena (5067, 70, 79, 84, 87, 95, 100, 16, 41). Cl. X. Cergan Petre (5074, 100, 03, 05, 19, 21, 22, 25, 63, 98). S.m. 2. Cl. VII. Aldescu Anastasia (E: 1775, 78, 90, 93, 802—04, 07—09), Cornea Stăncuţa (E: 1775, 78, 86, 802—07, 09, 14), Dulănescu Doru (E: 1778, 86, 87, 93, 95, 802—04, 06, 07, 09, 14), Enache Elvire (E: 1779—90, 93, 802—04, 06, 08, 10, 11), Gioară Doina (E: 1775, 78, 93, 802—04, 06—08, 11, 14), Ismail Elena (E: 1775, 78, 86, 93, 802—07, 09, 14), Popa Marilena (E: 1775, 80, 93, 803, 04, 07, 10, 11, 12, 14), Trofin Angelica (E: 1775, 78, 802—04, 06—08, 11, 14), Cl. VIII. Andreescu Gheorghe (E: 1775, 79, 80, 90, 98, 801—04, 06, 07, 09), Burtea Maria (E: 1775, 77, 79, 80, 86, 802, 06, 07, 09, 5072, 73, 118, 65), Ciulpan Dora (E: 1783, 90, 93, 802, 03, 07, 08, 09, 11), Gheller Nicolae (E: 1775, 79, 98, 801—04, 06, 07, 09), Cogan Victor (E: 1775, 79, 98, 99, 801—04, 06, 07, 09), Mucioniu Grigore (E: 1775, 79, 90, 800, 02, 03, 06, 07, 09, 11, 14). Cl. IX. Boerescu Viorica (5070, 73, 96, 110, 16, 18, 22, 39, 41, 49, 60), Buturcă Lucia (5067, 70, 110, 16, 17, 20, 22, 39, 41, 49, 60, 70), Cucă Adriana (5067, 68, 70, 74, 96, 110, 16, 41, 48, 59, 60), Cîmpeanu Constantin (5070, 73, 110, 16, 18, 20, 22, 39, 60, 67), Epuran Ion (5070, 73, 96, 110, 16, 20, 22, 49, 60, 65, 67), Giurma Constantin (5070), 73, 110, 16, 20, 22, 39, 49, 60, 67), Gagea Angela (5067, 70, 72, 96, 110, 16, 18, 22, 39, 41, 49, 60), Gheorghiu Margareta (5064, 70, 73, 96, 5110, 16, 18, 39, 41, 59), Kraksner Constantin (5070, 72—74, 110, 16, 18, 20, 22, 39, 41, 60, 67), Luţiu Ecaterina (5067, 72, 96, 110, 16, 18, 39, 41, 49, 59, 60), Lădaru Mihai (5070, 72—74, 110, 16, 18, 20, 22, 39, 41, 49, 60, 65, 67), Săulescu Horia (5070, 73, 116, 18, 20, 22, 39, 41, 49, 60, 67), Sîrbu Alexandra (5073, 96, 110, 16, 18, 20, 22, 39, 49, 60), Tănase Ion (5072—74, 110, 12, 16, 18, 20, 22, 49, 60), Zaharia Eugenia (5067, 70, 72, 86, 96, 99, 110, 16, 18, 20, 39). Cl. X. Lungu Gica (5070, 72, 80, 84, 86, 113, 15, 16, 35, 60, 67), Liciu Eugen (5067, 73, 74, 80, 86, 96, 100, 03, 07, 08, 10, 12,

15, 16, 18—21, 23, 24, 25, 29, 49, 50, 52—54, 60, 63—65, 93, 95, 200). Pan Cristina (5070, 80, 82, 86, 89, 96, 111, 15, 16, 35, 37, 60), Popescu Rodica (5069, 70, 80, 82, 89, 115, 16, 35, 57, 60, 67), Vasilescu Mihai (5067, 70, 72, 73, 80, 89, 100, 09, 15, 16, 18, 19, 22, 25, 30, 35, 39, 44, 49, 60, 63, 64, 67, 98), Văcărescu Ion (5067, 70, 80, 89, 96, 100, 09, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 25—35, 39, 57, 67), Voica Lucian (5067, 70, 72, 74, 80, 86, 89, 100, 09, 10, 12, 15, 19, 25, 35, 57, 60, 67, 70). Cl. XI. Mocioiu Doru (4916, 17, 26, 35, 5030, 32, 49, 67—74, 79, 80, 89, 103, 09—22, 26, 35, 39, 44, 48, 56—65, 67, 68, 93, 202), Perţ Ion (5067—69, 80, 115—17, 35, 59, 60, 61), Zaharia Gheorghe (5067, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 79, 80, 86, 96, 99, 109, 10—13, 15—21, 25, 35, 39, 41, 49, 52, 57, 58, 59, 61, 62, 70, 75).

UNGHENI. S.m. de 8 ani. Cl. VII. (E: 1775, 77, 79, 801—06, 08, 10, 11).

URZICENI. S.m.m. Cl. VI. Georgescu Mihaela (E: 1775, 77—79, 91, 95, 806). Cl. VIII. Barnu Aurelia (R: 1775, 77—80, 801—04, 06—08), Ion Mihai (E: 1775, 77—80, 95, 801—06).

VATRA DORNEI. S.m.m. Cl. XI. Alinnei Dumitru (1067, 68, 69, 72, 110, 11, 14—17, 35, 39, 44, 48), Blechner Norelli (5069, 110, 11, 15—17, 48, 50, 60, 61, 67).

VASLUI. Şc. de 8 ani nr. 2. Cl. VII. Radu Daniela (E: 1775, 801—04, 06, 08). S.m. 1. Cl. IX. Coreotii Ion (5104, 10, 12, 16, 18, 20, 21, 23, 39, 41, 45, 49, 50, 53, 54, 55, 57, 60, 67, 75, 93, 95, 200). S.m. 2. Cl. X. Grosu Ion (5069, 109, 15, 16, 26, 31, 35, 41, 44, 49, 60).

VĂLENII DE MUNTE. S.m. Cl. VIII. Preda Victoria (E: 1777—80, 90, 800, 03, 06, 07, 09).

VEDEA. S.m. Cl. IX. Godeanu Dumitru (5067, 99, 102, 03, 10, 16, 18, 39, 49, 50, 53—55, 60, 67, 80).

VIDELE. S.m. Cl. VIII. Dumitrescu Traian (E: 1776, 78—80, 82, 85, 90, 92, 93, 95, 97, 99).

VIDRA. S.m. Cl. VIII. Harabagiu Ion (E: 1779, 90, 93, 802, 03, 06—10, 15).

ZALĂU. S.m. Ady Endre. Cl. VIII. Luka Peter (MFL: 746, 47, 49, 60, 65, 67). Cl. X. Gajzago Maria (MFL: 807—11, 16—18, 21). Cl. XI. Janko Sandor (MFL: 807, 09—11, 15, 17, 18, 20), Mate Karoly (MFL: 792, 93, 96, 97, 807, 09). Grupul şcolar Simion Bărnuţiu. Cl. V. Fülöp György (757, 58, 62—65, 67), Szücs Ibolya (MFL: E: 744, 45, 57, 58, 63), Szücs Sandor (MFL, E: 733, 47, 57, 64, 67), Wokalek Barna (MFL, E: 729, 32, 44, 45, 58, 64, 65). Cl. VI. Banto Ibolya (MFL, E: 747, 53, 57, 64, 67), Czinege Erzsebet (MFL, E: 744, 47, 63, 64, 65, 67), Czirjak Illona (MFL, E: 757, 58, 63, 64, 65), Fogarassy Edit (MFL, E: 746, 47, 53, 54, 57, 58, 63, 64, 65, 67), Marton Eva (MFL, E: 747, 49, 53, 57, 58, 63, 64, 65, 67). Cl. VII. Bartus Erzsebet (MFL, E: 699, 703, 57, 58, 60, 63, 65. 67), Birtalan Janos (MFL, E: 699, 757, 63, 65, 67), Demeter Miklos (MFL, E: 744, 45, 53, 63, 65). Egri Győnhyi (MFL, E: 716, 58, 63, 65, 67), MFL: Forro Katalin (MFL: 746, 47, 57, 60, 63, 65, 67), Haraszy Endre (MFL: 746, 47, 49, 54, 58, 60, 63, 64), Kovacs Ilona (MFL: 757, 58, 60, 63, 65), Mate Eva (MFL: 703, 58, 60, 65, 67), Mura Anna (MFL: 757, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67), Mezei Marta (MFL: 703, 699, 747, 58, 63), Major Ilona (MFL: 746, 47, 57, 58, 60, 63, 65), Palotas Valeria (MFL: 716, 58, 63, 65, 67), Reszler Tibor (758, 60, 63, 65, 67), Selek Erzsebet (MFL: 703, 58, 60, 63, 65, 67), Seker Istvan (MFL: 747, 53, 58, 60, 63, 65).

ZETEA. S.m.m. Cl. VIII. Balasz Sandor (MFL: 746, 55, 65, 66, 67, 817, 18), Brrtalan Erzsebet (MFL: 765, 66, 67, 817, 18), Illyes Ferenc (MFL: 748, 65, 66, 67, 817, 818), Kalapacs Tibor (MFL: 748, 65, 66, 67, 817, 18), Kovacs Imre (MFL: 765, 66, 67, 817, 18), Sandor Ilona (MFL: 765, 66, 67, 817, 18).

ZLATNA. S.m. Cl. X. Schirea Ioan (5021, 22, 56, 73, 74, 100, 04, 05, 18, 19, 20, 25).

*

Pînă la 15 iunie 1962 s-au evidenţiat ca rezolvitori de probleme propuse în ultimele trei numere apărute:

1. Constantinescu Marius clasa XI ş.m. 1 Ploieşti, 2. Puiu Mihai clasa XI Sinaia, 3. Lusztig Gheorghe, clasa XI ş.m. 5 Timişoara, 4. Vîlceanu Sabin student Bucureşti, 5. Dănciă Ivan clasa VIII ş.m. 3 Sibiu, 6. Zisu Tudor clasa X ş.m. 34 Bucureşti, 7. Vasiliu Dan clasa X ş.m. Lugoj, 8. Stern Toma clasa X ş.m. Timişoara, 9. Zegheanu Petre clasa IX Breaza, 10. Ursulescu Octavian clasa VIII ş.m 11 Bucureşti, 11. Vodă Viorel clasa X ş.m. 12 Bucureşti, 12. Z'su Ana clasa X ş.m. 34 Bucureşti, 13. Paidiu Ion clasa X ş.m. 15 Bucureşti, 14. Nicolau Petru clasa XI Cîmpulung Moldovenesc, 15. Tărăbuţă Mihai, clasa X ş.m. 1 Piteşti, 16. Paul Alexandru absolvent Dorohoi, 17. Circu Ion clasa XI Bistriţa, 18. Ionescu Marcel clasa IX ş.m. 3 Piteşti, 19. Dobriţă Gheorghe clasa XI Pătîrlagele, 20. Mărginanu Doru clasa X ş.m. 1 Piteşti, 21. Tănase Virgil, clasa XI Sinaia, 22. Andreescu Liviu clasa VIII ş.m 1 Bu-

zău, 23. Serachitopol Adrian clasa IX Sighișoara, 24. Horovitz Ossi clasa X Ocna Mureș, 25. Viorel Costea clasa X Orăștie, 26. Bejancu Aurel clasa X Novaci (Oltenia), 27. Galeozki Gheorghe (clasa X ș.m. 1 Lugoj), 28. Aisner Sergiu clasa X Ploiești, 29. Zăgreanu Marius clasa XI ș.m. 1 Năsăud, 30. Maftei Eugen clasa VIII ș.m. 1 Vaslui, 31. Cornea Dumitru, clasa X ș.m. 2 Tr. Severin, 32. Popovici Cornel, clasa VIII ș.m. 1 Lugoj, 33. Anghel Vasile clasa XI Mărășești, 34. Diaconescu Nicolae, clasa VIII ș.m. Rupea, 35. Anea Daniel clasa X Pucioasa, 36, Matei Gheorghe, clasa IX Pucioasa, 37. Drăgan Victor ș.m. 1 Aiud, 38. Popa Alexandru clasa X Pucioasa, 39. Boștenaru Livia clasa X Alexandria, 40. Ferențiu Militon clasa XI ș.m. 1 Arad, 41. Rabinovici Liviu clasa X ș.m. 2 Fălticeni, 42. Frankelfeld Georgian clasa XI ș.m. 2 București, 43. Filip Emilian clasa XI ș.m. 8 București, 44. Balaci Ion clasa IX ș.m. 1 Lugoj, 45. Tomescu Dumitru clasa XI ș.m. 1 Ploiești, 46. Vlase Aurelian clasa VIII Medgidia, 47. Cimpoieru Traian clasa X ș.m. 1 Lugoj, 43. Popa V. Ion absolvent Mihăiești (București). 49. Rimbu Revișoara, clasa X Pucioasa, 50. Jurca Ioan, clasa VIII ș.m. 1 Lugoj, 51. Grimberg Ilie clasa X ș.m. 7, Iași, 52. Dabo Dan clasa IX ș.m. 1 Lugoj, 53. Reghină Petre clasa XI ș.m. 1 Ploiești, 54. Galeriu Dan clasa VIII ș.m. 3 Sibiu, 55. Rusu Constantin absolvent Iași, 56. Popa Nicolae, clasa X ș.m. 1 Pitești, 57. Diaconescu C. Radu clasa XI ș.m. Pucioasa, 58. Mărculescu Dan, clasa X ș.m. 3 Huși, 59. Ghet Ion clasa XI Panciu, 60. Georgescu Cristian clasa X ș.m. 3 Ploiești, 61. Sandu Ion ș.m. 3 Pitești, 62. Andronescu Gheorghe clasa XI ș.m. 4 Ploiești, 63. Neacșu Viorel, clasa X ș.m. 1 Ploiești.

Pînă la 15 iunie 1962 s-au mai primit soluții bune la problemele propuse în ultimele trei numere apărute de la:

ALBA IULIA. Șc. m. „Horia, Cloșca și Crișan", cl. IX. Moldovan Dan (5134, 45, 50, 52—55, 64, 65, 93, 95, 99); Tulbure Dan (5116, 39, 49, 53, 75, 93, 95, 203, 24, 39).

ALEXANDRIA. S. m. „Alexandru I. Cuza" cl. X. Boștenaru Liviu (5067, 68, 73, 74, 99, 103, 108, 10, 15—20, 22, 23, 25, 26, 50, 52, 55, 60, 61, 63, 64, 67, 70, 89).

ANINA. S.m. cl. VIII. Petric Mircea (E: 1801—11, 14).

ARAD. S.m. Ion Slavici cl. XI. Ferențiu Militon (5067—72, 79, 80, 83, 84, 86, 87, 89, 93—98, 109—17, 26, 28—31, 35, 36, 39—42, 44, 48, 49). S.m. „Olga Bancic" cl. V. Achim Otilia (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 20, 26, 27), Ionescu Silvia (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 18, 20, 26, 36), Munteanu Viorica (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 18, 20, 26, 36), Dumitrescu Didina (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 18, 20, 26, 36), Trifu Valeria (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 18, 20, 26, 27), Petrișor Ioan (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 18, 20, 26, 27), Rusu Liliana (E: 1802, 03, 06, 11, 16, 18, 20, 26, 27).

AZUGA. S.m. serală cl. X. Gavrilă Constantin (5119, 21, 35, 44, 45, 52, 60, 65, 203, 38), Păcuraru Ilie (5118—21, 35, 44, 45, 49, 52, 63, 65, 93).

ADJUD. S.m. cl. VIII. Ceaușoglu Nicolae (E: 1793, 802, 03, 06, 08, 16, 20—22, 24, 29).

AGNITA. S.m. cl. X. Szilagy Alexandru (5115, 16, 18—20, 22, 25, 35, 43, 50, 63, 207).

AIUD. S.m. „Avram Iancu" cl. IX. Drăgan Victor (5112, 18, 20, 21, 23, 29, 39, 41, 44, 50, 53, 55, 60, 65, 67, 70, 73, 75, 80, 88, 93, 200, 12, 15, 17, 18, 24, 29, 36, 39, 42, 44), Furdac Florin (5110, 13, 16, 39, 41, 57, 60, 67, 69, 80), cl. XI. Popa Ioan (5110, 12. 13. 15. 23. 29. 41. 42. 48, 57—62, 67—70, 207—11, 24—26, 28, 36).

S.m. „Bethlen Gabor" anul II. Bazarath Sandor (MFL: 824, E: 768, 70, 73—75), Babos Miklos (MFL: 824, 71—73, 75), Balazs György (MFL: 824, E: 768, 70, 75), Csegöldi Miklos (MFL: 824, E: 768, 70—75), Denes Odon (MFL: 824, E: 733, 35, 70—73), Gyarmathy Ildico (MFL: 824, E: 768, 70, 72, 73, 76), Gödri Margit (MFL: 824, E: 768, 70, 73, 75), Hamar Judit (MFL: 824, E: 771—75), Hari Piroska (MFL: 824, E: 770—75), Kiss Istvan (MFL: 824, E: 746, 47, 49, 88, 70, 72, 75), Molnar Hona (MFL: 824, E: 771, 73—75, Szasz Olga (MFL: 824, E: 768, 71, Silagyi David (MFL: 809, 24, E: 757, 58, 60, 68, 70, 75), Törö Istvan (MFL): 770, 72, 73, 75), Vass Vilma (M.F.L.: 824, E: 770—75). Anul III. Bako Eva (MFL: 809, 24, E. 757, 58, 60, 70, 72—75), Csiki Ibolya (MFL: 824, E: 770, 73—75), Fazekas Ildico (MFL: 824, E: 746—70, 72, 73), Gal Piroska (MFL: 826, E: 770, 772—75), Köö György (MFL: 824, E: 770, 72—75), Kodok Ilona (MFL: 824, E: 770, 72—74), Lozsadi Izabella (MFL: 824, E: 770, 72—75), Pelele Ernesztina (MFL: 824, E: 770, 73—75), Peter Margit (MFL: 824, E: 770, 72—75), Simon Sarlota (MFL: 824, E: 770, 72—75), Süto Rozalia (MFL: 824, E: 770, 72—75), Szasz Istvan (MFL: 824, E: 770, 72—74), Szalontai Eva (MFL: 824, E: 768, 70, 73, 75), Szilagyi Erzsebest (MFL: 829, 24, E: 757, 59, 60, 70, 72—74), Somodi Katalin (MFL: 824, E: 733, 35,

70, 72—75), Tecsy Etel (MFL: 809, 24, E: 757, 59, 60, 70, 72—75). Anul IV. Aszolos Szasz (MFL: E: 746, 49, 68, 70, 73—75), Benedec Sren (MFL: 824, E: 824, E: 768, 70, 72—75), Daczo Ersebet (MFL: 809, 24, E: 757—59, 68, 71—75), Duray Ilona (MFL: 824, E: 768, 70—75), Drimus Gisella (MFL: 824, E: 768, 70, 73—75), Farkaş Eva (MFL: 824, E: 692, 768, 70, 73, 74), Fejer Magda (MFL: 824, E: 768, 70, 72—74).

BACĂU. Inst. ped. an. I. Aricov Rodica (5113, 30, 57—62, 67, 207, 09, 11), şc.m. 1, cl. X. Botezatu Liliana (5113, 19, 21, 22, 25, 63, 65, 69, 88, 91, 207, 08), Herescu Adrian (5115, 25, 39, 43, 207, 08, 10—13, 29, 36, 45, 46, 50, 52, 56, 57, 59—63, 67, 95), Simion Alexandru (5118—23, 25, 26, 43—46, 50—55, 63, 64, 69, 93, 207, 08, 12, 26, 24, 29, 40).

BABADAG. Şc. m. cl. X. Bălţoi Toader (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 26, 39, 40, 44, 46, 58—60, 67, 69, 70, 75, 89, 91, 202, 07, 08, 10, 20, 21, 24, 31, 32, 36), Laso Boris (5145, 49, 52, 57, 60, 63—65, 67, 69—71, 75, 76, 79, 80, 83, 91, 93, 95, 96, 98, 200, 02).

BAIA DE ARAMĂ. Şc.m. cl. IX. Crăciunescu Laurian (5117, 60, 67, 69, 70, 93, 208, 12, 38, 42), Guiciuc Constantin (5208, 24, 31, 44, 48, 50, 57, 59, 61, 81), cl. X. Umbreş Alexandru (5100, 60, 67, 76, 207, 08, 24, 31, 42, 46, 75).

BALŞ (Oltenia). Şc.m. cl. IX. Olteanu Maria (5110, 16, 18, 39, 41, 50, 52, 75, 208), Staicu Mihai (5110, 16, 18, 20, 23, 39, 41, 45, 52—55, 60, 64, 65, 67, 75, 95, 208, 12, 39, 44).

BÎRLAD. Şc. ped. anul IV. Toburică Ioan (5109, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 35, 36, 39, 44, 49, 50, 57, 60, 63, 67, 75, 76, 79, 83, 89, 95, 202), Complexul şcolar cl. IX. Armeanu Corneliu (5112, 13, 49, 57, 60, 64, 65, 67, 69, 75, 83, 206, 08, 17, 21, 23, 24, 31, 34, 39, 42, 44), Baidache Gavrilă (5136, 57, 60, 67, 69, 70, 75, 79, 80, 83, 88, 202, 06), cl. X. Danilor Teodorina (5207, 08, 10, 40, 49, 52, 53, 57, 59, 66, 70).

BISERICANI. şc. elem. cl. VII. M.F.L. 730, 63, 60, 69, 70, 76).

BISTRIŢA. şc.m. cl. VII. Deak Andreas M.F.L. 763—67, 76), cl. VIII. Cojocaru G. (1801—07, 09—11), Popescu Şerban (E: 1790, 802—07, 09, 10, 16, 24), cl. IX Procopovici Cristel (5110, 16, 18, 20, 21, 39, 44, 49, 50, 52—55, 64, 208, 42), cl. X Puşcaşu Anton (5109—18, 20, 21, 34, 54, 57, 60, 63, 207, 08, 10), cl. XI Circu Ion (5109—26, 30, 34, 35, 39, 42, 43, 48, 49, 50, 52—56, 57—67, 69, 71, 80, 81, 84, 86, 89, 93, 94, 96—99, 202).

BOCŞA (Banat), şc.m. cl. XI Pavel Ioan (5110, 14, 16, 17, 44, 60, 62, 207, 11).

BOTOŞANI. şc.m. 1 cl. VIII Dobrescu Alexandru (E: 1790, 95, 802—04, 06, 08, 09, 16, 22), Latu M. (E: 1802—10, 16, 22, 23, 26, 30, 31, 34—37, 40, 41), Leibovici Marica (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 16, 18, 36, 37), Kyghelman Adriana (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 16, 18, 36, 37), cl. X Puicas Zancu (5074, 119, 22, 25, 43, 63, 96, 207, 08, 10, 24, 45, 46), Wechreler Silvia (5074, 119, 22, 25, 43, 63, 96, 202, 07, 10, 24, 45, 46), şc.m. 2 cl. IX Chon Melania (5160, 67, 224, 31, 48, 56, 57, 59, 61, 62, 65), cl. X Rapaport Ioni (5226, 48, 57, 59, 60—62, 67, 74), Witting Silviu (5109, 10, 13, 15, 16, 30, 35, 57, 60, 67, 70, 207, 08, 10).

BRAŞOV. şc.m. Unirea. cl. VIII Zsido György (MFL: 824, 25, E: 768—80), cl. X Zsido Laszlo (MFL: 822—24, 26, 30, 32, 37, E: 780), şc.m. 4 cl. VIII Albu Livia (E: 1775, 93, 98, 802, 03, 05—07, 10), Gheorghiu Ştefan (E: 1775, 99, 801, 02, 03, 05, 06, 08, 11, 16), cl. VIII Răchiţeanu Ana (E: 1775, 76, 79, 93, 802, 03, 05—07), şc.m. 5 cl. VIII Chifu Mariana (5110, 16, 20, 21, 39, 67, E: 1766, 90, 95, 801—06, 09, 11, 14—16 P), şc.m. 6 cl. X Linga Gheorghe (5088, 72, 158, 60, 67, 75, 89, 208, 10), Petcu Ioan (5160, 62, 67, 75, 89, 202, 08, 10).

BRĂILA. şc.m. 1 cl. VIII Tudorache Radu (E: 1790, 801—10, 14, 16).

BREAZA. şc.m. Dimitrie Cantemir cl. X Alexandru Nicolae (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18—22, 25, 26, 39, 43, 45, 49, 50, 52—54, 57—59, 61, 69, 70, 83, 93, 200, 02, 08, 16, 39, 40, 44—46), Minea Enache (5109, 10, 15, 16, 35, 57, 63, 96, 207, 08, 10, 45, 46), Paştinică Nicolae (5110, 15, 16, 18—20, 25, 39, 45, 59, 60, 63, 96, 207, 08, 10), cl. XI. Andreescu Paul (5109, 10, 12, 15, 16, 21, 22, 25, 35, 39, 43, 50, 52, 53, 55, 57—61, 64, 65, 69, 70, 75, 83, 96, 207, 08, 10, 12, 16, 33, 42—46), Drugă Gheorghe (5179, 80, 84, 85, 207—12, 14, 21, 22, 24—27, 29—32, 34, 36—47, 74, 85—88), Zegheanu Petre (5055, 82—84, 92—100, 26, 28—30, 35—37, 39—42, 44, 48, 57—62, 67—69, 75, 76, 79—81, 83, 85, 89—91, 202, 07—12, 21, 24—27, 29—32, 34, 36, 38 P), şc.m. Aurel Vlaicu cl. X. Oltea Valeriu (5070, 72, 74, 100, 10, 12, 16, 19—22, 39, 63).

BUCUREŞTI. Student Vîlceanu Sabin (Fac. fizică) (5018, 48, 49, 68, 109—11, 14—17, 26, 29, 41, 44, 38—61, 67, 68, 70, 75—80, 89, 207—11, 16, 24, 29, 31, 36—38, 57, 59, 61, 63, 81, 85). Absolvenţii Drăgan Şt. Marin (5113, 39, 57—62, 67—70, P), Timoşenko Alexandru (5207—12, 23, 36, 37, 42, 45), S.m. 1. cl. IX

Arsene Ion (5118, 20, 21, 45, 49, 63—65, 64, 65, 93, 212, 43), cl. X Anastasescu Ion (5113, 30, 31, 35, 3539, 43, 44, 50—54); Ionescu Mihai (5112, 41, 44, 49, 57, 69, 74, 91, 202); cl. XI. Soare Marian (5142, 207—12, 25—27, 36, 39, 41, 42, 44—47); S.m. 2 cl. X Florescu Ilie (5109, 14, 21—26, 35—39, 43, 45); Grigoriu Mihai (5109, 10, 12, 16, 18, 25, 34—36, 39—41, 43—47, 52—55); cl. XI. Frankenfeld Georgian (5157—70, 74, 75, 81, 85, 89, 90, 92—212, 216—18, 24, 25, 27, 35, 37, 39—47). S.m. 3 cl. VIII Teodorescu Dumitru (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 10, 13, 24, 28). S.m. 4. cl. X. Grigoriu Miahi (5067—72, 80—82, 84, 86, 88, 89, 90, 93); Niță Alexandru (5112, 15, 57, 58, 61, 67, 69, 202, 07, 10); S.m. 5 cl. VI. Nicoară Bogdan (E: 5120, E: 1795, 801—06, 08, 16, 18); S.m. 6 cl. XI Oneață Vasile (5157, 59, 62, 63, 65, 67, 93, 207—11, 24, 26, 36, 42, 52—61). S.m. 7 cl. VIII Bercovici Tulida (5160, 67, 80, 24, 31, 38; S.m. 8. cl. X Vătui Dan (5157, 60, 67, 83, 207, 08, 10, 14, 24, 34, 40, 46, 48, 52, 53, 57, 59, 60, 64, 65, 66, 67, 70, 78, 81, 83, P); cl. XI Filip Emilian (5125, 48, 58—61, 63, 67, 67—80, 96, 97, 207—11, 26, 46, 50. 55, 57, 60, 63, 71, 74, 84, 85—88, 94, 95).

S.m. 11. cl. VIII. Tonceanu Dan (1775—80, 90, 95, 91, 98, 1801—11, 13, 14, 5170); Ștefănescu Mihai (5231, 42, E: 1816, 20, 22—25, 29, 30, 36, 37, 39); Ursulescu Octavian (5110, 13, 66, 18—20, 22, 23, 25, 26, 30, 39, 44, 49, 52, 55, 57, 60, 63—65, 67, 69, 74, 75, 83, 90, 93, 95, 200; E: 1797, 99, 816, 18—20, 23, 24, 26—29, P); cl. X Curatu Eugen (5069, 70, 109, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 25, 207, 08, 10); Ursulescu Florin (5099, 103, 18—20, 22, 23, 52, 55, 64, 65); S.m. 12 cl. IX Hajos Ladislau (5186, 221, 29, 39, 44, 50, 51, 57, 61, 74); Rusu Petru (5110, 16, 18, 20, 21, 23, 49, 55, 60, 67, 75, 203, 12, 17, 21, 24, 29, 44, P); cl. X. Cristescu Valeria (5118—21, 25, 34, 50, 51, 52, 55); Lazarovici Cristian (5109, 10, 12, 13, 16, 29, 30, 39, 41, 44, 49) cl. XI Vodă Viorel (5163, 75, 76, 93, 200, 07—11, 21, 23, 24, 26, 30, 32, 35, 48, 57, 59—61, 67, 68, 74, 76, 80, 81, 83, 85, 88, N.P.), Varujan Zahrejian (5109, 16, 17, 21, 60, 67, 93, 207—11, 18). S.m. 13 cl. IX. Cojan Ștefan (5224, 31, 38, 44, 58, 59, 61, 42, 50, 51, 85, 74); cl. X Alde Ion (5109, 10, 12, 13, 15, 25, 30, 40, 44, 83); Lucian Laura (5207, 08, 10, 12, 48, 50—53, 61, 74); Saur Șerban (5163, 75, 88, 96, 98, 207, 08, 10, 24, 33, 40, 42, 44—46); S.m. 15 cl. X Paidiu Ion (5165, 80, 83, 88, 93, 95, 96, 98, 99, 206—08, 12, 1416—18, 21, 22, 24, 31—34, 38—40, 42—46, 48—53, 56—60, 83, 86); S.m. 16 cl. X Mendelschi Marina (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 35, 39, 40, 44, 57, 60, 67, 69, 70, 75, 80, 202, 07, 08, 10, 11, 18, 29, 31); S.m. 17 cl. X Dumitriu Cornelia (5117, 20, 22, 24, 27, 28, 37, 51, 56—62, 90, 112, 69, 207, 08, 21, 24, 31, 32, 36, 39, 40, 42, 44—46, 48—50, 52. 53. 57—59, 61, 65—68, 74. S.m. 18 cl. X Papazian Laurențiu (5116, 19, 20, 25, 35, 57, 63, 69, 73, 207, 08, 40); S.m. 20 cl. X Pitulici Petru (5110, 13, 60, 69, 96, 200, 02, 07, 08, 17—19, 21, 45, 46); ș.m. 22 cl. IX Landman Wolf (5118, 20, 21, 39, 50, 67, 75, 202, 17, 24, 36), cl. X Anghel Ileana (5110, 15, 16, 19, 22, 25, 35, 207, 26, 40); Dinescu Nicolae (5109, 10, 13, 16, 30, 35, 60, 70, 207, 08, 10); Negulescu Dan (5109, 10, 12, 15, 16, 26, 29, 36, 39, 41, 46, 49); Iliescu Mihaela (5110, 16, 19, 20, 22, 25, 63, 207. 08, 10, 45); cl. XI Săbăilă Aurel (5157—65, 67—70, 72—77, 79—81, 83, 86, 88—91, 93, 95—98, 200, 02, 06—11 P); ș.m. 23 cl. X Moldoveanu Gabriel (5110, 13, 15, 16, 18—20, 23—25, 39, 43, 52, 55); ș.m. 24 cl. V Năstase Adrian (E: 1801—06, 08, 11); ș.m. 30 cl. IX Conache Petru (5157, 64, 65, 75, 80, 99, 208, 12, 36, 39, 45, 74); ș.m. 32 cl. IX Vinea Alexandru (5109, 12, 16, 18—22, 25, 29, 35, 44, 49, 53); cl. X Rosenberg Armand (5207—11, 24, 26, 57, 63, 79, 80, 81, 83—86); ș.m. 34 cl. IX Cernicica Petru (5110, 12, 16, 18, 20, 23, 26, 29, 34, 36, 39, 44, 45, 49, 50, 52, 53); Zisu Ana (5067, 70, 72—74, 88, 89, 96, 103, 04, 10—13, 16, 18—20, 22—26, 29, 30, 36, 39—41, 43—45, 49, 50, 52—55, 57, 60, 63—67, 69, 70, 75, 77, 79, 80, 83, 86, 88, 89, 93, 95, 98, 99, 202, 06); cl. X Zisu Tudor (4986, 5044, 54, 56, 62, 67. 69, 70, 72—74, 80, 84, 86, 88, 89, 93, 96, 99, 100, 03, 04, 07, 10, 12, 13, 15, 16, 18—20, 22—26, 29—31, 35, 36, 39—41, 43—46, 49, 52, 54, 55, 56, 57, 60, 63—65, 67, 69, 70, 75, 77, 79, 80, 83, 85, 88, 89, 91, 93, 95, 96, 98, 202, 206); ș.m. 37 cl. X Sachter Mauriciu (5109, 12, 16, 18—22, 25, 29, 35, 44, 49, 53); șc. elem. de 7 ani nr. 23 Petrescu Cornelia (E: 1801—09, 11, 14, 18—22, 26—28, 30, 31).

BUZĂU. șc.m. 1 cl. VIII Andreescu Liviu (4976, 5165, 83, 200, 35, 38, 42, 48, 59, 61, 62, E: 1716, 17, 20—22, 25, 40, 46, 47, 55—57, 95, 813, 15, 16, 18, 19—23, 26, 28—32, 35—37, 40, 41 P), Filipoiu Alexandru (5118, 20, 60, 65, 74, 83, 93, 95, 208, 24, 31, 44, E: 1789, 802, 03, 05—09, 10, 16, 17, 23, 24), Păltoinea Cornel (5249, 61, E: 1801, 13, 15—17, 23, 28, 30, 31, 33—35, 37, 41), cl. X, Ionescu Grigoriu (5110, 15, 16, 18—22,

24, 25, 35, 39, 43, 49, 50, 53—55, 63, 245).

BUZIAŞ. cl. VII Ratea Ioan (E: 1801, 04—16, 18, 20, 30, 32), cl. VIII Cioroancă Neculai (5165, 93, 212, 16—44, 48, 57—59, 62, E: 1801, 04, 07, 09, 16, 18, 22—24, 30, 31, 34, 37, 39, 41).

CARACAL. ş.m. 1 cl. X Suşanu Dan (5159, 60, 63, 64, 207—11, 24).

CARANSEBEŞ. ş.m. 1 cl. VIII Bena Dorin (5110, 16, 18, 20, 80, 231, 44, E: 1790, 91, 93, 95, 800—11, 14, 16), Dobrescu G. (E: 1798, 802, 03, 07, 09, 15, 22—24, 28), Man Carol (E: 1791, 805, 08, 09, 19, 22, 26, 23, 29), cl. X Creţu Mariana (5110, 13, 15, 16, 29, 39, 60, 207, 08, 10), ş.m. 2 cl. IX Damian Emil (5110, 16, 18, 20, 23, 39, 45, 50, 231, 36, 38, 39, 42, 44), Gaiţa Doru (5110, 16, 18, 20, 49, 50, 93, 231, 39, 42, 44), Mărgeanu Nicolae (5110, 16, 18, 20, 49, 50, 93, 231, 39, 42, 44), Miloşiu Marius (5149, 55, 64, 93, 95, 217, 38, 42—44), Pădeanu Constantin (5149, 50, 75, 93, 95, 231, 39, 42—44), cl. X Titel Ligia (5109, 35, 39, 57, 60, 69, 70, 76, 200, 07, 08, 10, 12), cl. XI Liuba Gheorghe (5118—25, 45, 50, 52, 65, 95, 212, 40, 41, 44, 46, 47).

CAREI. şc.m. 1 cl. IX Sălăgean Nicolae (5118, 20, 23, 49, 50, 64, 75, 93, 95, 200).

CĂLĂRAŞI. cl. VII. Rotaru Ion (E: 1801—04, 06—10, 13, 14, 16, 18, 29, 30, 93).

CÎMPIA TURZII: şc.m. cl. X. Plămădeală Lidia (5109, 10, 12, 15, 16, 26, 35, 41, 44, 46, 57, 59, 202).

CÎMPINA. şc. elem. cl. VI. Ivaşcu Florin (E: 1763, 65, 67, 69, 72, 90), şc.m. cl. IX Popescu Maria (5110, 16, 20, 21, 39, 80, 85, 221, 24, 39), şc.m. 2 cl. X Brad Ioan (5110, 15, 16, 30, 35, 41, 60, 67, 75, 80), Ionescu Cătălin (5110, 15, 16, 30, 35, 41, 60, 67, 75, 80).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. Liceul Militar cl. VIII. Aboza Adrian (E: 1802, 07, 09, 10, 29, 37), Crăciun Alexandru, (E: 1802, 07, 09, 29, 37), Iliescu Lazăr (E: 1802, 07, 09, 10, 29, 37), Mascan Marius (E: 1802, 07, 09, 10, 29, 37), Rudenco Cornel (E: 1802, 07, 09, 10, 29, 37), cl. IX Stănescu Mihail (5160, 67, 75, 80, 85, 88, 95, 224, 31, 48, 50, 67, 68, 68, 70, 81, 86), cl. XI. Ionescu Dan (5160, 67, 75, 80, 85, 88, 95, 202, 03, 10, 16, 24, 29, 31, 35, 39, 42, 48, 50, 57—62, 66, 67, 70, 71, 74—86, 88), Livezeanu Corneliu (5111—14, 16, 17, 35, 39, 48, 59—61, 67), Nicolau Petru (5110—22, 25, 29, 35, 38, 43, 45, 49, 50, 52—55, 57—65, 67, 75, 80, 89, 93—97, 202, 10—12, 16, 21, 24—26, 31, 37, 39, 42—46), Poenaru Constantin (5111, 35, 60, 61, 67, 80, 208, 10, 11, 21, 24, 31), Stănăşilă Constantin (5135, 60, 61, 67, 89, 207—09, 11, 16, 21, 24, 29, 31, 35).

CÎMPULUNG MUŞCEL. Absolvent Mastalier Carol (5250, 52, 59—62, 64, 67, 74, 75, 85—89, 94, 95).

CLUJ. Student Iancu Crăciun (5109, 10, 13, 16, 26, 29, 35, 39, 44, 57—61, 67, 69), ş.m. Ady Şincai cl. VIII Füstös Attila (M.F.L.: 835, E: 774, 78—80), Semlyén Janos (M.F.L.: E: 768—69, 71—75, 78, 80), cl. X Moskovutz Ivan (5160, 62, 71, 93, 95, 99, 200, 02, 07—10, 12, 14, 16—18), Pop Marius (5119, 22, 25, 43, 47, 51, 63, 96, 98, 239, 40, 45, 49), ş.m. Nicolae Bălcescu cl. VI. Weisz Petru (E: 1801—03, 05, 06, 815, 16), ş.m. nr. 3 cl. VII Farkaş Zsuzsanna (M.F.L. E: 757—60, 68, 71, 74, 75), cl. X Mathé Denes (M.F.L.: 781, 83, 809, 24, 27), ş.m. Emil Racoviţă cl. VIII Manea Viorica (E: 1802—14). cl. X Peteanu Lelia (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 35, 36, 39—41, 44, 46), cl. XI Baciu Violeta (5157, 58, 61, 62, 207—11, 26, 85, 88), ş.m. 5 cl. IX Călugăreanu Grigore (5208, 14, 29, 36, 50, 57, 61, 65, 74, 81), ş.m. Brassai Samuel (cl. VI Erdo Laszlo (M.F.L. E: 758, 63, 65, 68, 71, 77, 79), ş.m. 11. cl. VIII Imes Maria (M.F.L. E: 768, 70, 72—74), Kapusi Maria (M.F.L. E: 770—74), cl. X, Berki Iulia (M.F.L. E: 807, 09, 10, 23—26, 36), Eröss Edit (M.F.L.: 807, 10, 24, 25, 36, E: 780), ş.m. 12 cl. VIII. Bocşa Anna (M.F.L.: E: 758, 60, 65, 67, 68, 71). şc. elem. nr. 4 cl. VII Enyedy Roza (M.F.L. E: 692, 730, 71, 73—75), Gruber György (M.F.L.: 750, 54, 71, 73, 75), Kontz Klara (M.F.L.: 748, 50, 54, 71, 73—75), Kovacs Maria (M.F.L. E: 748, 54, 71, 73—75), Teledy Edit (M.F.L. E: 748, 54, 73—75), Vencel Magda (M.F.L. E: 730, 48, 50, 54, 71, 73—75), şc. elem. nr. 18 cl. VII Fragkö Laslo (M.F.L. E: 768—76, 78), Jankab Ferenc (M.F.L. E: 760, 63—65, 71).

CONSTANŢA. ş.m. 4 cl. IX Catană Marian (5096, 110, 13, 15, 39, 41, 60, 67, 208, 24).

CORĂBIA (Oltenia), ş.m. cl. VIII. Tudor Aurelian (E: 1802, 03, 06, 07, 09, 16, 22, 30, 35, 37), Ciomaru Ioan (E: 1802, 03, 06, 07, 29, 30, 36, 37).

COSTEŞTI. (Argeş) ş.m. cl. VIII Popescu Teodista (E: 1801—05, 07, 08, 11).

CRAIOVA. ş.m. 1 cl. VIII Popescu Felicia (E: 1775, 77, 79, 80, 90, 91, 93, 96, 98, 802, 03, 05—08, 10). cl. IX Georgescu Gh. (5110, 12, 18, 20, 36, 38—40, 44, 49, 57, 59, 60, 67, 70, 83, 93, 202, 08, 12, 17, 18, 24, 42, 44), cl. X Iser Liliana (5109, 10, 12, 15, 16, 35,

39, 57, 67, 69, 207, 08, 10), cl. XI Băluţescu Mihail (4915—17, 21—30, 35, 39, 42, 50, 54, 58, 75, 85, 5005, 27, 28, 33, 36, 69, 72, 80, 85, 109, 15), Bărbulescu Nicolae (5110, 11, 13—17, 19, 20, 25, 39, 59—63, 67, 202, 07—12, 240, 44, 45), şc.m. 2 cl. VIII Babarada Ion (E: 1801, 03, 06—09, 11, 13, 16). Bălăcescu Daniela (1801—03, 05—11), Cojocaru Mariana (E: 1801—11, 14), Dumitrescu Sever (E: 1801, 03, 05—11), Gîdea Liviu (E: 1801—03, 06—11, 13, 14), Hotăraru Ion (E: 1801—03, 06—11, 13, 14), Niţulescu Elena (E: 1801—11, 14), Pelivan Ileana (E: 1801—03, 05—11, 14), Piţurescu Ionel (E: 1801—03, 05—10, 12—14), Smărăndache Emilia E: 1801—03, 05—11, 14), şc. m. 3 cl. VIII Ghiţulescu Dan (E: 1809, 10, 23, 26, 28, 30, 36, 38), ş.m. 4 cl. VIII Constantin Ştefan (E: 1790, 802, 03, 06—11, 16). Iordăchescu Anca (E: 1797, 801—03, 06—11), Jianu Viorica (E: 1790, 802, 03, 05—07, 09—11, 24), Niţu Florea (E: 1807, 08, 11, 16, 18, 24, 29, 30, 35—37), Rădulescu Ioana (E: 1777, 90, 802, 03, 05, 06, 08—11), Stoian Zoia (E: 1802, 03—11, 16), cl. IX Cristescu Mărgărit (5073, 102, 12, 44, 50, 53, 57, 60, 64, 65, 67, 69, 70, 80, 93, 95).

CRISTUR. ş.m. Petofi Şandor. cl. XI Demeter Elek (M. F. L.: 825, 27, 32, 35, 37), Zsigmond Gyula (M.F.L. E: 824, 25, 27, 29, 32, 35—37).

DEJ. Liceul unificat. cl. VIII Aztay Ilona (M.F.L.: 817, E: 760, 63, 65, 68, 71, 75, 77), Nagy Zoltan (M.F.L.: 769, 71, 75, 77, 80), Steckel Eva (M.F.L.: 817, E: 760, 63, 65, 68, 69, 71, 77), Szekely Ilona (M.F.L.: 817, E: 760, 63, 65, 69, 71, 75, 77), Vajda Laszlo (M.F.L.: 807, E: 760, 63, 65, 69, 71, 75, 77), Zaharovitz Jolan (M.F.L. E: 763, 65, 67, 69, 71, 75, 77), cl. IX Barth Laszlo (M.F.L.: 823, 24, 32, 35, E: 780), cl. X. Chis Aramka (M.F.L.: 823—26, 31, 35, 36, E: 780), Kiss Janos (M.F.L. E: 823—26, 31, 35, 36, E: 780), Martonos Maria (M.F.L.: 762, 93, 94, 823—26, 31, 35, 36 E: 752), Marton Magda (M.F.L.: 823, 24, 26, 31, 35, 36, E: 780), Szabo Miklos (M.F.L.: 823—26, 31, 35, 36, E: 780).

DEVA. Absolvent Maksay Ştefan (5157—62, 67—69, 207—11).

DITRĂU. Ş.m. Cl. VII. Fülöp Laszlo (M.F.L. E: 763, 65, 68, 71, 74, 76). Cl. VIII. Ambrus Andras (M.F.L.: 832, 37, E: 769—71, 74—77, 79, 80), Balazs Maria (M.F.L. E: 769, 71, 76, 77, 79), Fülöp Zoltan (M.F.L. 769, 74, 76, 78, 80), Sazka Jeno (M.F.L. 832, E: 769, 71, 76, 77, 79), Szabo Arpad (M.F.L. 832, 837, E: 769—71, 74—77, 78, 80), Szigeti Agnes (M.F.L. E: 769, 75—77, 79). Cl. IX. Pal Antal (M.F.L.: 785, 88, 95, 800, 32, 37), Pall Dezso (M.F.L.: 809, 17, 18, 32, 37). Cl. X. Budai Marton (M.F.L.: 817, 31, 32, 34—36, E: 780). Cl. XI, Fülöp Ferenc (M.F.L.: 824, 25, 29, 32, 34, 36—38, E: 780).

DOROHOI, (Suceava), absolvent Paul Alexandru (5158—63, 65—70, 75, 76, 81, 93—96, 98, 202—12, 24—26, 29—31, 36, 41, 42, 44—46, 48—50, 53, 57—61, 63, 64, 67, 70, 73, 87, 88). Ş.m. Cl. X. Cehan Vlad (5116, 19, 25, 43, 46, 207, 08, 10, 18, 45).

DRĂGĂŞANI (Argeş). Cl. IX. Bănică Octavian (5084, 109—11, 16—21, 23, 27, 29, 30), Litianu Gh. (5110, 12, 16, 18, 20, 39, 41, 50, 53, 60, 65, 67, 83, 95, 208, 12, 17, 24, 31, 39, 42, 44), Prohanca Actius (5113, 18, 20, 23, 34, 36, 41, 44, 50, 53, 54, 60). Cl. X. Corcodia Florea (5109, 10, 13, 16, 19—22, 25, 30, 35, 63, 65, 93, 95, 96, 200, 08, 12, 35, 40, 42, 44, 45, 57, 59, 61, 62, 67), Iliescu Victor (5113, 18—25, 34, 35, 49, 50, 95, 98). Cl. XI. Iancu Stan (5110, 11, 16, 17, 39, 41, 59—63, 67—79, 83, 208—11, 21, 31), Voiculescu Ana (5109, 11, 13—18, 57, 58, 61, 67, 68, 207—11).

FALTICENI. Ş.m. 2. Cl. VIII. Zoiţa Vasile (E: 1804, 09, 15, 16, 18—22, 30, 31, 35—37, 51). Cl. X. Rabinovici Silviu (5084, 89, 109, 10, 12, 13, 15, 16, 18—21, 23—26, 29, 30, 35, 36, 39—41, 43, 45, 46, 50, 52—54, 57, 58, 60, 61, 63—67, 69, 70, 75, 76, 80, 83, 89, 91, 93, 95, 96, 98, 200, 02, 08).

FETEŞTI. Ş.m. Cl. IX. Pavel Maria (5068, 70, 71, 110, 16, 18, 20, 39, 60, 64, 67, 5436, 40, 50, 53, 54, 70, 93, 200, 44, 50, 61, 86), Petcu Eugenia (5068, 70, 71, 96, 110, 16, 18, 23, 60, 64, 67, 239), Zota Ioan (5068, 70, 71, 110, 16, 18, 20, 23, 39, 60, 64, 231, 39).

GALAŢI. Absolvent Delciu Valeiu (5109—17, 26, 28, 33, 39, 41, 42, 44, 46, 48, 49). Şc. elem. nr. 20. Cl. V. Conţ Mia (E: 1802, 04, 06, 08, 11). Cl. VI. Dima Steluţa (E: 1802—04, 06, 08, 11, 28), Ioniţă Lilica (E: 1802—04, 06, 08, 16). Şc. elem. nr. 21. Cl. V. Cărăbăţ Cornelia (E: 1808, 11, 18, 20, 22, 26), Voicu Elena (E: 1790, 801—04, 06, 11, 14). Cl. VII. Bulgaru Cristina (E: 1790, 91, 801, 16, 20—22, 24, 25, 28), Dan Aurora (E: 1790, 91, 804, 06, 09, 10, 14, 24, 26), Hoha Felicia (E: 1810, 16, 18, 20—24, 26, 28), Ionescu Doina (E: 1809, 10, 14, 16, 20—22, 24, 25, 28), Ioan Mircea (E: 1801—03, 06, 11, 12, 14), Jelesneac Maricela (E: 1790, 91, 802, 03, 16, 20, 21, 22, 24, 25, 28), Sterea Tudorel (E: 1790, 91, 801, 02, 06, 12, 14).

Cl. VIII. Cristea Mihaela (5183, E: 1791, 93, 99, 800, 02, 03, 07, 09, 11), Dobre Mariana (E: 1790—96, 800, 07, 09, 13). Cl. IX. Ionescu Mircea (5121, 41, 44, 49, 50, 53—55, 93, 95, 208, 24, 39), Kuperman Izi (6112, 16, 39, 57, 60, 69, 70, 80, 208, 17, 21), Pană Horia (5112, 65, 67, 88, 95, 202, 05, 12, 21, 24, 31, 35, 39, 42, 44). Şc.m. 1. Cl. X. Ignat Elena (5109, 12, 13, 15, 26, 30, 31, 39, 40, 44, 70, 74, 75, 80, 202), Iorga Lucian (5113, 26, 30, 49, 57, 63, 207, 08, 10, 36), Jicol Olga (5126, 29, 60, 67, 207, 08, 10, 18, 21, 24, 35), Mihailovici Marcel (5113, 18, 26, 30, 41, 44, 207, 08, 10, 24, 42, 45), Nichita Cornelia (5118, 55, 63, 67, 207, 08, 10, 29, 45, 46), Purcel Ionel (5118, 21, 49, 63, 207, 08, 10, 35, 45, 52), Prodan C. (5119—22, 25, 35, 39, 43, 44, 49, 50, 53), Titischneider Iosif (5067, 69, 80, 96, 110, 15, 16, 36, 60, 80), Cl. XI. Ender Lucian (4972, 83—85, 94, 96, 5003, 05, 06, 11—13, 29, 30, 32, 36, 38, 42, 52, 54). Şc.m. nr. 2. Cl. VIII. Daghie Viorel (5118, 23, 45, 65, 93, 230, 42, 44). Cl. X. Stanciu Margareta (5109, 10, 15, 16, 35, 39, 41, 46, 60, 67, 70, 91, 207, 08. Cl. XI. Niunim Rodica (5111, 17, 26, 44, 48, 601, 61, 67, 70, 209—11, 25, 26). Şc.m. nr. 3. Cl. X. Palic Teodor (5118—20, 35, 39, 41, 44, 57, 60, 67), Rozner Laly (5109, 10, 13, 15, 16, 18—20, 39, 41, 44, 50, 57, 59, 60—64, 67, 69, 75, 96, 207, 08, 10. 21, 24, 29, 33, 40). Cl. XI. Tuchel Sanda (5163, 69, 75, 88, 94, 96—98, 202, 07—11, 24, 26, 29, 35, 42, 44, 47, 54, 57, 67, 74, 81, 88). Ş.m. 5. Cl. VIII. Dimache Anişoara (E: 1798, 99, 801, 02, 06—09, 11, 29, E: 1801—03, 06—10, 15, 16, 208, 31), Ioniţă Nicolae (E: 1790, 98, 802, 03, 06, 08, 23, 24). Haimă Roşie Cornelia (E: 1801—04, 06, 09, 11—15), Mihalache Anica (E: 1802, 03, 06, 07—10, 15), Paiu Tincuţa (E: 1801, 04, 06, 07, 09, 11, 13—15), Pătraşcu Catrinel (E: 1801—04, 10, 13, 14, 18, 24, 57), Radief Maria (E: 1802—04, 06—09, 11—14, 28), Rîjială Georgeta (E: 1801—04, 06, 09, 11, 13—15), Sarivan Ioana (E: 1798, 801—03, 06—11, 29), Susoi Amalia (E: 1801—03, 06, 07, 16—22, 24—29), Stoian Violeta (E: 1804, 08, 16, 18, 19, 22, 24, 26—28, 208), Tăutu Teodora (E: 1802—04, 06—09, 12—14, 16). Cl. IX. Dănăilă Constanţa (5177, 224, 56, 61, 70, 74, 85, 86). Cl. X. Solomon Ludwig (5112, 13, 18, 21, 22, 41, 44, 45, 49, 52, 55, 57, 60, 67, 70, 95, 202, 07, 31, 42), Tănase Paul (5135, 55, 63, 70, 207, 08, 10, 44, 45), Tuchel Gabriel (5160, 70, 202, 07, 08, 10, 24, 31, 44, 45).

GHERLA. Ş.m. Petru Maior. Cl. IX. Kiss Sandor (M.F.L.: 807, 09, 10, 25, 26, 32), Nits Jozsef (M.F.L.: 807, 09, 10, 26, 32), Vass Emesse (M.F.L.: 824—27, 32), Hejjas Jozsef (M.F.L.: 792, 93, 97, 824, 32, 37, E: 752, 80), Nagy Sandor (M.F.L.: 824, 27, 32, 35, 37, E: 780), Soos Margit (M.F.L.: 807, 09, 11, 15, 24—27).

GHIORAC. Şc. elem. Cl. VII. Gazso Jozsef (M.F.L. E: 757, 63, 65, 75, 76, 79), Gyulai Lajos (M.F.L. E: 768, 70, 75, 76, 79), Sayti Sandor (M.F.L. E: 757, 63, 67, 75, 76, 79), Varga Eta (M.F.L. E: 757, 63, 65, 75, 76, 79).

GIURGIU. Şc.m. Cl. VIII. Ivanov Ilie (5110, 12, 208, E: 1775, 77—80, 02—11, 14—16, 29). Cl. IX. Gheorghe Anton (5110, 16, 18, 39, 52, 55, 60, 65, 67, 93, 239, 42, 44), Scraba Dumitru (5110, 12, 16, 21, 39, 57, 208, 21, 24, 35, 39).

HAŢEG. Ş m. Cl. V. Marton Mira (1779, 90, 802, 06, 08, 11, 20, 22). Cl. IX. Petria Emil (5110, 16, 18, 20, 23, 39—41, 44, 45, 49, 50, 52—55).

HOREZU. Şc.m. Cl. IX. Costescu Ion (5110, 16, 18, 20, 35, 39, 41, 49, 60, 64, 65, 67, 5224); Cl. X. Gîbu Ion (5210, 50, 19, 22, 25, 39, 60, 63, 70, 5207; Ilinescu Mitroi (5110, 15, 16, 19, 25, 39, 60, 70, 5207, 08, 10), Ionescu Nicolae (5110, 15, 16, 19, 38, 59, 60, 70, 5207, 08, 10, 45), Petrescu Traian (5110, 15, 16, 19, 38, 59, 60, 70, 5207, 08, 10, 45); Tudorica Petre (5110, 15, 16, 19, 22, 25, 39, 60, 63, 70, 5207, 08).

IONEA. Ş.m. Cl. VIII. Tăbîrcă Virgil (1802, 03, 06—09, 11, 13, 15, 27, 5238, 42).

IAŞI. Ş.m. nr. 1. Cl. X. Goldenberg Daniel (5109—13, 15—25, 30, 35, 39, 40, 49, 54, 55), Nistor Ioan (5109, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 30, 35, 39, 40, 41, 44, 45, 49, 50, 52, 53, 54, 55); Şc.m. nr. 2. Cl. VII. Mărculescu Magda (1803, 06, 07, 08, 10, 16, 18, 02, 22, 23). Cl. VIII. Rogobete Gabriela (1801—03, 07, 09, 16, 20. 22—24). Şc.m. nr. 3. Cl. VI. Popa Eugen (1801—09, 11—13, 16, 18, 20—24, 26, 28, 30—32, 35, 35, 41, 5216, 18, 57, 59, 66, 92). Cl. IX. Munteanu Constantin (5112, 13, 16, 20, 21, 39, 50, 53, 54, 55, 57, 60, 5208, 12, 24, 39), Pîrvu Sorin (5110, 16, 39, 40, 41, 57, 59, 60, 67, 75, 80, 52, 24, 30). Cl. X. Apetrei Mircea (5157, 59, 5207, 08, 10, 21, 24, 29, 31, 48, 53, 57, 61, 70, 83), Mărculescu Dan (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 26, 29, 35, 39, 41, 44, 58, 59, 60, 61, 62, 67, 70, 75, 80, 86, 88, 5202, 07, 08, 21, 24, 29, 31), Tofan Emil (5109, 10, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 26, 29, 31, 35, 39, 40, 44);

Şc.m. nr. 4. Cl. V. Ghindaru Traian (1790, 1802, 06, 08, 18, 20, 22). Cl. X. Cozma Rodica (5119, 23, 63, 5245, 46). Şc.m. nr. 5. Cl. IX. Demisino Aurelian (5145, 50, 52—55, 93, 95, 52, 39, 42, 43). Şc.m. nr. 6. Cl. VIII. Mateciuc Asrian (1801, 02, 03, 06, 07, 08, 09, 5145, 93), Nichifor Geta (1802, 03, 06, 07, 08, 5118, 20, 21, 45, 95), Stavilă Rodica (1801, 05, 06, 07, 09, 16, 18, 19, 24, 5145, 49, 52, 95), Smilovici Fredi (1801—03, 06—09, 16, 18, 22, 24, 26). Cl. IX. Bercovici Jean (5110, 16, 39, 40, 60, 67, 75, 5202, 08, 31), Herşcovici Ricu (5116, 60, 65, 67, 75, 80, 52, 31, 39, 42). Cl. X. Galene Constantin (5150, 52, 53, 63, 65, 94, 5207, 08, 40, 42, 45, 46). Şc.m. nr. 7. Cl. VI. Burduja Gheorghe (1791, 94, 98, 99, 1801—06, 08, 11, 12, 14). Cl. VIII. Florescu Liviu (1816, 17, 23, 25, 29, 30, 31, 37), Mihăilescu Camelia (1811, 16, 18, 20, 30, 31, 33, 36, 37, 39, 41, 5248, 55, 57, 62, 77), Nicokau Mihai (1802, 03, 06, 07, 08, 09—11, 23, 36, 39), Strul Raşela (1801—04, 06—09, 16, 18, 22, 24, 26), Tebeanu Teodor (1802, 06, 07, 09, 10, 14, 33, 37, 41, 5242). Cl. X. Grimberg Ilie (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18—21, 26, 29, 35, 36, 39, 40, 44, 50, 60, 63, 64, 75, 86, 91, 95, 5202, 07, 08, 10, 12, 17, 21, 24, 42, 44, 45), absolvent Rusu Constantin (5109—11, 13, 15—22, 25, 30, 35, 39, 42—44, 49, 50, 52—55, 57—61, 63, 80, 88, 91, 95, 98, 5202).

LIPOVA. Şc.m. Cl. X. Nogorniţă Ioan (5109, 10, 13, 15, 16, 35, 39, 40, 44, 46, 57, 60, 67, 69, 70, 75, 85, 86, 91, 5202, 07, 08, 10, 21, 24, 31, 32, 36), Pătrugan Victor (5112, 15, 16, 19, 20, 22, 25, 36, 39, 46, 69, 75, 91).

LUGOJ. Şc. de 7 ani nr. 1. Cl. V. Daba Valerian (1793, 1802, 03, 04, 05, 06, 22, 27). Liceul nr. 1. Cl. VIII. Jurca Ioan (1815—24, 26, 28, 29, 5120, 45, 44, 54, 65, 91, 93, 95, 5200, 02, 08, 12, 14, 16—18, 24, 36, 37—39, 42—44), Popovici Cornel (1799, 1816—24, 26, 28, 29, 5110, 14, 16, 20, 29, 44, 54, 60, 67, 70, 72, 80, 83, 88, 90, 91, 5200, 16, 17, 18, 21, 24, 31, 35, 37, 39, 42, 43, 44). Cl. IX. Balaci Ion (5110, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 29, 35, 39, 40, 44, 45, 50, 52, 54, 59, 60, 64, 67, 69, 83, 95, 5207—12, 16, 21, 24, 35, 38, 39, 42, 44), Cimponieru Traian (5112, 14, 17, 36, 40, 41, 44, 45, 59, 64, 72, 85, 86, 5203, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 16, 23, 24, 31, 35, 37, 38, 39, 42, 44), Daba Dan (5110, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 29, 33, 35, 39, 40, 44, 45, 50, 52, 54, 59, 60, 64, 67, 69, 83, 5207, 10, 11, 12, 16, 21, 24, 33, 39, 42), Vasiliu Dan (5018, 20, 21, 23—30, 32—35, 43, 45, 49—52, 55, 70, 71, 73, 85, 96, 99, 5100, 03, 16, 17, 18, 21, 29, 39, 40, 44, 57, 59, 60—62, 64, 65, 67, 70, 72, 86, 88, 90, 91, 95, 5207, 08, 09—12, 17, 18, 21, 34, 36). Cl. X. Galeczki Gheorghe (5109, 15, 36, 57—60, 63—65, 67, 69, 70, 75, 76, 85, 90, 93, 95, 96, 98, 5200, 07—10, 12, 16, 24, 31, 36—40, 42—46). Cl. XI. Moraru Mihai (5158, 60—62, 67, 5207—11, 24, 24, 31, 36), Slupa Adrian (5111, 16, 17, 58, 60, 62, 68, 81, 5207, 08, 09, 10, 11, 24).

MARAŞEŞTI. Şc.m. Cl. X. Miriariopschi Gheorghe (5110, 13, 15, 16, 20, 35, 39, 45, 49, 57—60, 63—67, 69, 75, 94, 95, 97, 5203). Cl. XI. Anghel Vasile (5157—69, 75, 81, 94—97, 5203, 04, 07—12, 24, 25, 36—38, 42, 44, 46—48, 57, 59, 60, 66, 67, 70, 81, 85, 92, 94).

MARGHITA. Şc.m. mixtă. Cl. VIII. Balazs Magda M.F.L.: 746—48, 50, 69, 73), Kovacs Laszlo M.F.L.: (760, 61, 65, 69, 71, 73).

MEDIAŞ. Şc.m. Cl. IX. Brădişteanu Adrian (5212, 18, 24, 31, 33, 39, 42, 43, 44, 45, 48, 50, 51, 57, 59, 61, 62, 64, 66, 70).

MEDGIDIA. Şc.m. Cl. VIII. Vlase Aurelian (1775—80, 86—89, 91, 93, 98, 99, 1801—12, 14, 5073, 99, 5104, 07, 08, 20, 21, 42, 52, 93, 95, 5200, 03).

MIHAIEŞTI (Bucureşti). Absolvent Popa D. Ioan (5163, 65, 66, 74, 76, 83, 93—96, 5207—12, 16—18, 21, 24, 26, 28—31, 34, 36—47).

MORENI. Şc.m. Cl. VIII. Condurăţeanu Eugenia (1796, 1816, 18, 24, 30, 35, 36, 37, 5200, 43, 57, 61, 66), Danciu Adrian (1790, 91, 93, 99, 1800, 02, 03, 06, 07, 08, 09, 15, 16, 18—20, 23, 25, 25, 28), Dumitrache Constantin (1790, 97, 1800—03, 05—15, 5116, 18, 21, 39, 75), Popescu Lucian (1790, 97, 1801—03, 06—12, 14, 5145). Cl. IX. Oncescu Viorel (5110, 16—18, 20, 21, 30, 52, 67).

MIERCUREA CIUC. Şc.m. Cl. VIII. Abraham Anna Maria M.F.L.: (746, 54, 824, 32, 35, 36), Blaga Tibor M.F.L.: (770, 71, 72, 74, 79, 32), Gere Bela M.F.L.: (747, 48, 55, 61, 69, 70, 71), Kolumban Imre M.F.L.: (748, 49, 73, 79, 816, 17, 32), Kiss György M.F.L.: (770, 72, 73, 74, 79, 80, 824), Szekely Sandor M.F.L.: (767, 77, 58, 73, 79, 80, 816, 32). Cl. IX. Tatar Janos M.F.L.: (793, 809, 12, 24, 32, 35), Vitos Karoly M.F.L.: (817, 18, 780, 832, 35, 36). Cl. X. Domokos Saro M.F.L.: (754, 93, 96, 824, 32, 35, 36), Vitos Istvan M.F.L.: (796, 80, 832, 35, 36).

NASAUD (Cluj). Şc.m. nr. 1. Cl. X. Pleş Gheorghe (5110, 16, 18, 20, 39, 41,

60, 67, 83, 5200, 02). Cl. X. Zăgreanu Marius (5067, 68, 70, 80, 82, 84, 89, 93, 5110, 11, 12, 14—17, 26, 31, 35, 36, 39, 41, 44, 46, 48, 58, 60, 61, 67, 70, 74—76, 80, 83, 89, 91, 5202). Şc.m. nr. 2. Cl. IX. Marţian Ieramini (5239, 48, 57, 59, 61, 70, 86).

NOVACI (Oltenia). Şc.m. Cl. X. Bejancu Aurel (5110, 15, 16, 18—22, 25, 29, 35, 39, 41, 43, 50, 60, 63—65, 67, 69, 70, 96, 5200, 02, 07, 08, 10, 12, 17, 24, 31, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46), Filiş Gheorghe (5115, 18—22, 25, 35, 60, 63, 64, 69, 70, 77, 90, 93, 95, 5207, 08, 10, 17, 42, 44, 45, 46).

ODOBEŞTI (Galaţi). Şc.m. mixtă. Cl. X. Brusalis Teodor (5110, 13, 16, 18—23, 25, 26, 55).

ODORHEI. Şc.m. „Dr. Petru Groza". Cl. IX. Kiss Lörinc M.F.L. (809, 16, 18, 19, 24, 25).

OCNA MUREŞ. Şc.m. Cl. X. Horavitz Ossi (5157, 60, 63—65, 67, 70, 75, 93, 95, 96, 98, 99, 5200, 02, 07, 08, 10, 12, 16, 18, 24, 34, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 57, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 67, 70, 74, 86, 95).

ONEŞTI. Şc.m. mixtă 1. Cl. VIII. Timaru Theodor (1807, 08, 10, 11, 14, 17, 23, 28, 37, 42, 44).

ORADEA. Şc.m. 1. Cl. IX. Bondor Liviu (5118, 20, 21, 23, 50, 52, 64—66, 93, 5208, 12, 38, 39, 42—44). Şc.m. 2. Cl. X. Veters Peter M.F.L. (785, 87, 832, 34, 35, 36). Şc.m. 3. Cl. XI. Paris Maria M.F.L. (832, 34, 35, 36, 37). Şc.m. 4. Cl. VIII. Baluit Jozsef M.F.L. (757, 59, 60, 65, 68, 74, 77). Cl. IX. Filip Gheorghe (510, 11, 16, 17, 41, 44, 49, 5216, 17, 21, 24, 31). Cl. XI. Kiss Lajos M.F.L. (780, 823, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37), Pecs Galor M.F.L. (809, 15, 16, 24, 25, 29, 35).

ORAVIŢA. Şc.m. mixtă. Cl. X. Guleşu Adrian (5113, 35, 39, 54, 57, 70, 71, 75, 5200, 02, 07, 16, 46).

ORĂŞTIE. Şc.m. „Aurel Vlaicu". Cl. IX. Homorodean Ion (5118, 20 50 52—55, 64, 65, 93, 5200, 12, 21, 42), Ştefan Aurel (5110, 16, 30, 49, 53, 60, 64, 5221, 24, 39, 42, 44). Cl. X. Apostol Petru (5101, 10, 13, 16, 18, 19, 22, 24, 25, 35, 39, 50, 51, 52, 60, 67, 91), Rotaru Radu (5170, 71, 73, 93, 96, 5207, 08, 10, 40, 42, 44, 45, 46, 57, 59, 60, 01, 63, 67), Viorel Gh. Costea (5112, 13, 26, 29, 31, 35, 39, 41, 43, 44, 49, 50, 53, 55, 57, 60, 63, 64, 65, 67, 69, 70, 71, 75, 76, 79, 83, 88, 89, 91, 93, 95, 98, 5200, 01, 03, 07, 08, 10, 21, 40, 42, 45).

ORŞOVA. Şc.m. „Şt. Plavăţ". C. IX. Blidariu Maria (5121, 34, 49, 50, 53, 80, 5221, 38, 39, 42), Fikl Eduard (5181, 53, 53, 70, 80, 5221, 38, 39, 42, 44), Glodeanu Ana (5149, 50, 53, 80, 5221, 34, 38, 39, 42), Plavăţ Dumitru (5121, 34, 39, 49, 50, 53, 70, 77, 5239, 44), Plavăţ Ion (5134, 39, 49, 50, 53, 70, 78, 80, 5239, 44), Schubert Ioana (5134, 34, 38, 42, 44, 80, 50), Troilovici Grigore (5134, 50, 53, 80, 5239, 42, 44).

OŢELUL ROŞU. Şc.m. Cl. X. Micloşi Gheorghe (5118—20, 22, 25, 45, 50, 52, 53).

PANCIU. Şc.m. Cl. XI. Gheţ Ion (5109—12, 15—17, 26, 31, 35, 39, 44, 46, 57—62, 67, 75, 83, 86, 89, 5202, 07, 11, 24, 26, 36, 44, 45).

PAŞCANI. Şc.m. „C. Burcă". Cl. X. Beraru Georgeta (5113, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 39, 5207, 08), Gaiţ Aurica (5110, 13, 16, 18, 19, 22, 25, 39, 5207, 08, 24), Ghelber C-tin (5110, 13, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 35, 5207), Hulpoi Vasile (5109, 10, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 35, 57, 98, 5207, 08), Lupu Mariana (5113, 18, 21, 22, 25, 39, 59, 60, 5207, 08), Moraru Tatiana (5113, 18, 21, 22, 25, 39, 59, 60, 5207, 08), Spiridonică Alex. (5109, 10, 15, 16, 24, 35, 60, 98, 5207, 08), Tofan Elena (5113, 18, 19, 22, 25, 39, 60, 5207, 08).

PĂTÎRLAGELE. Cl. VIII. Andrei Titus (1801—03, 06—10, 15, 16, 19, 24, 29, 30, 36, 37, 50, 5183, 5238, 42, 53, 57, 60, 70), Pavel Dumitru (1801, 02, 03, 08, 16, 19, 24, 29, 30, 31, 35, 36, 37, 5183, 5248, 57, 61, 70). Cl. XI. Dobriţă Gheorghe (5111, 16, 17, 18, 21, 30, 32, 39, 45, 49, 57, 58, 60, 61, 63, 68, 83, 92, 93, 94, 95, 97, 5200, 07, 08, 09, 10, 11, 25, 36, 38, 41, 42, 46, 47, 48, 57—63, 66, 67, 73, 74, 80, 81, 87, 88, 94).

PETROŞENI. Şc. de 7 ani nr. 4. Cl VII. Erdely Klara M.F.L. (768, 70, 75, 78, 79, 80), Hegedus Istvan M.F.L. (770, 75, 78, 79, 80), Şc.m. mixtă. Cl. IX. Goldştein Beniamini (5141, 44, 57, 60, 67, 69, 74, 86, 5208, 17, 21, 24, 31). Cl. X. Hîndorean Viorel (5113, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 30, 35, 39, 43, 49, 50, 53, 54, 55), Pantelimon Mihai (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19—23, 25, 25, 26, 39, 57, 60, 63, 65, 67, 74, 95, 5202, 07, 08, 10, 40).

PIATRA NEAMŢ. Şc.m. 1. Cl. VIII. Humeni Dan (1780, 1807—10, 23, 24, 29, 5116, 18, 20, 50, 93, 5200, 42), Măliniei Scarlat (1807, 09, 16, 29, 30, 35, 37, 57, 9), Ştefănescu5 Eliade (1807, 13, 17, 26, 5120, 45, 49, 74, 5231, 42, 43), Şc.m. 2. Cl. X. Teodorescu Voltaire (5102, 10, 15, 16, 35, 60, 89, 5202, 07, 08, 16).

PITEŞTI. Şc.m. 1. Cl. V. Bădescu Iulian (1802, 18, 20, 22, 26, 30), Budan

Octav (1798, 1802, 06, 03, 11, 22), Cernătescu Carmen (1175, 90, 91, 98, 1802, 06, 18), Enescu Ştefania (1802, 03, 11, 22, 36), Păunescu Ştefan (1798, 1818, 20, 22, 26, 30). Cl. VI. Lazăr Mircea (1795, 1800, 02, 03, 06, 08, 16, 22). Cl. IX. Calotă Ion (3112, 5110, 1, 18, 21, 39, 41, 49, 60, 67, 70, 8, 52003, 17, 21, 24, 31, 36, 38, 39), Cristea Mariana (5160, 67, 75, 83, 5249, 51, 70, 83), Constantinescu Dan (5110, 16, 21, 41, 49, 67, 93, 5208, 24, 38, 42), Dumitrescu Eugen (5110, 12, 16, 39, 41, 60, 67, 70, 93, 5203, 24, 31), Ianu Mihăilescu (5110, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 31), Maria Petre (5110, 16, 21, 24, 29, 31). Cl. X. Mărgineanu Doru (5067—70, 72, 80, 87, 89, 96, 5109, 10, 12, 13, 15, 16, 29—31, 35, 39—41, 44, 46, 47, 49, 57, 60, 61, 63—65, 67, 69, 70, 74, 76, 80, 83, 85, 86, 88, 93, 95, 96, 98, 5200, 02, 04, 37), Popa Nicolaie (5109, 10, 12, 13—15, 19, 16, 19, 22, 24, 25, 35, 39, 41, 43, 49, 50, 53, 57, 60, 63, 67, 69, 71, 95, 98, 5207, 10, 24, 29, 40, 45), Tărăbuţă Mihai (5068, 70, 72—74, 79—84, 86, 89, 93, 96, 99, 5100, 03, 07, 09, 10, 12, 13, 15, 15, 16, 18—27, 29—31, 33—36, 39—41, 43—46, 49, 50, 52—55, 63—65, 70—80). Cl. XI. Ion Maftei (5111, 21, 43, 67, 93, 5210, 11, 36, 44, 45), Stancu Ion (5067, 68, 70—76, 78, 80, 83, 84, 85, 90, 92, 94, 95, 97—100, 03—05, 09—25, 28—30, 34, 35, 38, 41, 43—4, 47—550, 52—71, 73—75, 80, 81, 83—97, 99, 5200, 02—04, 08, 09—12, 24, 25, 31, 35, 42). Şc.m. 3. Ionescu Marcel (5110, 11, 16, 17, 26, 35, 39, 41, 49, 60, 67, 69, 70, 73, 75, 83, 89, 5202, 03, 12, 16, 17, 21, 24, 31, 36, 38, 39, 42, 43, 44, 48, 49, 50, 51, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 67, 70, 71, 74, 81, 83, 85), Sandu Ion (5118, 20, 21, 23, 45, 50, 52, 53, 54, 64, 93, 95). Cl. XI. Diaconescu Ion (5157—70, 76, 88, 93, 95, 98, 5202, 07, 08—12, 21, 24—26, 29, 31, 35, 39—42, 44—47), Zamfir Cornel (5183, 94, 9001, 08—12, 14—20, 29, 31, 35, 39, 41—53, 55—57, 62—64, 70, 80, 91, 93, 96, 5202).

PLOIEŞTI. Lc.m. 1. Cl. VI. Breteanu Sabina (8108, 11, 12, 16, 18, 19, 22), Raluca Olteanu (1802, 05, 06, 08, 11, 12). Cl. VII. Rădulescu Natalia (1790, 99, 1000, 02, 03, 06, 07, 09, 10, 13). Cl. VIII. Alexandru Eugenia (1816, 17, 18, 24, 25, 29), Bojoagă Petre (1001, 03, 16, 14, 18, 20, 26, 29), Bădulescu Mihai (1802, 03, 06, 07, 03, 09, 15, 17, 22, 24, 26, 29, 30, 32, 36, 37, 41, 43, 5225), Bușca Viorel (1806, 13, 16, 22, 32, 33, 35, 37, 5231, 42), Circioiu Victoria (1800, 02, 03, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 5218, 24, 26), Cordună Georgeta (1801, 02, 16, 17, 18, 24, 26, 29), Diaconu Aurelia (1803, 06, 07, 03, 09, 10, 15, 5174), Dumitrescu Gabriel (1816, 18, 19, 20, 21, 21, 22, 24, 27, 30, 31, 34, 35, 35, 37, 33, 41), Florea Sami (1790, 02, 03, 05, 07, 03, 09, 11, 16, 18, 20, 22, 25, 29, 5116). Mateescu Cezar (1790, 97, 98, 1801—09, 15 16, 20, 22, 23, 29, 5210, 24, 31), Mihai Olga Doina (1801, 02, 17, 29), Năftănăilă Gabriela (1816, 18, 26, 23, 29), Peneş Georgeta (1816, 17, 18, 24, 25, 29), Rothach Jossé (1802, 03, 06, 07, 08, 30, 31, 37), Silaeva Silvia (1816, 17, 25, 30, 31, 32, 33—37, 6215, 17, 18, 24, 31, 35, 42, 70, 71), Soare Cristel (1801—11, 16, 18, 20, 22, 28, 29, 510, 2500, 333, 42), Ştefănescu Viorel (1801—09, 16, 18, 23, 29, 5181, 93, 5210, 24, 31), Vasilescu Ion (1817, 23, 24, 29, 5169, 5203, 12, 16, 17, 31, 33, 39, 42, 44), Vlădăreanu Sami (1796, 1801—03, 06—11, 15, 16, 18, 20, 22, 26, 30, 35, 37, 39). Cl. IX. Chiuţă Gheorghe (4754, 4960, 5033, 38, 48, 49, 5111, 17, 33, 45), Enescu Sorin (5070, 93, 5126, 31, 41, 44, 57, 70, 75, 80, 83), Iacobescu Gabriel (5167, 70, 75, 80, 83, 5208, 17, 21, 74, 85, Mircea Cornelia (5110, 16, 20, 30, 54, 60, 5202, 21, 24, 3042), Rusu Adrian (5110, 16, 39, 70, 5217, 21, 23). Cl. X. Apostoleanu Anca (5112, 13, 15, 13, 19, 20, 22, 24, 26, 31, 35, 39, 41, 45, 45, 80, 91, 93), Apostol Gheorghe (5109, 10, 15, 16—18, 19, 26, 30, 31, 35, 39, 45, 80, 91, 93, 5207, 08, 21, 24, 31), Aisner Sergiu (5109—13, 15—26, 29, 31, 35, 39, 41, 44—46, 49, 52, 57, 65, 75, 78, 80, 83, 83, 89, 91, 93, 5202, 07, 03, 21, 24, 29, 31, 32, 34, 37, 44), Andreiu Tudor (5160, 5202, 07, 08, 10, 14, 17, 21, 24, 29, 43, 49, 59, 52, 53, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 67), Costache Tudor (5160, 70, 5202, 07, 03, 10, 14, 21, 24, 29, 31, 33, 43, 49, 50, 52, 53, 57—62, 66, 67), Daschievucu Virgil (5110, 13, 15, 16, 26, 29, 31, 35, 39, 41, 44, 75, 80, 88), Dumitru Corneliu (5160, 70, 5202, 07, 08, 10, 21, 24, 43, 50, 57—62, 66, 67), Hovament Tiberiu (5160, 70, 5202, 07, 21, 24, 43, 50, 63, 57, 53, 61, 62, 66, 67), Ianca Petre (5160, 5202, 07, 08, 10, 21, 24, 29, 40, 57, 59, 61), Manea Gheorghe (5160, 63, 5202, 07, 03, 10, 21, 24, 29, 32, 40, 43, 57, 59, 61, 62), Neacşu Viorel (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 81—22, 24—25, 29—31, 35, 39, 41, 45, 46, 49, 52, 57, 58—60, 63, 67, 78, 80, 83, 88, 95, 5202, 07, 03, 10, 21, 24, 31 35, 40, 42, 46), Pîrvulescu C-tin (5112, 13, 15, 24, 25, 29, 31, 34, 35, 45, 47, 55, 70, 75, 80, 83), Roşu Anton (5113, 26, 30, 35, 60, 70, 80, 5202, 07), Voicu Gheorghe (5160, 5207, 08, 10, 21, 24, 48, 57, 59, 61, 62), Weisman Martin (5110, 15,

16, 18—21, 25, 26, 29, 31, 35, 39, 41, 49-. Cl. XI. Constantinescu Marius (5059, 60, 73, 74, 77, 78, 83, 87, 93, 99, 5103, 05, 09—23, 25, 26, 31, 35, 39, 41, 44—46, 49, 50, 52, 55, 58—60, 61, 67, 75, 80, 82, 84, 89, 91, 95, 202, 07—12, 21, 24, 26, 27, 31, 36—38, 40, 41, 44, 47—49, 51, 54, 57, 59—63, 65, 66, 70, 74, 78, 83 85, 88, 94), Florescu Florin (5141, 58, 60, 68, 5207—09), Lazea Adrian (5157, 58, 60—63, 67, 68, 70, 207—11, 36, 38), Reghină Petre (5109, 10, 13—16, 26, 29, 30, 35, 39, 41, 44, 46, 48, 49, 57—62, 67, 69, 70, 75, 80, 83, 88, 91, 202, 07—11, 14, 18, 21, 24, 25, 29, 31), Tomescu Dumitru (5110, 12, 13, 15, 16, 18—20, 22, 24—26, 30, 35, 39, 41, 45, 46, 49, 57—60, 63, 67, 78, 80, 83, 88, 93, 95, 202, 07, 08, 10, 21, 29, 31, 36, 42, 45). Ş.m. 2. Cl. VIII. Gîdiuţă Simina (1802, 03, 06, 07, 09, 11, 30, 36, 37), Laszlo Vasile (1802, 06, 07, 11, 30, 35—37), Radu Vasile (1801—04, 07, 08, 11, 36, 37, 5270), Cl. X. Căpuz Maria (5113, 15, 16, 26, 35, 46, 70, 73, 76, 92, 5202). Ş.m. 3. Cl. IX. Lecca Octavian (5145, 49—55), Marinescu Iolanda (5164, 65, 70, 77, 93, 95, 5216, 17, 21, 24, 36, 39, 44), Păstrămoiu Constanţa (5160, 67, 5200, 12, 17, 18, 21, 24, 34, 35, 39, 42, 44), Rupinescu Manuela (5118, 50, 60, 65, 70, 93, 5200, 18, 21, 24, 30, 44), Tănase Florica (5118, 50, 60, 70, 93, 95, 5200, 18, 21, 36, 39, 42, 44). Cl. X. Georgescu Cristian (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18—26, 31, 35, 36, 39, 41, 43—45, 49, 50, 52—54). Cl. XI. Gheorghiu Constantin (5109—11, 13—17, 19, 22, 25, 35 42, 57—60, 62, 67, 69, 70, 81, 97, 5202, 07—11). Ş.m. 4. Cl. IX. Carcalciuc Valentin (5110, 16, 18—21, 23, 25, 34, 49, 50, 52, 53, 55, 60, 64, 69, 95). Cl. X. Bădulescu Ion (5110, 15, 16, 35, 36. 39, 49, 70, 5207, 08, 10). Cl. XI. Andronescu Gheorghe (5109, 14, 30, 31, 36, 41, 43. 48, 49, 53, 56, 63, 76. 83. 91, 207—12, 24—26, 31. 34, 40, 44—46, 49).

POJOJENA. Şc. cl. de 7 ani. Cl. VII. Iancovici Elena (1816, 18, 22, 23, 34, 37, 40).

PREDEAL (Braşov). Şc.m. Cl. IX. Cardos Vladimir (5110, 22, 25, 57, 60, 63, 67, 70, 79, 5202, 03, 12, 17, 21, 31, 34, 37—39, 42—44).

PUCIOASA. Ş.m. Cl. VI. Diaconescu Ion (1790, 1801—04, 06, 08, 11), Pavel Constantin (1801—06, 08, 11), Teodoroiu Daniel (1801—04, 06, 08, 11). Cl. VIII. Firefeanu Virgil (1802, 03, 06—11, 16, 23, 30, 35—37, 41, 5208, 48, 57—59, 61), Zegru Gheorghe (1775, 77, 78, 80, 90, 96, 1802, 03, 06—08, 11, 5096, 5130). Cl. IX. Bănescu Lucian (5110, 16—21, 24, 39, 60, 75, 5218, 24, 31, 42), Banu Gheorghe (5112, 16, 18, 20, 21, 39, 49, 57, 60, 67, 70, 75, 5208), Ionescu Corneliu (5110, 18, 24, 39, 60, 64, 65, 83, 5203, 24, 31, 42), Matei Gheorghe (5090, 1151, 17, 21, 23, 25, 29, 30, 49, 52, 57, 60, 65, 67, 74, 75, 83, 86, 88—91, 93, 95, 96, 5200, 02, 07—10, 17, 21, 24, 31, 36, 39, 41, 44—46), Popa Tiberiu (5510, 16—18, 20, 21, 39, 41, 44, 60, 70, 75, 5208, 21, 39), Rădulescu Mihai (5110, 12, 16, 18, 20, 21, 23, 30, 41, 44, 57), Ruxăndroiu Aurel (5068, 5110, 16, 18, 20, 30, 39, 49, 60, 64, 65, 67, 75), Rizescu Silvia (5116, 20, 21, 30, 60, 70, 75, 83, 5221, 24, 31, 36, 39, 42, 44), Stoica Caliopia (5118, 21, 23, 39, 44, 75, 5202, 08, 24, 39, 42, 44), Stoica Maria (5110, 16, 18, 20, 21, 25, 60, 63, 64, 75, 95, 96, 5202, 08, 38, 45, 46), Tatu Petre (5110, 18, 20, 21, 39, 52, 60, 6,5 70, 5218, 24, 42), Tîrcă Gheorghe (1710, 17, 38, 75, 78, 96, 97, 44, 58, 4532, 34, 37, 85, 89, 4604, 4979, 99, 5001, 67, 89—91, 5170). Cl. X. Anca Daniel (5109, 12, 13, 21, 24, 26, 29, 30, 35, 39, 41, 43, 45, 46, 50, 52, 53, 57, 60, 63—65, 67, 70, 75, 83, 86, 91, 93, 95, 5200, 02, 07, 08, 10, 14, 18, 21, 24, 31, 32, 42, 44, 46), Bucăloiu Nicolae (5110, 15, 16, 18, 19, 25, 35, 39, 60, 63, 67, 75, 5207, 08, 10), Chivoiu Mihail (5163, 64, 75, 83, 95, 96, 5202, 07, 08, 10, 31, 40, 42, 44, 46), Coman Ion (5110, 16, 19, 30, 45, 60, 63, 75, 5207, 08, 21, 46), Ene Ion (5113, 27, 29, 35, 36, 38, 44, 46, 60, 69, 71, 85, 91, 93, 94, 5207, 08, 10, 13 23, 35, 36, 38, 39, 42—46), Levifchi Cezarina (4246, 5110, 16, 18, 19, 25, 26, 30, 39, 43, 45, 46, 50, 53, 60, 63, 75, 83, 96, 5207, 31), Lupu Victor (5110, 16, 18, 19, 24—26, 30, 39, 43, 45, 46, 50, 53, 60, 63, 65, 83, 5221, 24), Manea Iulia (5118, 19, 29, 35, 60, 63, 65, 75, 93, 5202, 07, 09, 12, 24, 38, 44—46), Măntescu Maria (5118, 60, 63, 67, 96, 5207, 08, 10, 24, 40, 46), Popa Alexandru (5109, 10, 13, 15, 16, 18—20, 200—24, 30, 35, 39, 44, 80, 50, 54, 55, 60, 61, 63, 67, 75, 83, 93, 96, 5200, 02, 03, 07, 08, 24, 31, 36, 42, 44—46), Rîmbu Revişoara (5110, 15, 17, 26, 29, 35, 39, 41, 44, 49, 50, 53, 55, 57, 60, 63, 65, 67, 69, 75, 95, 96, 5207, 08, 10, 12, 14, 18, 21, 24, 35, 39, 40, 42—46). Cl. IX. Diaconescu C. Radu (5096, 97, 99, 101, 03, 22, 25, 23, 29, 32, 35, 38—41, 44, 48, 58, 60—65, 67, 70, 75, 80, 81, 85, 88, 93, 97, 202, 67—72).

ORAȘ DR. PETRU GROZA. Ș.m. Cl. X. Potlog Constantin (5109, 10, 12, 35, 39, 46, 75, 91, 5202, 07).

RĂDĂUȚI. Ș.m. 2. Cl. X. Kümmek Iacob (5109, 10, 13, 15, 16, 35, 91, 5207, 08, 10), Weinstein Jack (1790, 93, 94, 97—99, 5112, 16, 18—21, 34, 44, 49, 52—55).

RĂCARI. Ș.m.m. Cl. X. Niculae N. Maria (5160, 75, 5207, 08, 24, 48, 59, 57, 61).

REGHIN. Ș.m. 2. Cl. VIII. Berecki Boldizar (M.F.L. 736, 44, 46, 47, 65, 76), Vass Istvan (M.F.L. 746—48, 69, 76).

REȘIȚA. Ș.m. 8. Cl. VII. Calotă Gheorghe (1775, 77, 79, 80, 90, 1802, 06, 11, 14, 15).

RIMNICU VÎLCEA. Ș.m. N. Bălcescu. Cl. VIII. Tigneanu Ion (1793, 99, 1800, 02, 03, 05, 07, 09, 11, 13, 14, 16, 24, 29), Cl. XI. Gheorghevici Mihai (5112, 13, 15, 41, 75—62, 67, 75), Ș.m. V. Roaită. Cl. VIII. Droașcă Bogdan (1802, 03, 06, 07, 10, 11, 29, 5149, 5242, 44), Ghelmez Florentina (1795, 98, 99, 1802, 03, 06—10, 16, 18, 24, 28, 29, 5152, 93, 95, 5238, 42). Cl. X. Neghină Adriana (5109, 12, 15, 18—20, 25, 35, 43, 45).

RIMNICU SĂRAT. Ș.m. Al. Vlahuță. Cl. IX. Șerban Mihai (5118, 45, 49, 52, 53, 93, 95, 5200, 12, 18, 42, 44), Cl. X. Georgescu Gheorghe (5113, 15, 16, 19, 21, 25, 35, 36, 49, 5207, 08, 40), Niculai Tutumea (5109, 10, 13, 15, 16, 18—23, 25, 35, 39, 49, 52, 93, 95, 5207), absolvent Soiță Ileana (5157—60, 62, 67, 69, 5207, 08, 09, 11, 26).

ROMAN. Ș.m. Cl. X. Niculescu G. (5020, 23, 24, 27, 30, 31—35, 37, 41, 43, 45, 54, 55, 69, 70, 83, 85, 87, 89, 96, 5135, 39, 49), Rugină Vasile (5109, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 25, 29, 35, 39). Ș.m. muncitorească. Cl. X. SGoagă Constantin X(5109—11, 13, 15—17, 57, 60, 5202).

ROȘIORII DE VEDE. Ș.m. Tudor Vladimirescu. Cl. IX. Michi Toader (5139, 41, 44, 49, 75, 80, 216, 35, 44). Cl. XI. Alexandrotor Carmen (5157—59, 61, 62, 67, 69, 80, 208, 10—12).

ROZNOV. Ș.m. Roznov. Cl. VI. Siomion Violeta (1801—03, 05, 06).

RUPEA. Ș.m. St. O. Iosif. Cl. VIII. Diaconescu Nicolae (1785, 91, 1806—29, 5165, 70, 75, 93, 95, 5200, 02, 16, 38, 42).

SALONTA. Ș.m. Arony Janoș. Cl. VIII. Ban Aurelia (1801, 04, 24, 29, 30, 35, 37, 41, 5193, 05), Mibacsko Ștefan (1802, 06—09, 13, 15), Kueres Herța (1802, 03, 06, 07, 09, 10, 15, 18, 22, 29, 5193, 95), Olar Anred (1802, 06—09, 13, 15, 18, 24, 29), Tudor Dan (1801—09, 11). Cl. IX. Bologh Erzceset (MF.L. 780, 824, 32, 35, 37). Cl. X. Borcea Valeria (5110, 15, 16, 39, 60, 67, 80, 5203, 10, 24, 31, 48—50, 57, 59, 61, 62, 70).

SATU MARE. Ș.m. M. Eminescu. Cl. VIII. Feszlinger Tiberiu (1790, 1802, 03, 06—10, 16, 18, 30, 35—37, 5224, 36, 48, 61). Cl. IX. Pop Miklos (M.F.L. (754, 55, 80, 824, 27, 32, 37), Varga Ionescu (M.F.L. 778, 80, 81, 824, 27, 32, 37). Cl. X. Aniţaș Lucian (5163, 70, 5207, 08, 10, 17, 18, 21, 33, 44—46), Neamț Gavril (5118—21, 23, 25, 53, 54, 63, 93, 95, 98, 5242, 45), Orsan Adrian (5110, 15, 18—22, 29, 35, 60, 5202), Pop Nicolae (5110, 15, 18, 20—25, 35), "Liceul Kölcsey Ferencz. Cl. VIII. Strubyovics Zoltan (1802, 03, 06—10, 16, 24, 31), Cl. IX. Weisz Andrei (5097, 5116, 39, 41, 45, 52, 55, 67, 96, 5207), Weisz Ioan (5116, 20, 45, 49, 67, 95, 5221, 24, 39, 42). Cl. X. Bonyhady Marta (M.F.L. 809, 17, 18, 20, 24, 32, 34, 35), Popovics Iosef (M.F.L. 787, 802, 31, 32, 35).

SĂRMAȘ. Ș.m. Cl. IX. Borș Iacob (5110, 12, 16, 20, 39, 41, 53, 60, 67, 5217, 29, 36), Onac Gavril (5110, 12, 16, 39, 50, 53, 60, 67, 86, 5221, 25).

SĂLIȘTEA (Brașov). Ș.m. Cl. VIII. Iuga Ion (1775, 78—80, 82, 1801—09).

SĂVENI (Ploiești). Ș.m. Cl. VIII. Andrei Mircea (1801—04, 06, 09, 1811, 14, 16, 18, 19, 28, 29). Cl. IX. Cuza Mihai (5110, 15, 16, 19, 20, 25, 30, 35, 43, 69, 70), Nurses Gheorghe (5110, 19, 20, 22, 30, 35, 43, 70, 79, 5207, 08).

ORSZÁGOS·MÚZEUMI·KÖNYVTÁR·ORSZ
1883

CĂTRE REZOLVITORII DE PROBLEME

Corespondenții care ne trimit probleme rezolvate trebuie să redacteze fiecare problemă separat, însoțind-o de toate calculele necesare și de figuri desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Nu se vor separa problemele de matematică de cele de fizică și vor fi trimise în același plic, așezate în ordinea numerică.

Se primesc lunar cel puțin zece soluții numai la problemele și exercițiile din ultimele trei numere apărute. Pe plic se va scrie localitatea și școala pe care o urmează rezolvitorul pentru a se evita confuzii la întocmirea rubricii rezolvitorilor de probleme și a listei celor evidențiați.

Problemele care se propun ne către colaboratorii revistei să fie clar alcătuite și însoțite de soluții, să fie personale, iar nu luate din cărți sau reviste. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au rezolvat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, dar necorespunzătoare, nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse au fost publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde a mai apărut enunțul sau soluția problemei respective.

Corespondentul nostru care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce, să schițeze cîte o notă rezultată dintr-o observație făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele. Aceste note să fie *refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise*, pentru ca redactarea lor să fie *cît mai clară și concisă*. Figurile să fie făcute separat. În redactare se vor evita prescurtările. Nu se va scrie: $\| = ; \sim ; * \ ^* \ _* ; \perp ; \|$; Tr., etc. iar trecerea de la un calcul la altul să fie explicată pentru a se putea urmări ușor desfășurarea unei demonstrații. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

La publicarea problemelor rezolvate se vor menționa rezolvitorii care au dat o bună redactare și o soluție interesantă, sau mai multe metode de rezolvare.

Elevii claselor IX—XI sau studenții vor trimite soluții la problemele propuse pentru clase VIII—XI. Problemele rezolvate trebuie să fie din ultimele trei numere apărute în G.M.F.—B sau M.F.L. Problemele rezolvate de matematică și fizică vor fi expediate odată în cursul unei luni într-un singur plic și vor fi însoțite de un borderou cu numărul problemelor, scrise în ordine crescîndă. Pe plic se va scrie școala, clasa și localitatea rezolvitorului.

Elevii claselor V—VII vor fi anunțați la rubrica rezolvitorilor de probleme dacă trimit cel puțin 7 probleme bine rezolvate, iar elevii claselor VIII—XI, pentru cel puțin 12 probleme bine rezolvate.

Autorii sînt rugați ca la întocmirea articolelor și notelor să țină seama de următoarele: articolele sau notele să fie scrise clar cu cerneală sau dactilografiate la două rînduri și pe o singură parte a foii, figurile să fie desenate îngrijit și pe o foaie separată.

Autorul să semneze clar lucrarea personală pe care o trimite pentru publicat.

— Materialele care nu corespund profilului G.M.F.-B. nu vor fi publicate.

În G.M.F.B. nr. 3, pag. 153 s-a publicat: *Un concurs pentru elaborarea unor probleme legate de practică.* Participanții la acest concurs pot fi: profesori, ingineri, maiștri, studenți sau elevi. Concursul se încheie la 1.XI.1962.

— Fiecare abonat este rugat să facă cunoscută G.M.F.-B și altor colegi, pentru a face abonamentele din vreme în vederea planificării tirajului lunar.

— Abonamentele se pot face individual sau colectiv prin oficiile poștale locale sau prin factorii poștali.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. E. RUSU	Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARKUŞEVICI	Şiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV	Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV	Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI	Metoda inducţiei matematice.
6. GH. MIHOC	Elemente de calculul probabilităţilor.
7. H. IONESCU	Calcule numerice.
8. A. I. MARKUŞEVICI	Arii şi logaritmi.
9. A. I. GHELFOND	Rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi.
10. O. SACTER	Despre conice şi alte curbe.
11. ION IONESCU	Maxime şi minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL	Cometele.
13. S. SKLOVSKI	Radioastronomia.
14. V. ATANASIU	Structura materiei.
15. V. V. SARONOV	Soarele şi observarea lui.
16. O. KREINDLER	Elemente de calcul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVŢEV	Experienţe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI	Nomograme.
19. A. KAHANE	Elemente din teoria congruenţelor de dreapta.
20. GH. ŢIŢEICA	Culegere de probleme de geometrie, ediţia IV, (revăzută de GH. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY	Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.
22. N. STĂNESCU	Electronul.
23. V. SERGIESCU	Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN	Cicloida.
25. C. BORŞ	Noţiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI	Introducere în radioactivitate.
27. M. HEROVANU	Introducere în fizica atmosferei.
28. C. G. BEDREAG	Bibliografia fizicii romîne.
29. I. S. DUBNOV	Erori în demonstraţiile geometrice.
30. H. STEINHAUS	Caleidoscop matematic.
31. C. POPOVICI	Stelele, date fizice, structura, originea şi evoluţia lor.
32. C. DRIMBĂ	Elemente de mecanică cerească.
33. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (I).
34. NICOLAE MILEA	Elemente de geomagnetism.
35. GH. A CHIŢEI	Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
36. G. PETRESCU	Cutremure de pămînt.
37. C. IONESCU-BUJOR	Elemente de transformări geometrice (II).
38. O. SACTER	Olimpiade matematice.
39. A. I. MARKUŞEVICI	Numere complexe şi reprezentări conforme.
40. I. S. GRADSTEIN	Teorema directă şi reciprocă.
41. A. I. HINCIN	Fracţii continue.
42. V. A. USPENSKI	Unele aplicaţii ale mecanicii în matematică.
43. V. G. BOLTEANSKI	Ce este derivarea?
44. G. N. BERMAN	Despre numere şi studiul numerelor.
45. A. IAGLOM şi I. IAGLOM	Probleme neelementare tratate elementar.
46. E. D. FEODOROV	Ciclotronul

Litografia şi Tipografia Învăţămîntului, — c. 4335

Lei 1,50

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE
DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

(SERIA B)

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XIII august 1962

8

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Anul XIII, nr. 8 — august 1962

SUMARUL

		Pag.
1.	La marea sărbătoare a eliberării patriei noastre de sub jugul fascist de C. Ionescu-Bujor	449
2.	Introducere în teoria algoritmilor de S. Marcus	451
3.	Blaise Pascal, de Maria Popescu, Cluj	462
4.	Un aparat de fizică construit cu mijloace locale, de D. Mondescu, Tulcea	465
5.	Cîteva cunoştinţe despre transformator, de Török Istvan, Cluj	471
6.	Note matematice, de T. Căsăndroiu şi M. Batineţu	476
7.	Caleidoscop matematic, de I. Teodorescu, Galaţi	481
8.	Probleme rezolvate (4671; 4677; 4681; 4682; 4684; 4686; 4687; 4688; 4693; 4694; E: 1670; 1674; 1676; 1677; M.F.L.: 818; 819; 820; 821; E: 753; 754; 755)	484
9.	Probleme propuse (5397—5426	498
10.	Subiecte date la cea de-a IV-a Olimpiadă internaţională de matematică, ţinută în iulie 1962 în R.S. Cehoslovacia (5427—5433)	502
11.	Exerciţii şi probleme propuse pentru clasele V—VII (E: 1871—1881)	503
12.	Cărţi noi	505
13.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	506

ANUL XIII 8 AUGUST

COMITETUL DE REDACŢIE

Ailincăi M., profesoară; *Atanasiu V.*, conf. univ., redactor pentru fizică; *Cristea I.*, asistent; *Ionescu-Bujor C.*, prof. univ.; *Ionescu-Ţiu C.*, profesor, redactor pentru matematică; *Kiss E.*, conf. univ.; *Koch Fr.*, lector; *Kovacs K.*, conf. univ; *Lévai Şt.*, asistent; *Muşat I.*, profesor; *Petrovanu A.*, profesor; *Sacter O.*, conf. univ., redactor şef; *Simionescu D.*, conf. univ.

REDACŢIA: Str. Academiei, 14 — Tel. 14.46.53 — Bucureşti I

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus.

1883
KÖNYVTÁR·ORSZÁGOS

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ
(SERIA B)
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XIII, nr. 8 august 1962

LA MAREA SĂRBĂTOARE A ELIBERĂRII PATRIEI NOASTRE DE SUB JUGUL FASCIST

de prof. univ. C. IONESCU-BUJOR

Poporul romîn sărbătorește la 23 August, 18 ani de la eliberarea patriei de sub jugul fascist.

Sub conducerea Partidului Muncitoresc Romîn oamenii muncii au cucerit în acest interval, victorii uriașe în construcția socialismului, făurindu-și o viață liberă și fericită. Exploatarea omului de către om a fost sfărîmată pentru totdeauna, a fost creată o industrie puternică, modernă, care se dezvoltă continuu, iar în acest an s-a îndeplinit cu succes socializarea agriculturii în întreaga țară.

Revoluția culturală a deschis larg porțile culturii și învățămîntului oamenilor muncii și fiilor acestora. S-a generalizat învățămîntul de 7 ani și trecerea treptată la învățămîntul de 8 ani, crește continuu numărul elevilor cuprinși în școala medie, a căpătat o largă dezvoltare învățămîntul profesional și tehnic, iar în învățămîntul superior sînt astăzi de 3,5 ori mai mulți studenți decît în 1938.

Învățămîntul este astăzi gratuit, toți elevii claselor I—VII primesc cărți gratuit, iar un număr mare de elevi și studenți primesc burse. An după an regimul nostru democrat popular a alocat sume însemnate pentru construcții de școli, instituții de învățămînt superior, laboratoare, cămine și cantine. Complexele studențești din București, Cluj, Iași, Timișoara și alte centre, localurile moderne de școli, construite în ultimii ani constituie realizări cu care poporul nostru se mîndrește.

Cercetarea științifică se dezvoltă rodnic. Ea contribuie larg la rezolvarea problemelor de ordin tehnico-științific puse de economia și cultura socialistă în procesul lor de creștere.

Toate aceste uriașe transformări, ascensiunea continuă și rapidă spre culmile progresului socialist au fost înfăptuite datorită îndrumării marxist-leniniste a Partidului nostru, conducerii înțelepte a Comitetului său Central, în frunte cu tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej, elanului creator al oamenilor muncii dornici să-și făurească un viitor luminos în țara lor liberă.

Fiecare zi întărește tot mai mult forța poporului nostru, fiecare zi cimentează tot mai strîns unitatea poporului sub steagul biruitor al Partidului.

În decurs de 18 ani, pe drumul străbătut, poporul nostru a avut necontenit sprijinul frățesc al Uniunii Sovietice și al celorlalte țări socialiste. În complexul colaborării continui s-a cimentat o prietenie de nezdruncinat între poporul romîn, popoarele sovietice și ale celorlalte țări socialiste.

Puterea întregului sistem socialist sporește mereu. Această putere se manifestă pe tărîm economic, social, politic și cultural asigurînd cuceririle socialismului contra oricărei agresiuni pe care capitalismul muribund ar dori să o dezlănțuie.

Sistemul mondial socialist constituie un puternic bastion al păcii care se opune cu fermitate încercărilor monopolurilor de a provoca un al treilea război mondial.

Acum, cînd navele cosmice „Vostok 3" condusă de A. Nicolaev și „Vostok 4" condusă de P. Popovici au aterizat cu bine, întreaga lume își dă seama de superioritatea științei și tehnicii sovietice puse în slujba păcii și progresului omenirii.

Luptei pentru pace, purtată de țările socialiste, i se alătură pe întregul glob, uriașe mase de oameni. Congresul pentru pace de la Moscova, la care au fost reprezentate popoarele din toate regiunile lumii, ilustrează în mod grandios, solidaritatea acestora în lupta pentru apărarea vieții omenirii și a patrimoniului ei social-cultural.

Al 8-lea Festival al Tineretului și Studenților ținut la Helsinki, a reunit peste 18 000 de delegați din 142 țări și exemplifică astfel, puternica dorință a tineretului de pretutindeni de a se cunoaște, de a trăi în pace și prietenie.

Victoriile obținute în construirea socialismului întăresc forțele socialismului, contribuie la slăbirea pozițiilor agresoare ale capitalismului și deschid astfel, orizont tot mai larg păcii în lume.

Poporul nostru, muncind eroic pentru desăvîrșirea construcției socialismului aduce prin aceasta o contribuție prețioasă cauzei păcii.

În această măreață luptă, oamenii muncii din țara noastră dau viață sarcinilor stabilite de Congresul al III-lea al P.M.R. Lupta plină de însuflețire a oamenilor muncii pentru realizarea și depășirea acestor sarcini formează pentru tineretul școlar o carte vie din care să învețe devotamentul față de partid, dragostea de patrie, dragostea de muncă, spiritul tovărășesc, conduita morală comunistă.

Tineretul școlar are datoria să se ridice la înălțimea eroilor din filele acestei cărții vii și acest lucru îl poate realiza numai urmînd cu elan îndemnul rostit de marele Lenin prin cuvintele: „Învățați, învățați, învățați".

INTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN TEORIA ALGORITMILOR

SOLOMON MARCUS
Facultatea de matematică și fizică, Universitatea din București.

O definiție provizorie și un scurt istoric

Prin *algoritm* se înțelege, în aritmetică, mulțimea tuturor operațiilor — date în ordinea în care ele intervin — necesare pentru rezolvarea tuturor problemelor dintr-o anumită clasă de probleme. Această definiție va deveni ceva mai clară în cele ce urmează.

În Evul Mediu, se dădea numele de algoritm unei reguli cu ajutorul căreia se efectua una dintre cele patru operații aritmetice în sistemul de numerație zecimală. Reguli de acest tip au fost indicate, în secolul al nouălea, de către matematicianul uzbec H o r e z m i (în arabă — Al. Horezmi). După numele acestuia, regulile de efectuare a calculelor aritmetice au fost denumite, în Europa, *algorizm*. Mai tîrziu *algorizm* a devenit *algoritm*, probabil sub influența cuvîntului grec αριθμοσ — număr [1].

Algoritmul operației de scădere

Dat fiind că cei mai frecvenți algoritmi sînt legați de operațiile aritmetice elementare, vom începe cu o analiză logică a uneia dintre aceste operații. Să luăm, de exemplu, operația de scădere a două numere mai mici decît o sută. Dacă este vorba de o scădere de tipul 53—48, operația se efectuează altfel decît în cazul unei scăderi de tipul 53—21, deoarece în primul caz cifra unităților descăzutului este inferioară cifrei unităților scăzătorului. Generalizînd, să considerăm două numere *ab* și *cd* (*a*, *b*, *c* și *d* reprezentînd cifre de la 0 pînă la 9) și să presupunem că *ab* este mai mare ca *cd*. Vom face o analiză a operației de scădere a lui *cd* din *ab*, anume vom descompune această operație în actele elementare din care ea este formată. Rezultatul va fi, evident, un număr mai mic decît 100, deci format din cel mult două cifre; să notăm cu f cifra unităților și cu e cifra zecilor. Operația de scădere se descompune în următoarele „acte elementare": 1) Verifică dacă d este mai mare ca b; în cazul negativ, 2) efectuează scăderea $b—d$; 3) pune $f=b—d$; 4) efectuează scăderea $a—c$; 5) pune $e=a—c$ și încheie operația. Dacă d este mai mare ca b, atunci actele elementare 2), 3), 4) și 5) se înlocuiesc prin: 2′) Efectuează adunarea $b+10$; 3′) efectuează scăderea $(b+10)—d$; 4′) pune $f=(b+10)—d$; 5′) efectuează scăderea $a—1$; 6′) efectuează scăderea $(a—1)—c$; 7′) pune $e=(a—1)—c$ și încheie operația.

Am obținut, în total, 11 acte elementare. Cel numerotat prin 1) constă în verificarea unei anumite *condiții logice* anume condiția ca a să fie mai mare decît b. Această condiție, pe care o vom nota cu C_1, este susceptibilă de două valori logice, valoarea „adevărat" și valoarea „fals". După cum se realizează prima sau a doua dintre aceste valori,

urmează mai departe actele elementare 2'), 3'), 4'), 5'), 6') și 7') sau actele elementare 2), 3) 4) și 5). Toate aceste acte elementare sînt de cu totul altă natură decît actul 1). Le vom numi *operatori* și le vom reprezenta prin O_2', O_3', O_4', O_5', O_6', O_7', respectiv O_2, O_3, O_4, O_5. Cu aceste notații, schema logică a operației de scădere a lui *cd* din *ab* este următoarea:

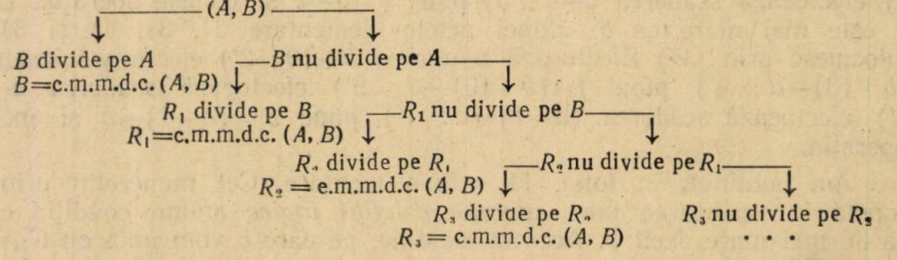
$$C_1 \overset{1}{\uparrow} O'_2\, O'_3\, O'_4\, O'_5 O'_6\, O'_7 \overset{\downarrow}{1} O_2 O_3 O_4 \frown_5.$$

Dacă C_1 se verifică, atunci trecem la aplicarea operatorului situat imediat la dreapta, adică O_2'. Aplicăm apoi operatorii O_3', O_4', O_5', O_6', O_7', în ordinea de la stînga la dreapta. Operatorul O_7' conține indicația de încheiere a operației. Dacă C_1 nu se verifică, atunci săgeata de indice 1, îndreptată în sus și situată la dreapta lui C_1, ne atrage atenția că nu se aplică operatorul imediat următor, adică O_2', ci se trece la aplicarea operatorului situat imediat la dreapta săgeții de indice 1, îndreptate în jos, anume operatorul O_2. După aceasta se aplică O_3, O_4 și O_5. Acesta din urmă conține indicația de încheiere a operației.

Algoritmul lui Euclid

Să considerăm două numere, de exemplu 360 și 252. Ne propunem să determinăm cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al acestor numere, adică cel mai mare număr la care se împart exact atît 360 cît și 252. Pentru aceasta se întrebuințează următoarea regulă: Se împarte 360 la 252; dacă împărțirea s-ar face exact, atunci c.m.m.d.c. ar fi chiar 252. Însă împărțirea nu se face exact, obținîndu-se restul 108. Se împarte atunci 252 la 108; dacă împărțirea s-ar face exact, atunci c.m.m.d.c. ar fi 108. Însă nici această împărțire nu se face exact, deoarece se obține restul 36. Împărțind acum 108 la 36, constatăm că nu mai obținem nici un rest. Rezultă că 36 este c.m.m.d.c. al numerelor 360 și 252.

Să generalizăm aceste considerații. Fie A și B două numere întregi pozitive ($A > B$). Fie R_1 restul împărțirii lui A la B, R_2 restul împărțirii lui B la R_1, R_3 restul împărțirii lui R_1 la R_2, ..., R_{n+1} restul împărțirii lui R_{n-1} la R_n și așa mai departe, pînă obținem un rest egal cu zero. Dacă $R_1 = 0$, atunci c.m.m.d.c. al numerelor A și B este chiar B; dacă nu, ultimul rest diferit de zero este c.m.m.d.c. al numerelor A și B. Putem utiliza, pentru descrierea regulii de mai sus, următoarea schemă



Această schemă se compune dintr-un număr de acte elementare. Intervin, pe de o parte, anumite operații pe care le vom numi *operatori*.

Astfel este operatorul O_0 care constă în a împărți pe A la B, operatorul O_1, care constă în a împărți pe B la R_1, operatorul O_2 care constă în a împărți pe R_1 la R_2 ș.a.m.d. și operatorul $O\alpha$, care constă în a egala c.m.m.d.c. cu împărțitorul ultimei împărțiri și a închide algoritmul. Pe de altă parte, intervin anumite alegeri elementare (alegeri între *da* și *nu*), pe care le vom numi *condiții logice*. Astfel avem condiția logică C_0, care constă în a alege între situația $R_1 = 0$ și situația $R_1 \neq 0$; condiția logică C_1, care constă în a alege între situația $R_2 = 0$ și situația $R_2 \neq 0$; condiția logică C_2, care constă în a alege între situația $R_3 = 0$ și situația $R_3 \neq 0$ ș.a.m.d. Pentru a simplifica exprimarea, vom spune că C_i se verifică ori de cîte ori $R_i = 0$; în caz contrar, vom spune că C_i nu se verifică. Algoritmul lui Euclid se poate scrie acum în modul următor.

$$O_0 C_0 \overset{1}{\uparrow} O_\alpha \overset{}{\downarrow_1} O_1 C_1 \overset{2}{\uparrow} O_\alpha \overset{}{\downarrow_2} O_2 C_2 \overset{3}{\uparrow} O_\alpha \overset{}{\downarrow_3} O_3 \ldots O_n C_n \overset{n+1}{\uparrow} O_\alpha \overset{}{\downarrow_{n+1}} O_{n+1} \ldots$$

Algoritmul începe prin declanșarea operatorului O_0. Dacă C_0 se verifică, atunci se aplică operatorul $O\alpha$ și algoritmul este încheiat. În caz contrar, săgețile de indice 1 ne trimit la operatorul O_1, după care se încearcă C_1. Dacă C_1 se verifică, atunci se aplică operatorul $O\alpha$ și algoritmul este încheiat; în caz contrar, urmînd săgețile de indice 2, declanșăm operatorul O_2 ș.a.m.d. În rezumat, și aici ca și la algoritmul scăderii, săgeata de indice i, îndreptată în sus, arată că dacă C_{i-1} nu se verifică, atunci se continuă cu declanșarea operatorului situat imediat la dreapta săgeții de indice i, îndreptate în jos.

Alți algoritmi numerici [10]

Algoritmii care, ca și algoritmul operației de scădere sau algoritmul lui Euclid, se bazează pe cele patru operații aritmetice fundamentale, se numesc *algoritmi numerici*. Cititorul poate încerca să efectueze descompunerea în operatori și în condiții logice a algoritmilor operațiilor de adunare, înmulțire și împărțire. Un alt exemplu de algoritm numeric este acela prn care se rezolvă un sistem de două ecuații de gradul întîi, cu două necunoscute, deci prin care, pornind de la sistemul

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

se ajunge la soluția

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

De asemenea, operația de extragere a rădăcinii pătrate constituie un algoritm și cititorul poate încerca descompunerea acestui algoritm în operatori și în condiții logice.

O clasă de probleme matematice de un tip determinat se consideră rezolvabilă algoritmic ori de cîte ori dispunem de un algoritm care să conducă la soluția oricărei probleme din clasa dată. Toate exemplele de mai sus constituie exemple de clase de probleme rezolvabile algoritmic.

Există însă și situații în care, înăuntrul unei clase de probleme de același tip, este nevoie să folosim, pentru fiecare problemă în parte, un procedeu deosebit, specific acelei probleme; despre o astfel de clasă de probleme spunem că este *nerezolvabilă algoritmic*. Ca exemplu, să considerăm mulțimea ecuațiilor diofantice, adică a ecuațiilor de forma

$$P = 0,$$

unde P este un polinom cu coeficienți întregi. Aici intră ecuații ca

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad 6x^{18} - x + 3 = 0,$$

deci astfel de ecuații pot avea un număr arbitrar — dar finit — de necunoscute. Prima dintre aceste ecuații admite soluțiile întregi

$$x = 3, \ y = 4, z = 5;$$

a doua ecuație nu admite soluții întregi, deoarece

$$6x^{18} > x - 3$$

pentru orice valoare a lui x.

În anul 1901, la Congresul internațional al matematicienilor, care a avut loc la Paris, marele matematician David Hilbert a prezentat 20 de probleme nerezolvate pînă la acea dată și a căror soluționare avea cea mai mare însemnătate pentru dezvoltarea ulterioară a matematicii. Una dintre aceste probleme, așa numite problemă a 10-a a lui Hilbert, se enunță în modul următor:

Să se elaboreze un algoritm prin care să se poată decide, pentru orice ecuație diofantică, dacă are sau nu soluții întregi.

Pentru cazul particular al ecuațiilor diofantice cu o singură necunoscută, un astfel de algoritm este cunoscut. Anume, s-a stabilit că dacă ecuația

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

cu coeficienți întregi, admite ca rădăcină întreagă pe x_0, atunci a_0 se împarte la x_0. Pentru elaborarea algoritmului corespunzător se va ține deci seama de următoarele indicații. Mai întîi se stabilesc toți divizorii lui a_0. Pentru fiecare dintre acești divizori se stabilește valoarea numerică corespunzătoare a primului membru al ecuației de mai sus; dacă această valoare numerică este zero, atunci respectivul divizor este o rădăcină (întreagă) a ecuației.

Problema a 10-a a lui Hilbert nu a putut fi însă rezolvată. Mai mult decît atît, se bănuiește că este imposibilă existența unui algoritm de tipul celuia despre care întreba Hilbert. Însă explicarea sensului exact al acestei afirmații depășește cadrul acestui articol.

Un prim exemplu de algoritm nenumeric; stabilirea legăturii telefonice

Ne propunem să dăm o descriere algoritmică operației prin care încercăm să obținem, de la un telefon public, legătura telefonică cu un post avînd un număr bine determinat. Intervin următorii operatori: O_1 = „introdu moneda", O_2 = „ridică receptorul", O_3 = „formează numă-

rul", O_4 = „răspunde interlocutorului și închide algoritmul", O_5 = „pune la loc receptorul", O_6 = „scoate moneda". Intervin următoarele condiții logice: C_1 = „vine tonul", C_2 = „celălalt post răspunde". Schema logică a operației de obținere a legăturii telefonice este următoarea:

$$O_1O_2C_{1\downarrow}^{1}O_3C_{2\uparrow}^{2}O_{4\downarrow_2}O_5O_6O_1O_2C_{1\downarrow}^{1}O_3C_{2\uparrow}^{2}O_{4\downarrow_2}O_5O_6O_1O_2\ldots$$

Absența săgeții de indice 1, îndreptate în jos, înseamnă că funcționarea algoritmului se oprește de îndată ce condiția C_1 nu este verificată (cu alte cuvinte, stabilirea legăturii telefonice devine imposibilă dacă nu vine tonul). După scoaterea monedei (O_6) repetăm tot șirul de acte elementare, în aceeași ordine ca și prima oară, pînă în momentul în care coondiția C_2 se verifică (adică celălalt post răspunde). Deci algoritmul de stabilire a legăturii telefonice are un caracter ciclic, numărul ciclelor putînd fi, teoretic, oricît de mare.

Descrierea algoritmică a reflexului condiționat

O altă problemă care comportă o descriere algoritmică este funcționarea reflexului condiționat. Într-un reflex condiționat se dau doi excitanți α și β, dintre care α produce reacția A în timp ce β nu produce această reacție. Dacă însă excitantul α apare însoțit de mai multe ori de excitantul β, acesta din urmă ajunge să producă reacția A chiar în absența excitantului α. În experiența bine cunoscută a lui Pavlov excitantul α era apariția hranei, β era sunetul unui clopoțel, iar A consta în secreția salivei la cîine. Iată cum se stabilește și funcționează reflexul condiționat (cu semnul $\rightarrow$ se notează implicația logică):

$$\alpha \rightarrow A,\ \beta \not\rightarrow A,\ \alpha\beta \rightarrow A,\ \alpha\beta \rightarrow A,\ \ldots,\ \alpha\beta \rightarrow A,\ \underline{\beta \rightarrow A,}$$
$$\beta \rightarrow A,\ \ldots,\ \beta \rightarrow A,\ \beta \not\rightarrow A,\ \alpha\beta \rightarrow A,\ \ldots,\ \beta \rightarrow A,\ \ldots$$

Prin $\beta \not\rightarrow A$ se înțelege că β nu atrage reacția A. Prin $\alpha\beta$ s-a notat ansamblul excitanților α și β; acest ansamblu produce, evident, reacția A. ($\alpha\beta \rightarrow A$). După ce excitantul α a apărut de mai multe ori însoțit de excitantul β, apare reflexul condiționat: β atrage reacția A, chiar dacă nu mai este însoțit de α ($\beta \rightarrow A$). Dacă însă β apare de prea multe ori fără a fi însoțit de α, atunci reflexul se stinge ($\beta \not\rightarrow A$) și este nevoie din nou de acțiunea simultană a excitanților α și β, de astă dată însă fiind suficient un număr mai redus de acte de tipul $\alpha\ \beta \rightarrow A$ pentru a obține reapariția reflexului.

În descrierea algoritmică a acestui proces intervine o dificultate legată de faptul că nu este perfect determinat de cîte ori trebuie ca excitantul α să fie însoțit de excitantul β pentru ca să se stabilească reflexul condiționat. Aceasta face necesară utilizarea anumitor noțiuni de calculul probabilităților, pe care nu le putem da aici și fără de care nu putem defini operatorii care intervin. Ne vom mulțumi, pentru aceasta, cu o descriere mai puțin generală, folosind următorii operatori: O_1 = „declanșează reacția A", O_2 = „nu declanșa reacția A". Vom folosi următoarele condiții logice: C_1 = „α acționează, β nu acționează", C_2 = „β acționează, α nu acționează", C_3 = „α și β acționează". Apariția

și funcționarea reflexului condiționat, așa cum au fost ele descrise mai sus, pot fi exprimate cu ajutorul unui algoritm avînd următoarea schemă logică:

$$C_1 \overset{1}{\uparrow} O_1 C_2 \overset{2}{\uparrow} O_2 C_3 \overset{3}{\uparrow} O_1 C_3 \overset{3}{\uparrow} O_1 \ldots C_3 \overset{3}{\uparrow} O_1 C_3 \overset{3}{\uparrow} O_1 C_2 \overset{2}{\uparrow} O_1 C_2 \overset{2}{\uparrow} O_1 \ldots$$

$$C_2 \overset{2}{\uparrow} O_1 C_2 \overset{2}{\uparrow} O_1 C_2 \overset{2}{\uparrow} O_2 \ldots C_3 \overset{3}{\uparrow} O_1 \ldots C_3 \overset{3}{\uparrow} O_1 C_2 \overset{2}{\uparrow} O_1 \ldots$$

Săgețile îndreptate în jos sînt absente; aceasta înseamnă că dacă una dintre condiții nu se verifică, atunci funcționarea algoritmului se oprește. Algoritmul acesta prezintă, față de toate algoritmele anterioare, o anumită deosebire, care constă în caracterul oarecum ciclic al declanșării operatorilor și a verificării condițiilor logice. (Pentru o relatare mai precisă și mai detaliată a algoritmului de funcționare a reflexului condiționat, vezi [5] și [6]).

Lucrul dispecerului în transportul feroviar

Dispecerul primește informații asupra stării garniturilor feroviare pe o anumită porțiune de linie. El prelucrează informația primită și elaborează hotărîri care au ca scop îndeplinirea graficului de mișcare a trenurilor. În acest scop, el dă dispoziții mecanicilor sau șefilor de gară în ceea ce privește ordinea de mișcare a garniturilor feroviare. În descrierea unui astfel de proces de comandă apar operatori de tipul următor: O_K = „ordin dat gării K pentru plecarea trenului pe linia principală", O'_K = ordin dat gării K pentru reținerea trenului pe linia principală", O''_K = „ordin dat gării K pentru trecerea trenului pe linia de rezervă", O'''_K = „ordin dat gării K pentru plecarea primului tren existent pe linia de rezervă". Intervin condiții logice de tipul următor: C_k = „în gara K se află un tren", C'_K = „în gara K a sosit un tren după orar", C''_K = „între gara $K-1$ și gara K nu se află nici un tren" etc. Cu ajutorul acestor operatori și condiții logice se poate alcătui schema de funcționare a dispecerului de cale ferată (pentru detalii, vezi [5] și [6]).

Descrierea noțiunii generale de algoritm. Proprietăți ale algoritmilor

Să încercăm acum să degajăm anumite trăsături ale proceselor înfățișate mai sus. Toate exemplele date prezintă, în ciuda varietății lor, următoarea situație comună: Apare o anumită informație inițială și trebuie elaborată o altă informație, de răspuns. Informația inițială a fost, succesiv, o pereche de numere mai mici decît 100, o pereche de numere întregi pozitive, formarea unui număr de telefon, apariția a doi excitanți, situația unor garnituri feroviare. Informația de răspuns a fost, succesiv, rezultatul unei scăderi, cel mai mare divizor comun a două numere, obținerea unei legături telefonice, apariția, în anumite condiții, a unei reacții, determinarea situației unor garnituri feroviare în funcție de situația lor anterioară.

Procesul de trecere de la informația inițială la informația de răspuns, deși altul de fiecare dată, a rămas neschimbat din punctul de

vedere al structurii sale generale. Într-adevăr, de fiecare dată acest proces consta dintr-un șir bine determinat de operatori și de condiții logice. Funcționarea procesului putea lua un curs sau altul, după cum diferitele condiții logice erau sau nu veriifcate. Dar odată fixate valorile acestor condiții logice, succesiunea operatorilor era determinată (fapt indicat de fiecare dată cu ajutorul săgeților numerotate).

O astfel de succesiune de operatori și de condiții logice care, pornind de la o anumită informație inițială, elaborează o informație de răspuns, constituie un *algoritm* iar descrierea corespunzătoare a fenomenului este o *descriere algoritmică*. Varianta pe care am ales-o mai sus pentu expunerea noțiunii de algoritm este inspirată din [5] și [6]. Legătura dintre noțiunea de algoritm în sensul lui A. A. Markov [7] și concepția elaborată în [5] și [6] a ofst semnalată în [11].

O descrierea algoritmică se distinge în primul rînd prin *exactitatea ei*, prin excluderea arbitrarului. Operatorii și condițiile logice care constituie actele elementare ale unui algoritm nu pot fi susceptibile de mai multe interpretări.

Informația inițială pe care o prelucrează un algoritm poate fi variabilă în anumite limite. Astfel, în algoritmul operației de scădere se poate porni de la *oricare* două numere mai mici decît 100; în algoritmul de funcționare a dispecerului de cale ferată situația inițială a trenurilor poate fi variabilă; în algoritmul care descrie reflexul condiționat, sunetul clopoțelului poate fi înlocuit cu orice alt excitant care nu are ca reacție secreția salivei; în sfîrșit, în algoritmul care descrie obținerea unei legături telefonice, informația inițială poate fi reprezentată de orice număr care se găsește în cartea de telefon.

Toate aceste situații oglindesc *masivitatea* algoritmului, capacitatea sa de a se aplica tuturor obiectelor dintr-o anumită clasă de obiecte.

Un algoritm rezolvă totdeauna o anumită problemă, *el nu este niciodată lipsit de finalitate.* Condițiile logice pot uneori să lipsească — așa se întîmplă, de exemplu, cu algoritmul de adunare a două numere sau cu algoritmul de funcționare a regulatorului lui Watt pentru menținerea unei viteze constante (vezi [6]) — operatorii însă nu pot lipsi niciodată.

Într-o descriere algoritmică există tendința de a se descompune inofrmația în componente ireductibile, în informații elementare („cuante de informație"). Acest proces de „cuantificare" a informației se oglindește și în șirul de alegeri elementare (alegeri "da — nu) care însoțește, de obicei, un algortim, în caracterul său binar, dichotomic.

Algoritmele înfățișate în lucrarea de față nu duc pînă la capăt acest proces de cuantificare.

O descriere algoritmică tinde să aibă un *caracter exhaustiv*, cu alte cuvinte să ia în considerare *toate* împrejurările de care depinde problema considerată. Tendința spre completitudine este, într-un anumit sens, opusă tendinței spre masivitate a algoritmului.

Însemnătatea noțiunii de algoritm este legată de dezvoltarea cibernetcii. Să încercăm să precizăm această afirmație.

Legătura profundă dintre „algoritm" și „mașina de calcul" este următoarea: Pentru ca un proces de comandă să poată fi transferat

mașinii este necesar ca acesta să admită o descriere algoritmică. Mai mult decît atît, dacă se are în vedere o mașină ideală (cu capacitate infinită, cu memorie nelimitată), atunci se poate afirma că orice proces de comandă care admite o descriere algoritmică este, prin însăși aceasta, un proces care poate fi transferat mașinii. Această aserțiune face obiectul unei teoreme foarte profunde din logica matematică. Bineînțeles, noțiunile de „algoritm" și de „mașină" sînt considerate, în această teoremă, la un grad superior de precizie, precizia pe care, în mod obișnuit, o denumim „precizie matematică". Dar o astfel de rigoare depășește cadrul articolului de față.

Cu toate că între algoritm și mașină este o legătură atît de strînsă, algoritmul nu este comunicat direct mașinii, ci prin intermediul unui program. Programul este șirul de instrucțiuni date mașinii, în vederea realizării materiale a algoritmului. Deci, spre deosebire de noțiunea de „algoritm", care aparține logicii matematice, noțiunea de „program" aparține ciberneticii. Posibilitatea de programare a unui algoritm la o mașină depinde atît de structura algoritmului cît și de proprietățile mașinii.

O altă problemă este aceea a caracterului mai mult sau mai puțin economicos al unui algoritm. Aceasta se referă, în primul rînd, la posibilitatea de a-l programa cît mai simplu, deci cu un program cît mai puțin pretențios în ceea ce privește capacitatea, memoria mașinii.

Trebuie, în același timp, să observăm că, dat fiind progresul foarte rapid al mașinilor de calcul, problema posibilității și aceea a dificultății de programare a unui algoritm își micșorează, treptat, însemnătatea. Problema principală rămîne aceea a realizării unor algoritmi cît mai masivi și care să aproximeze cît mai bine procesele considerate.

Noțiunea de „algoritm normal"

Această noțiune a fost introdusă în urmă cu vreo zece ani, de către matematicianul sovietic A. A. Markov, fiul marelui matematician A. A. Markov. Uneori, pentru a nu-i confunda, se vorbește despre A. A. Markov-tatăl și A. A. Markov-fiul. A. A. Markov-tatăl a fost un mare specialist în Teoria probabilităților și a devenit celebru prin procesele pe care le-a introdus și le-a studiat, procese care sînt azi cunoscute sub numele de *procese Markov*. În ceea ce-l privește pe A. A. Markov-fiul, opera sa de căpetenie este „Teoria algoritmilor"* apărută în 1954 și despre care vom căuta să dăm o idee în cele ce urmează *).

Să considerăm o mulțime A de elemente numite *litere*. A constituie un *alfabet*. Orice șir finit de litere, dintre care unele se pot repeta, se numește *cuvînt peste alfabetul A* sau, dacă nu există pericol de confuzie, pur și simplu *cuvînt*. Mulțimea cuvintelor peste A va fi notată prin $\mathcal{C}(A)$. Un element din $\mathcal{C}(A)$ este deci de forma:

$$a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n$$

---

* Este interesant de semnalat că Markov-nepotul este de asemenea matematician (lucrează în domeniul Topologiei).

unde $a_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Lungimea unui cuvînt* este, prin definiție, numărul literelor (distincte sau nu) din care este format acest cuvînt.

Fiind date două cuvinte, $\alpha = a_1 \ldots a_i \ldots a_n$ și $\beta = b_1 \ldots b_j \ldots b_m \ldots$, vom defini cuvîntul $\alpha\beta$ ca fiind egal cu

$$a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n b_1 \ldots b_i \ldots b_m.$$

În mod analog, fiind date trei cuvinte α, β, γ, putem defini cuvîntul $\alpha\beta\gamma$, format prin alăturarea literelor din α, β și γ, în ordinea în care ele figurează în aceste cuvinte.

Se consideră și *cuvîntul vid*, notat prin θ și definit prin relația $\alpha = \alpha\theta = \alpha$, oricare ar fi cuvîntul α.

Fie două cuvinte α și β. Vom spune că β este inclus în α, dacă există două cuvinte γ și δ, astfel încît

$$\alpha = \gamma\beta\delta. \tag{1}$$

Nu se exclude posibilitatea ca unul dintre cuvintele γ, δ sau fiecare dintre ele să fie cuvîntul vid. Rezultă deci că fiecare cuvînt este inclus în el însuși iar cuvîntul vid este inclus în orice cuvînt.

Dacă β este inclus în α, alegem, dintre diferitele reprezentări ale lui α sub forma (1), pe aceea în care γ are lungimea cea mai mică. (Se poate demonstra că există o astfel de reprezentare și numai una). Reprezentarea lui α sub forma (1), cu γ de lungimea minimă, se numește *prima incluziune a lui* β *în* α.

Fie acum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ și $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ cuvinte din $\mathcal{C}(B)$, unde B este un alfabet care conține alfabetul A.

Să considerăm schema

$$(S), \quad \alpha_1 \to \beta_1, \ \alpha_2 \to \beta_2, \ldots \ \alpha_i \to \beta_i, \ldots \ \alpha_j \to \beta_j, \ldots \ \alpha_n \to \beta_n.$$

Cu ajutorul schemei S vom defini o funcție $\mathcal{A}$ care asociază unora dintre cuvintele din $\mathcal{C}(B)$ cîte un cuvînt bine determinat din $\mathcal{C}(B)$.

Fie π un cuvînt din $\mathcal{C}(B)$. Dacă nici unul dintre cuvintele α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu este inclus în π, atunci punem prin definiție $\mathcal{A}(\pi) = \pi$. Dacă există un α_j inclus în π atunci, alegînd pe j astfel încît α_k să nu fie inclus în π pentru nici o valoare $k < j$, considerăm prima incluziune a lui α_j în π: $\pi = \gamma\alpha_j\delta$. După cum indică schema S, înlocuim pe α_j cu β_j și obținem cuvîntul $\pi_1 = \gamma\beta_j\delta$. Dacă săgeata de rang j ar fi fost urmată de un punct (așa cum se întîmplă cu săgeata de rang i), atunci am fi pus $\mathcal{A}(\pi) = \pi_1$. În caz contrar, cuvîntul π_1 este supus aceluiași tratament ca și cuvîntul π. Dacă nici un cuvînt α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ nu este inclus în π_1, atunci punem $\mathcal{A}(\pi) = \pi_1$. În caz contrar, fie α_k inclus în π_1, astfel încît α_m să nu fie inclus în π_1 pentru nici un $m < k$. Fie $\pi_1 = \varepsilon\alpha_k\omega$ prima incluziune a lui α_k în π_1. Urmînd indicația săgeții de rang k din schema S, înlocuim pe α_k prin β_k și obținem cuvîntul $\pi_2 = \varepsilon\beta_k\omega$. Dacă săgeata de rang k este urmată de un punct, atunci punem $\mathcal{A}(\pi) = \pi_2$. În caz contrar, aplicăm lui π_2 același tratament pe care l-am aplicat anterior lui π și lui π_1 ș.a.m.d.

Dacă, procedînd așa cum am arătat mai sus, nu ajungem niciodată la o săgeată urmată de un punct sau la un cuvînt π_i în care să nu fie inclus nici unul dintre cuvintele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, atunci funcția $\mathcal{A}$ nu se

definește pentru cuvîntul π, cu alte cuvinte nu are sens să vorbim despre $\mathcal{A}(\pi)$. Dacă însă ajungem la o săgeată urmată de un punct sau la un cuvînt π_1 în care nu seste inclus niciunul dintre cuvintele $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, atunci cuvîntul $\mathcal{A}(\pi)$ există și este unic determinat.

Funcția $\mathcal{A}$, definită mai sus, este, prin definiție, un *algoritm normal* peste alfabetul B. Schema S este *schema algoritmului* $\mathcal{A}$. Un algoritm normal este determinat prin schema S.

Vom ilustra noțiunea de algoritm normal pe exemplul operației de adunare aplicate numerelor naturale. Cu acest prilej, se va înțelege și sensul considerării unui alfabet B mai bogat decît alfabetul inițial A.

Fie un alfabet A format dintr-o singură literă, pe care o vom reprezenta prin cifra 1. Vom reprezenta numerele naturale în baza 1; astfel, numărul 7 se reprezintă prin

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$$

Să considerăm P numere naturale $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Fiecare dintre numerele $N_1, \ldots, N_p$ se poate reprezenta ca un cuvînt peste alfabetul A, ceea ce revine la reprezentarea sa în baza 1; însă pentru a reprezenta sistemul tuturor acestor P numere naturale, mai este nevoie de un simbol; vom folosi, în rolul acestui simbol auxiliar, o steluță: *. În felul acesta, obținem un alfabet B care conține alfabetul A: $B = \{1\ *\}$.

Sistemul celor P numere naturale se reprezintă, în alfabetul considerat, prin cuvîntul

$$\alpha = \underbrace{1\,1\ldots1}_{N_1 \text{ ori}} * \underbrace{1\,1\ldots1}_{N_2 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\,1\ldots1}_{N_p \text{ ori}} \qquad (2)$$

Trebuie să găsim un algoritm $\mathcal{A}$ care transformă cuvîntul α în cuvîntul

$$\mathcal{A}(\alpha) = \underbrace{1\,1\ldots\ldots\ldots1}_{N_1+N_2+\ldots+N_p \text{ ori}}$$

cuvînt care constituie reprezentarea în baza 1 a sumei $N_1 + \ldots + N_p$.

Să considerăm schema S următoare:

$$* \to \vartheta$$

(Amintim că ϑ este cuvîntul vid). Vom arăta că funcția $\mathcal{A}$ definită de această schemă este tocmai algoritmul normal căutat.

Fie un cuvînt β din $\mathcal{C}(A)$, deci care nu conține cuvîntul *. Rezultă că $\mathcal{A}(\beta) = \beta$. Aceasta este natural, pentru că revine la situația în care cele p numere care trebuie adunate se reduc la unul singur; acest număr va fi, evident, rezultatul adunării.

Fie acum un cuvînt α care conține atît litera 1 cît și litera *. Deci α este de forma (2). Prima incluziune a lui * în α este

$$\alpha = \gamma * \delta$$

unde

$$\gamma = \underbrace{1\ldots1}_{N_1 \text{ ori}}, \quad \delta = \underbrace{1\ldots1}_{N_2 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\ldots1}_{N_p \text{ ori}}$$

Aplicînd schema S, obținem cuvîntul

$$\alpha_1 = \gamma\theta\delta = \gamma\delta = \underbrace{1 \ldots 1}_{N_1+N_2 \text{ ori}} * \underbrace{1 \ldots 1}_{N_3 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1 \ldots 1}_{N_p \text{ ori}}$$

Prima incluziune a lui * în α_1 este

$$\alpha_1 = \gamma_1 * \delta_1$$

unde

$$\gamma_1 = \underbrace{1 \ldots 1}_{N_1+N_2 \text{ ori}}, \quad \delta_1 = \underbrace{1 \ldots 1}_{N_3 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1 \ldots 1}_{N_p \text{ ori}}$$

Aplicînd schema S, obținem cuvîntul

$$\alpha_2 = \gamma_1\theta\delta_1 = \gamma_1\delta_1 = \underbrace{1 \ldots 1}_{N_1+N_2+N_3 \text{ ori}} * \underbrace{1 \ldots 1}_{N_4 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1 \ldots 1}_{N_p \text{ ori}}$$

Continuînd în acest fel, ajungem, după un număr finit de pași, la cuvîntul

$$\alpha_{p-1} = \underbrace{1 \ldots 1}_{N_1+\ldots+N_p \text{ ori}}$$

și, deoarece * nu este inclus în α_{p-1}, rezultă că

$$\mathcal{A}(\alpha) = \alpha_{p-1}.$$

Scrierea unui algoritm normal cu ajutorul operatorilor și a condițiilor logice

Să considerăm un algoritm normal $\mathcal{A}$ definit de schema S din paragraful precedent. Pentru a fixa ideile, presupunem că singura săgeată urmată de un punct („săgeată finală") este săgeata de indice i. Introducem, pentru fiecare număr natural i, $1 \leqslant i \leqslant n$, operatorul O_i care constă în a înlocui, în prima incluziune a cuvîntului α_i în cuvîntul prelucrat, pe α_i prin β_i. Mai introducem, pentru fiecare număr natural i, $1 \leqslant i \leqslant n$, condiția logică C_i: „cuvîntul α_i este inclus în cuvîntul prelucrat". În sfîrșit, mai introducem condiția logică identic falsă, condiție pe care o reprezentăm prin $C\omega$.

Să considerăm acum următorul șir de operatori și de condiții, logice [11]:

$$\underset{n+1}{\downarrow} C_1 \ldots \underset{n+i-1}{\downarrow} \underset{n+i+1}{\downarrow} \ldots \underset{2n}{\downarrow} C_1 \overset{1}{\uparrow} O_1 C_\omega \overset{n+1}{\uparrow} \underset{1}{\downarrow} C_2 \overset{2}{\uparrow} O_2 C_\omega \overset{n+2}{\uparrow} \ldots$$

$$\ldots \underset{i-1}{\downarrow} C_i \overset{i}{\uparrow} O_i C_\omega \overset{n+i}{\uparrow} \ldots \underset{n-1}{\downarrow} C_n \overset{n}{\uparrow} O_n C_\omega \overset{2n}{\uparrow} \underset{n}{\downarrow} \underset{n+i}{\downarrow}$$

Această schemă prelucrează fiecare cuvînt α în cuvîntul $\mathcal{A}(\alpha)$, unde $\mathcal{A}$ este algoritmul normal definit de schema S din paragraful precedent. Dacă C_1 se verifică, cu alte cuvinte dacă α_1 este inclus în

cuvîntul α, atunci se aplică operatorul O_1, situat imediat la dreapta lui C_1, deci se înlocuieşte α_1 prin β_1 în prima incluziune a lui α_1 în α. Urmează apoi condiţia $C\omega$, care, fiind identic falsă, nu se verifică, deci, urmînd indicaţia săgeţilor de indice $n+1$, se începe din nou prin a se verifica condiţia C_1 etc. Dacă C_1 nu se verifică, cu alte cuvinte dacă α_1 nu este inclus în α, atunci, urmînd indicaţia săgeţilor de indice 1, se verifică condiţia C_2. Dacă α_2 este inclus în α, atunci C_2 este îndeplinită şi se aplică operatorul O_2, situat imediat la dreapta; urmează apoi verificarea condiţiei $C\omega$ care, fiind identic falsă, nu e satisfăcută, deci, urmînd săgeţile de indice $n+2$, se reîncepe cu verificarea condiţiei C_1 etc.

O situaţie specială o prezintă C_i şi O_i. Dacă C_i se verifică, atunci se aplică operatorul O_i, apoi urmează condiţia identic falsă $C\omega$, deci, urmînd săgeţile de identice $n+i$, ajungem la extremitatea din dreapta a schemei, deci $\mathcal{A}(\alpha)$ a fost găsit.

BIBLIOGRAFIE

1. Большая Советская Энциклопедия, том. II cuvîntul алгоритм (Versiunea românească în „Analele romîno-sovietice", seria matematică fizică, Nr. 2, 1956, p. 122—123).

2. *Э. Колман:* Что такое кибернетика, „Вопросы Философий", Nr. 4, 1955 (Versiunea românească în „Analele romîno-sovietice", seria matematică fizică, Nr. 3, p. 98—114).

3. *А. Н. Колмогоров:* О понятии алгоритма, „Успехи Математических Наук", 8, вып. 4 (56), 1953, p. 175—176.

4. *А. Н. Колмогоров, В.А. Успенский:* К определению алгоритма, „Успехи Математических Наук", том XIII, вып. 4, 1958, стр. 5—8

5. *А. А. Ляпунов:* О некоторых общих вопросах кибернетики, „Проблемы кибернетики" Nr. 1, 1958. (Versiunea românească în „Analele romîno-sovietice", seria matematică-fizică, Nr. 3, 1959, p. 10—28).

6. *А. А. Ляпунов, Г. А. Шестопал:* Об алгоритмическом описаний процессов управления, „Математическое просвещение", Nr. 2, 1957. (Versiunea românească în „Analele romîno-sovietice", seria matematică-fizică, Nr. 3, 1959, p. 29—42.

7. *А. А. Марков:* Теория алгорифмов, „Труды Матем. Ин.—та им. Стеклова", 38 (1951), СТР. 176—189; 42 (1954).

8. *S. Marcus:* Noţiunea de algoritm şi implicaţiile ei lingvistice, „Limba Română" (Academia R. P. R., Institutul de Lingvistică), nr. 3, 1961, p. 204—217.

9. *С. Л. Соболев, А. И. Китов, А. А. Ляпунов:* Основные черты Кибернетики, „Вопросы Философии", Nr. 4 (1955) (Versiunea românească în „Analele romîno-sovietice", seria matematică-fizică, Nr. 3 (1956), p. 8—97).

10. *Б. А. Трахтенброт:* Алгоритмы и машинное решение задач, Москва, 1960, Государственное Издательство Физ.-Мат. Лит., Москва, 1957.

11. *Ю. И. Янов:* О логических схемах алгоритмов, „Проблемы Кибернетки", Nr. 1 (1958), стр. 75—127.

BLAISE PASCAL ŞI OPERA SA ŞTIINŢIFICĂ

Consiliul Mondial al Păcii a propus să fie comemorat în lumea întreagă, printre alţi mari oameni de ştiinţă şi cultură, şi Blaise Pascal, mare matematician şi fizician francez.

Blaise Pascal s-a născut la Clermont-Ferrand în provincia Auvergne la 19 iunie 1623. Din copilărie a fost o fire bolnăvicioasă — se spune că nu putea suporta vederea apei. Sănătatea sa a rămas precară toată viaţa. După moartea timpurie a mamei sale, Blaise împreună cu

cele două surori au rămas în grija tatălui lor. Pentru a se putea dedica educației copiilor, Étienne Pascal se mută în 1631 cu întreaga familie la Paris unde rămîne pînă în 1639 cînd este trimis de către Richelieu la Rouen. În timpul cît a locuit la Paris, Étienne Pascal s-a ocupat în special de Blaise, căutînd să-și educe fiul cît mai sistematic. A început să-i explice fenomenele naturii, iar Blaise dovedea un deosebit interes față de cauzele lor și nu era satisfăcut decît atunci cînd primea o explicație completă și nu accepta decît ceea ce i se părea adevărat în mod evident, iar dacă nu i se aduceau argumente suficiente le căuta el însuși. Astfel, povestește sora sa Gilberte Perier, că pe cînd avea 11 ani, cineva lovind la masă o farfurie cu cuțitul, aceasta a emis un sunet, lucru ce i-a atras atenția lui Blaise. El a căutat imeidat cauza, repetînd în diferite chipuri experiența și apoi și-a strîns observațiile într-un mic tratat despre sunete, care a fost mult apreciat de cunoscători. Această primă lucrare a sa s-a pierdut, dar probabil a atras atenția unora dintre savanții timpului asupra tînărului autor.

O altă manifestare științifică și mai interesantă a sa este reconstituirea geometriei euclidiene. Tatăl său hotărîse să-l învețe mai întîi limbile și mult mai tîrziu matematicile. De aceea refuza să-l învețe deocamdată această știință. Într-o zi însă, la întrebarea lui Blaise ce sînt matematicile, tatăl răspunse că ele ne învață să construim figuri corecte și să aflăm relațiile dintre ele. Pornind de la această indicație, Blaise reconstitui geometria lui Euclid pînă la propoziția 32 din Cartea I a Elementelor, desenînd cu cărbune pe dușumea. Cînd tatăl său l-a surprins asupra lucrului a fost foarte uimit mai ales că Blaise nu cunoștea nici numele de „cerc" și „linie dreaptă". Acest incident a fost decisiv însă pentru viitorul științific a lui Pascal. Văzîndu-i interesul pentru matematici, tatăl său l-a ajutat să-și desăvîrșească cunoștințele și l-a pus în legătură cu savanții timpului său. Astfel Pascal ia cunoștință de preocupările contemporanilor și toată activitatea sa viitoare se va axa pe aceste probleme. Problemele timpului erau însă numai o ocazie pentru ca să se concentreze asupra lor și să-i dezvolte forța creatoare. În adevăr, este propriu geniului lui Pascal, că era deajuns să i se indice un domeniu al matematicii sau fizicii pentru a crea din el o știință. Astfel dintr-o frază a tatălui său referitoare la geometrie, a reconstituit elementele acestei științe ; cîteva indicații asupra experiențelor lui Torricelli l-au condus la stabilirea teoriei presiunii atmosferice și a echilibrului fluidelor ; o problemă amuzantă pusă de un prieten privitor la jocurile de noroc a format punctul de plecare pentru crearea calculului probabili-

tăților ; apoi din cîteva date neprecise asupra calculului indivizibilelor lui Cavalieri, fu în stare să-l creeze din nou și să-l aplice cu succes la cicloidă * ; însfîrșit, în dorința de a-și ajutat tatăl în calcularea impozitelor a inventat *mașina aritmetică* (vezi fotografia), primul instrument automat de calcul, care permitea efectuarea celor patru operații aritmetice.

Cea dintîi lucrare publicată de Pascal este din domeniul geometriei și poartă numele de *„Essai pour les coniques"*. Ea a apărut în 1640, sub formă de placat într-un număr mic de exemplare. Abia cîteva fragmente din lucrare au rămas pînă la noi și se cunosc sub titlul de *Generatio Conisectionum*. Lucrarea a stîrnit admirația matematicienilor contemporani.

In anul 1642, deci pe cînd avea 19 ani, Pascal începu să lucreze la mașina sa aritmetică punînd la contribuție toate cunoștințele sale matematice și fizice. Lucrînd la ea 9 ani și încercînd peste 50 de modele, stabili în sfîrșit unul definitiv care i se păru perfect.

Spiritul inventiv a lui Pascal nu s-a mărginit la mașina aritmetică. Huygens sosind la Paris în 1660 văzu un *orologiu* construit de Pascal. De altfel lui Pascal i se datorește ideea de a purta ceasul pe mînă.

Invenția cea mai spectaculoasă și mai populară a lui Pascal a fost *omnibusul* pe care l-a lansat la Paris spre sfîrșitul vieții sale.

Încă în antichitate, meditînd asupra materiei, filozofii au fost conduși la două concepții cu totul opuse asupra structurii acesteia. Unii dintre ei admiteau că materia este continuă și umple întreg universul. Cel mai de seamă reprezentant al acestei idei a fost Aristotel. Alții printre care Leucit și Democrit susțineau ideea discontinuității materiei, considerînd materia formată din particole numite atomi. În această concepție, singurul lucru ce există înafară de atomi este vidul în care aceștia se pot mișca. Discuțiile filozofice în jurul acestei probleme au continuat în Evul Mediu și în epoca modernă pînă în secolul XVII. La începutul secolului XVII ideea predominantă a filozofilor era că existența vidului este de neconceput. Astfel, pe timpul lui Pascal existau două teorii opuse : a plinului susținută de peripateticieni și a vidului susținută de atomiști. Primii se numeau pliniști, ceilalți vacuiști.

În această perioadă, în Italia au fost făcută de către Torricelli experiența cu un tub de sticlă închis la un capăt în care se punea mercur și apoi se întorcea cu capătul deschis într-un vas cu mercuri. Torricelli observă că nivelul mercurului din tub coboară pînă coloana de mercur devine egală cu 76 cm și apoi se oprește. Pascal luă cunoștință de această experiență la Rouen în toctombrie 1646. Repetă experiența în diferite condiții, eliminînd astfel toate argumentele cari susțineau teama de vid, răspunzînd fiecărei ipoteze prin experiențe potrivite, decisive.

După terminarea experiențelor Pascal nu mai rămîne mult la Rouen și în august 1647 plecă la Paris, cu sănătatea definitiv distrusă. Vestea experiențelor sale s-a răspîndit în toată Europa dînd naștere la discuții aprinse între pliniști și vacuiști.

Îndemnat de prietenii săi, Pascal se hotărăște să publice un rezumat al experiențelor și a consecințelor trase din ele și astfel apare în

* Cicloidă se numește curba deschisă de un punct de pe periferia unui cerc ce se rostogolește pe un plan orizontal.

octombrie 1647 cărticica intitulată *„Experiences nouvelles touchant le vide"*. În această lucrare el nu se ocupă decît de problema existenței vidului, fără a-i căuta cauza. Aflînd că Torricelli explică aceasta prin greutatea aerului, el imaginează faimoasele experiențe de pe muntele *Puy de Dôme* pe care, la cererea sa, le execută cumnatul său Perier. Rezultatele experiențelor confirmă ipoteza lui Torricelli, că coloana de mercur este menținută în echilibru de greutatea aerului. Pascal face o verificare experimentală la Paris „într-o casă înaltă de 80 de trepte" și pe vîrful turnului Saint Jaques de la Boucherie.

În urmă acestor experiențe, complet mulțumit de rezultate, scrie imediat lucrarea *„Récit de la grande experience des liqueurs"* în care insistă asupra convingerii că „natura nu are nici o groază de vid".

În 1647 după experiența de pe *Puy de Dôme*, deplin convins de existența vidului cît și de a presiunii atmosferice, Pascal scrie o serie de lucrări în care își expune convingerile: *Traité du vid* și *Traité de l'Equilibre des liqueurs* în care arată că „lichidele apasă după înălțimea lor", în care enunță și principiul ce-i poartă numele, adică principiul presei hidraulice.

În timpul cît se ocupa cu probleme de fizică Pascal nu a părăsit cu totul geometria. În această perioadă scrie *„Tratatul asupra conicelor"*. Tot acum scrie și *„Tratatul despre triunghiul aritmetic"*, în care dă modul de construire a triunghiului și proprietățile lui, cuprinse în 19 consecințe.

Începînd din anul 1654 Pascal, a cărui sănătate e tot mai șubredă, se retrage la mănăstirea Port Royal, unde trăiește ultimii ani ai vieții sale.

În intervalul cînd sănătatea îi permite Pascal se mai ocupă cu probleme de matematică. Astfel povestește sora sa Gilberte, că în primăvara anului 1658, chinuit de o durere de măsea care nu-l lăsa să doarmă, pentru a-și ușura durerile începu să se gîndească la curba numită pe atunci ruletă iar azi cicloidă și rezolvă mai multe probleme în legătură cu proprietățile ei.

Sănătatea sa, niciodată robustă, este măcinată zi de zi pînă ce, după o agonie lungă, în ziua de 19 august 1662 Pascal moare.

Activitatea științifică a lui Pascal nu a durat timp prea îndelungat. El a murit foarte tînăr, dar din cei 39 de ani cît a trăit, 7 au fost consacrați științelor. Cu toate că opera sa științifică este redusă ca volum, ea este de o valoare imensă.

Maria Popescu, Cluj

SĂ CONSTRUIM MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ PRIN MIJLOACE PROPRII

UN APARAT DE FIZICĂ CONSTRUIT CU MIJLOACE LOCALE

Prof. *D. MONDESCU*, Tulcea

Cu posibilitățile de care dispunem putem să construim aparatul de mai jos ce poate fi utilizat în predarea electricității, în următoarele scopuri:

a) pentru a demonstra variația rezistenței electrice a unui conductor cu natura și dimensiunile sale;

b) pentru a pune în evidență căderea de tensiune de-a lungul unui conductor ;

c) demonstrarea legii I-a a lui Kirchhoff;

d) măsurarea rezistenței electrice prin metoda substituției.

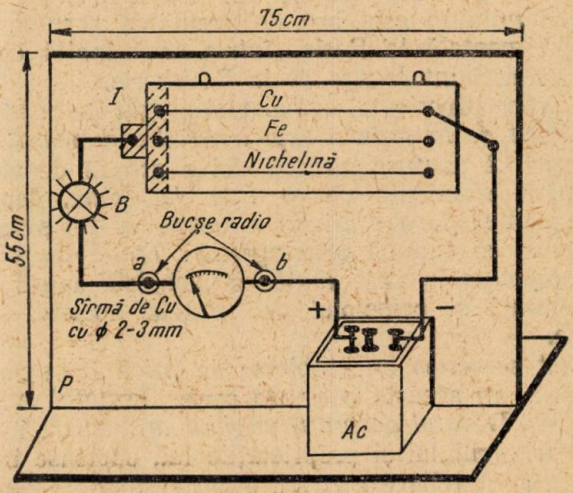


Fig. 1.

De asemenea aparatul poate fi utilizat, în cadrul cercului de fizică, în următoarele scopuri :

e) demonstrarea principiului punții Wheatstone ;

f) puntea cu fir.

Aspectul general al acestui aparat, montat pentru studiul variației

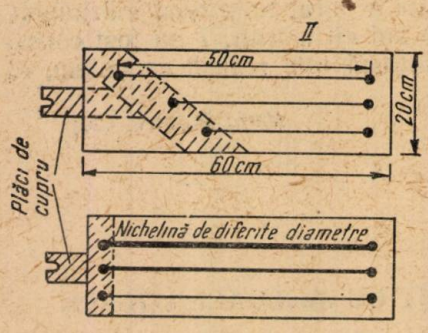


Fig. 2.

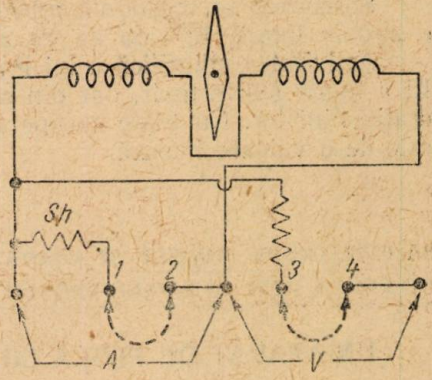


Fig. 3.

rezistenței electrice cu natura și dimensiunile conductorului se vede în figura 1, unde sînt date și dimensiunile cu care a fost construit.

După cum se vede în figură, aparatul este construit dintr-o planșetă mare de lemn (*P*), avînd rolul de suport, un acumulator (*Ac*) de 4—6 sau 12 volți, apoi un bec electric corespunzător tensiunii sursei de care

dispunem, un miliampermetru (*mA*) și trei planșete mici (I figura 1, II și III figura 2), ale căror dimensiuni sînt indicate în figura 2. Aceste planșete se pot monta succesiv pe planșeta mare *P* în modul arătat în figura 1. Pe planșetele mici I, II, III se montează conductorii.

a) de aceeași secțiune, aceeași lungime, dar naturi diferite (planșeta I);

b) de aceeași natură și aceeași secțiune, dar de lungimi diferite (planșeta II);

c) de aceeași natură, aceeași lungime, dar cu secțiuni diferite (planșeta III).

La una din extremități conductorii au o legătură comună, realizată dintr-o placă de cupru, așezată în spatele planșetei (figurile 1 și 2), la care sînt lipite, prin cositorire, cele trei borne de care sînt fixate extremitățile conductorilor. La capătul opus, conductorii sînt fixați la cîte trei ploțuri de cupru realizate dintr-o vergea cu diametrul de 4—5 milimetri. O manetă *M*, tot din cupru, închide circuitul. Planșeta *P* se vopsește în negru, planșetele mici în alb pentru a se observa bine conductorii. Drept conductori de legătură putem folosi liță de joasă frecvență sau sîrmă de cupru groasă de 1—3 miilmetri, după posibilități. Ca aparat de măsură folosim volt-ampermetrul școlar, tip I.M.D., scală de 0—10 miliamperi. Dacă nu dispunem de acest aparat, se poate folosi și volt-ampermetrul școlar mai vechi tip „Vestitorul", a cărui schemă este dată, pentru orientare, în figura 3.

Pentru a-l monta în circuit se folosesc doi conductori din liță de joasă frecvență izolată cu bumbac, prevăzuți la capete cu 2 banane pe care le introducem în bucșele a, b fixate pe planșeta P. Ca sursă de curent electric putem folosi un acumulator, o baterie de lanternă, redresor etc., avînd grijă ca becul să fie potrivit tensiunii sursei.

Dacă folosim fie un element galvanic școlar, fie o baterie de lanternă și ca aparat de măsură folosim aparatul „Vestitorul", sensibilitatea acestui aparat, pentru curentul ce trece prin becul *B* (de 1—4 volți), este prea mică atunci cînd șuntul *Sh* este introdus în circuit prin montarea fișei *U* în bornele 1, 2 (acul indicator se deplasează foarte puțin cînd se mută maneta *M* de pe un plot pe altul. Dacă scoatem șuntul din circuit atunci indicatorul se dă peste cap. Pentru a putea folosi cu succes acest aparat, în cazul cînd școala nu posedă aparatul tip I.M.D., care este cel mai potrivit, vom face o mică schimbare și anume: înlocuim șuntul *Sh* printr-o bobină cu rezistență de 2 ohmi, permițînd trecerea unui curent cu intensitatea pînă la 0,8 amperi. Pentru a înlocui șuntul cu bobina noastră nu este necesar să-l demontăm din locul lui. Vom elimina numai fișa *U* și vom lega bobina la bornele *A*, așa cum se vede în figura 4. În această situație bobina este legată în derivație cu bobinajul aparatului de măsură, îndeplinid rolul de șunt. Dacă dispunem de volt-ampermetrul tip I.M.D. prevăzut cu 2 scale de sensibilitate pentru intensitate, îl introducem direct în circuit folosind fie scala de 0—10 miliamperi, cînd lucrăm cu intensități mici, fie scala 0—1 *A* cînd lucrăm cu intensități pînă la 1 amper. Să vedem acum cum folosim aparatul pe care l-am construit. Pentru a pune în evidență modul cum

variază rezistența electrică a unui conductor cu natura și dimensiunile sale (verificarea legii $R = \varrho \frac{l}{s}$) procedăm așa cum se arată în cele ce urmează.

a) Pentru a demonstra variația rezistenței cu natura conductorului se montează planșeta mică *I* pe planșeta suport *P* și mutînd maneta *M* de pe un plot pe altul se observă, la aparatul de măsură, variația intensității curentului la trecerea lui prin conductori de naturi diferite,

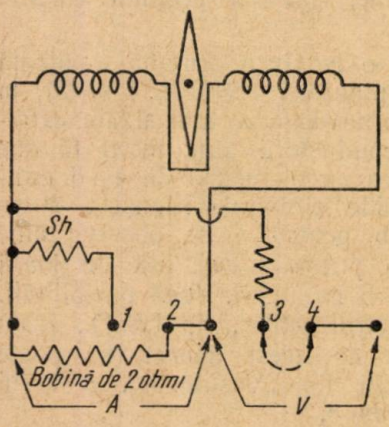


Fig. 4.

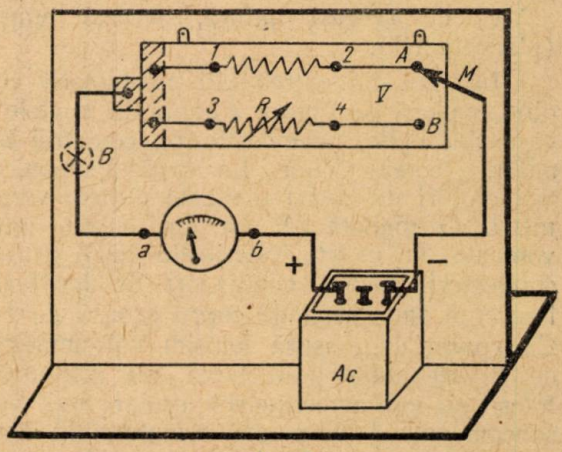


Fig. 5.

avînd secțiuni și lungimi egale. Cu cît rezistența este mai mare cu atît deviațiile acului indicator sînt mai mici.

b) Înlocuind apoi planșeta I, succesiv, cu planșetele II și III observăm variația intensității curentului și deci variația rezistenței electrice a conductorilor cu lungimea și secțiunea lor. De notat că aparatul poate fi folosit și fără instrument de măsură. În acest caz apreciem variația rezistenței electrice a conductorului studiat după intensitatea luminoasă a becului *B*. Atunci cînd rezistența electrică este mai mică prin filamentul becului *B* trece un curent de intensitate mai mare și becul luminează mai puternic. Cu cît rezistența conductorului intercalat în circuit este mai mare, cu atît becul va lumina mai slab. Dacă folosim un acumulator de la 6 volți în sus, putem utiliza și aparatul tip „Vestitorul" fără nici o modificare. Ca să folosim aparatul construit de noi și în celelalte scopuri menționate mai înainte, mai construim cîte o mică planșetă pentru fiecare caz. Astfel, pentru a pune în evidență căderea de tensiune de-a lungul unui conductor prin care trece un curent electric folosim același montaj din figura 1, dar ca aparat de măsură folosim voltmetrul pe care îl montăm în circuit ca în figura 5. Deoarece nu avem nevoie de ampermetru scurtcircuităm bucșele *a*, *b* cu un conductor suficient de gros, pentru a avea o rezistență neglijabilă, prevăzut la capete cu banane pe care le introducem în bucșe (v. figura 5). Conductorii cu ajutorul cărora introducem voltmetrul în circuit îi prevedem la capete cu cleme crocodil ; una o prindem la un

capăt al conductorului de-a lungul căruia vrem să punem în evidență căderea de tensiune, iar pe cealaltă o plimbăm în lungul lui. Dacă folosim aparatul pentru demonstrarea primei legi a lui Kirchhoff confecționăm încă o planșetă mică IV pe care montăm 2—3 rezistențe în derivație, de exemplu 2 becuri de cîte 4—6 volți, dar de puteri diferite. Mai montăm 4—6 bucșe de radio, așa cum se vede în figura 6, pentru a monta aparatul de măsură în circuitul fiecărui bec spre a măsura intensitatea curentului în fiecare ramură. De asemenea ne confecționăm 2—3 fișe în formă de *U* pe care le putem introduce în

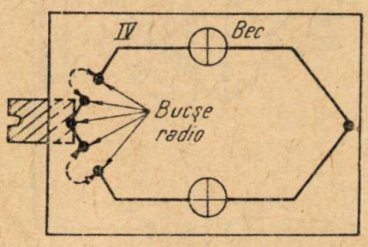


Fig. 6.

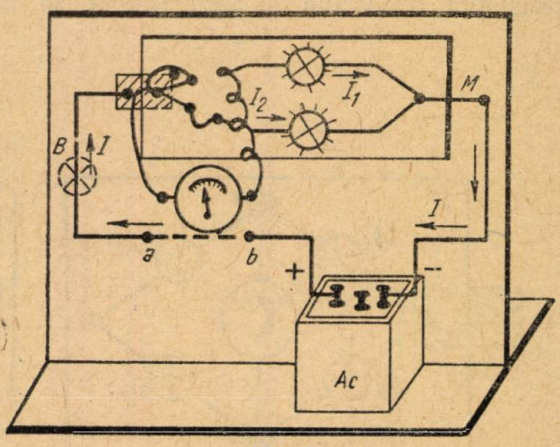


Fig. 7.

aceste bucșe pentru a închide circuitul rețelei, în ramurile unde nu este montat aparatul de măsură; aceasta cînd dispunem numai de un singur

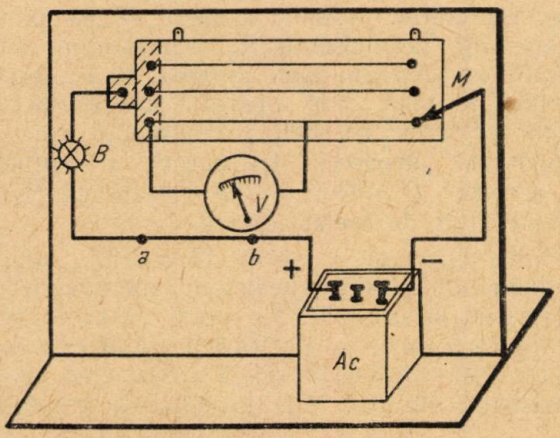


Fig. 8.

ampermetru. Cu montajul astfel realizat lucrăm în modul următor: măsurăm mai întîi curentul total debitat de sursă în rețea.

În această situație ampermetrul sau miliampermetrul este montat în bucșele *a*, *b* de pe planșeta *P*, cele 2—3 fișe fiind introduse în bucșele respective ale ramificației. După aceea montăm succesiv aparatul de măsură în fiecare ramură (figura 7) și măsurăm intensitatea curentului

respectiv. Pentru aceasta se scoate fișa din bucșele ramurii respective și se leagă ampermetrul. Becul B îl putem scurtcircuita ca să nu ne împiedice.

Dacă utilizăm aparatul pentru a demonstra cum se măsoară rezistența electrică prin metoda substituției construim o planșetă V pe care o montăm pe planșeta suport P așa cum se vede în figura 8. Ca rezistență cunoscută și reglabilă R se folosește o cutie de rezistențe

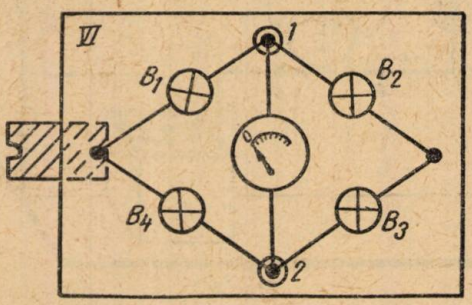


Fig. 9.

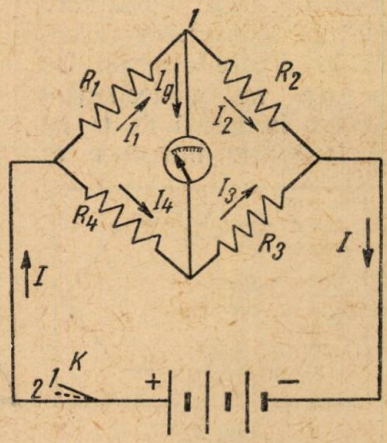


Fig. 10.

pe care o montăm în dispozitivul de fixare 3, 4, iar rezistența necunoscută R_x în 1, 2. Miliampermetrul este montat în bucșele a, b, iar becul B este scurtcircuitat. Așezînd maneta M pe plotul A închidem circuitul prin rezistența necunoscută R_x și măsurăm intensitatea curentului ce trece prin ea. Așezăm apoi maneta M pe plotul B și variem valoarea rezistenței R pînă cînd aparatul de măsură indică aceeași intensitate. Citim valoarea rezistenței cunoscute, care este egală cu rezistența necunoscută deoarece tensiunea la bornele celor două rezistențe fiind aceeași: $U = R_x\, I = R.I$, rezultă că $R_x = R$, cele două rezistențe fiind străbătute de același curent.

Pentru a utiliza aparatul construit, în cadrul cercului de fizică, în demonstrarea principiului punții Wheatstone, montăm pe o altă planșetă VI patru fasunguri de becuri mici, tip scală de radio (de exemplu) așa cum se vede în figura 9. Schema electrică a punții este dată în figura 10. Atunci cînd puntea este echilibrată, adică atunci cînd $Ig = 0$ (figura 10), între cele 4 rezistențe electrice este următoarea proporție:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (1) \qquad \text{sau} \qquad \frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \quad (1')$$

Rezistențele noastre vor fi filamentele celor 4 becuri. Cînd proporția (1) nu este respectată, Ig este diferit de zero și aparatul de măsură indică trecerea unui curent electric. Pentru a efectua cu ușurință experiența putem folosi 4 becuri identice avînd grijă ca sursa de curent să poată livra tensiunea necesară. În figura 9 am notat cu 1,2 două

bucşe de radio unde introducem capetele conductorilor de la aparatul de măsură ; poate fi folosit şi un bec de 1—3, 5 volţi. Cînd puntea este echilibrată, prin aparatul de măsură sau prin bec, nu trece curent. Dacă puntea este neechilibrată, aparatul ne indică trecerea unui curent prin el, iar becul se aprinde, dacă tensiunea este suficient de mare. Cînd lucrăm cu becuri cu tensiune diferite, pentru a echilibra repere puntea, montăm în locul becului B_2 o cutie de rezistenţe şi manevrînd cheile de contact punem în circuit rezistenţa necesară.

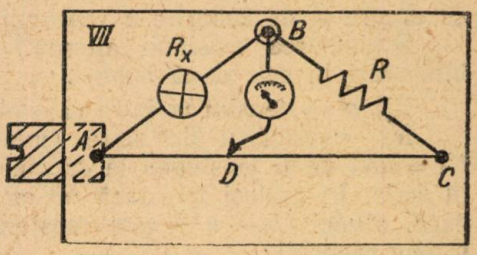


Fig. 11.

Dacă dorim să folosim aparatul ca punte cu fir confecţionăm o planşetă (VII figura 11), pe care montăm un suport pentru rezistenţa necunoscută, care poate fi spre exemplu un bec (aşa cum se vede în figură), o bucşă de radio B, un suport pentru rezistenţa cunoscută R şi reglabilă şi un fir de nichelină AC subţire. Ca şi la puntea Wheatstone şi aici putem folosi în locul aparatului de măsură un bec de 1—4 volţi. Pentru experienţe, planşeta VII se montează pe planşeta suport P şi se lucrează aşa cum se indică în manualele de electricitate. Drept cursor (D) folosim o clemă crocodil de care legăm capătul celui de al doilea conductor ce pleacă de la una din bornele aparatului de măsură. Dacă dispunem de curent continuu direct de la uzină, apartul construit de noi poate fi utilizat şi în acest caz. Vom instala numai, în locul acumulatorului, o priză la care vom aduce curentul, de la priza de perete, cu un cordon de alimentare. De asemenea aparatul poate fi utilizat în curentul alternativ, cu deosebirea că vom avea de-a face cu mărimi efective şi impedanţa circuitului. În aceste două cazuri vom avea grijă să folosim aparate de măsură şi rezistenţe adecvate, luînd şi măsurile de protecţie necesare.

PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

CÎTEVA CUNOŞTINŢE UTILE DESPRE TRANSFORMATORI

În electrotehnică transformatorul joacă un rol important fiind un instrument indispensabil. Este un aparat electromagnetic, iar construcţia lui se bazează pe fenomenul de inducţie. Se ştie că în transformator un curent alternativ de tensiune dată se schimbă într-un curent alternativ de aceeaşi frecvenţă, dar de altă tensiune.

Transformatoarele pot fi mono- şi trifazice. În articolul de faţă ne vom ocupa cu cîteva probleme de calcul elementar referitoare la transformatorul monofazic, cu scopul ca rezultatele matematice obţinute să le poată utiliza în practică cel ce ar dori să construiască un transformator.

Construcţia transformatorului se bazează pe proprietatea curentului alternativ ce străbate o bobină, de a creea în jurul său un cîmp magnetic variabil, iar acesta provoacă prin inducţie, într-o bobină învecinată, o

anumită tensiune. Prin urmare transformatorul constă din *două bobine*, iar pentru asigurarea unui randament bun se trece prin ele un *miez de fier*.

Bobina în care introducem curentul alternativ cu scopul de a-l transforma o numim *bobina primară*, iar pe cea în care apare un curent alternativ de altă tensiune, o numim *bobina secundară*. Există transformatoare de urcare și de coborîre a tensiunii.

Schimbarea tensiunii alternative se datorește numărului diferit de înfășurări în cele două bobine.

Fie u — tensiunea între capetele unei singure înfășurări,

N_1 — numărul de spire (înfășurări) ale bobinei primare, atunci $U_1 \approx uN_1$ va fi tensiunea la capetele bobinei primare, spirele fiind legate în serie. În același fel, dacă N^2 este numărul de spire în bobina secundară, atunci $U_2 - uN^2$ este tensiunea la bornele bobinei secundare. Să scriem raportul:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{u N_1}{u N_2}, \text{ de unde } \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$ (k, fiind numit raport de transformare.

Raportul de transformare este o măsură ce caracterizează transformatorul respectiv.

O altă mărime caracteristică transformatorului este *puterea nominală*, pe care o cedează. Puterea nominală este puterea secundarului (P_2).

Să notăm cu P_1 și P_2 puterea curentului în primar, respectiv în secundar:

$$P_1 = U_1 I_1, \text{ de unde } I_1 = \frac{P_1}{U_1};$$

$$P_2 = U_2 I_2, \text{ de unde } I_2 = \frac{P_2}{U_2}.$$

Avînd în vedere faptul că o parte din energia curentului din primar „se pierde" transformîndu-se în alte forme de energie, valoarea lui P_1 trebuie luată mai mare decît puterea nominală (P_2) a secundarului.

Numai în caz ideal este valabilă egalitatea $P_1 = P_2$.

În realitate însă $P_1 > P_2$; $P_1 = 1{,}25 \cdot P_2$.

Ultima relație ne arată că aproximativ 20% din puterea curentului primar se transformă în alte forme de energie. Să vedem acest lucru mai pe larg:

$$P_1 = P_2 + \frac{P_1}{5}; \; 5P_1 = 5P_2 + P_1; \; 4P_1 = 5P_2; \; P_1 = \frac{5}{4} P_2 = 1{,}25 P_2.$$

Trebuie însă să precizăm că în cazul transformatoarelor fabricate în industrie, randamentul e mult mai mare, ca în cazul descris aici (96—98%). Acest lucru denotă faptul că abia 2—4% din puterea primarului este transformată în alte forme de energie. Randamentul se calculează din relația:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\%.$$

Construcția miezului transformatoarelor este o problemă teoretică și practică importantă. Miezul este constituit din tole de fier moale. Se pot folosi tole de transformator de 0,3—0,5 mm, plăci de dinam sau chiar tole confecționate din materialul cutiilor de conserve. Forma cea mai frecventă a lor este cea indicată în figura 1.

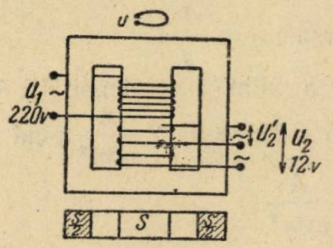


Fig. 1.

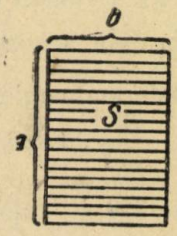


Fig. 2.

Un lucru de o deosebită importanță este calcularea secțiunii transversale S a miezului. Se utilizează în acest scop relația:

$$s = v \cdot \sqrt{P_1} \text{ cm}^2,$$

unde v este un coeficient de pierdere, a cărui valoare în cazul transformatoarelor mici și a miezului de calitate inferioară este $v = 1{,}2$.

Deci

$$s = 1{,}2\sqrt{P_1} \text{ cm}^2, \quad s = 1{,}2\sqrt{1{,}25 \cdot P_2} \text{ cm}^2.$$

Se vede că valoarea lui S nu depinde de forma miezului. Prin urmare forma secțiunii transversale poate fi pătrată sau dreptunghiulară. Să presupunem că secțiunea transversală este un dreptunghi de lungime a și lățime b (fig. 2):

$$S = a \cdot b \cdot$$

Putem scrie $a = c - x$,

$$a = c \cdot x,$$

unde c — grosimea tolei, x — numărul tolelor. Deci

$$S = c \cdot x \cdot b,$$

de unde

$$x = \frac{S}{c \cdot b}.$$

Calcularea caracteristicelor bobinelor.

Se calculează întîi numărul N_0 de spire corespunzător tensiunii de 1 V. Relația utilizată este:

$$N_0 = \frac{v}{S},$$

unde v este frecvența rețelei (50 Hz); S — secțiunea transversală a miezului.

Numărul de spire al primarului: $N_1 = N_0 U_1$;
Numărul de spire ale secundarului: $N_2 = N_0 U_2$.

În continuare se calculează diametrul spirelor primarului (d_1) și secundarului (d_2). Va trebui să ținem seama de *densitățile de curent* admise j_1 și j_2. (Numim densitate de curent intensitatea ce trece prin unitatea de suprafață a secțiunii transversale $j = \frac{I}{s}$).

La transformatoarele mici valoarea admisă a densității de curent este $1{,}3 - 3 \frac{A}{mm^2}$. Experiența arată o valoare de $2 \frac{A}{mm^2}$ până la 75 V, iar între 75—300 V valoarea de $1{,}6 \frac{A}{mm^2}$.

Deci

$$J_1 = \frac{I}{s_1} \text{ iar } j_2 = \frac{I_2}{s_2},$$

unde I_1 și I_2 sînt intensitatea curentului din primar, respectiv în secundar, iar s_1 și s_2 — secțiunea transversală a bobinei primare, respectiv secundare.

$$s_1 = r_1^2 \pi = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \pi = \frac{d_1^2}{4} \pi; \; s_2 = \frac{d_2^2}{4} \pi,$$

deci

$$j_1 = \frac{I_1}{\frac{d_1^2}{4} \cdot \pi}, \text{ de unde } d_1^2 = \frac{4 \cdot I_1}{j_1 \pi}.$$

Prin urmare diametrul d_1 și d_2 al spirelor va trebui să aibă valoarea:

$$d_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{I_1}}{\sqrt{j_1 \pi}} \text{ și } d_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{I_2}}{\sqrt{j_2 \pi}}$$

Să luăm acum un exemplu concret:

De la curentul de rețea de 220 V dorim să scoatem cu ajutorul unui transformator cu curent de 12 V și 3 A. Ce valoare trebuie să aibă caracteristicile transformatorului pentru a avea un randament de 80% ?

Fie P_2 puterea curentului transformat:

$$P_2 = U_2 I_2 = 12 \text{ V} \cdot 3 \text{ A} = 36 \text{ W}.$$

Fie P_1 puterea curentului din primar. La un randament de 80%:

$$P_1 = 1{,}25 \cdot P_2 = 1{,}25 \cdot 36 \text{ W} \approx 44 \text{ W}.$$

Dacă I_1 este intensitatea curentului din primar:

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{44 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 0{,}2 \text{ A}$$

Secțiunea transversală a miezului va fi:

$$S = v\sqrt{P_1} = 1{,}2 \cdot \sqrt{44}\ \text{cm}^2 = 7{,}92\ \text{cm}^2.$$

Considerînd secțiunea dreptunghiulară cu lățimea de exemplu $b = 3$ cm, găsim în continuare din relația $S = ab$ valoarea lui a:

$$a = \frac{S}{b} = \frac{7{,}92}{3}\ \text{cm} = 2{,}62\ \text{cm} = 26{,}2\ \text{mm},$$

însă $a = cx$; c fiind grosimea tolei — de exemplu $c = 0{,}5$ mm, deci

$$x = \frac{a}{c} = \frac{26{,}2}{0{,}5} = 52\ \text{tole}.$$

Numărul de spire necesare pentru 1 V:

$$N_0 = \frac{v}{S} = \frac{50}{7{,}92}\ \frac{\text{spire}}{\text{volt}} = 6{,}3\ \frac{\text{spire}}{\text{volt}}$$

Numărul de spire ale primarului:

$$N_1 = N_0 U_1 = 6{,}3 \cdot 220\ \text{spire} = 1368\ \text{spire}.$$

Numărul de spire în secundar:

$$N_2 = N_0 U_2 = 6{,}3 \cdot 12\ \text{spire} = 75{,}6\ \text{spire}.$$

Dacă dorim să construim un secundar cu mai multe ieșiri, atunci trebuie să înmulțim numărul N_0 de spire cu tensiunea dorită, de exemplu $U_2' = 2$ V, atunci scoatem o ieșire la

$$N_2' = N_0 U_2' = 6{,}3 \cdot 2\ \text{spire} = 12{,}6\ \text{spire};$$

sau pentru $U_2'' = 60$ V se scoate o ieșire la

$$N_2'' = N_0 U_2'' = 6{,}3 \cdot 60\ \text{spire} = 378\ \text{spire}.$$

Diametrul d_1 a înfășurării primare se calculează din relația

$$d_1 = \frac{2\sqrt{I_1}}{\sqrt{j_1 \pi}};\quad d_1^2 = \frac{4 \cdot 0{,}2}{1{,}6 \cdot 3{,}14} = \frac{1}{6{,}28} = 0{,}16;\quad d_1 = \sqrt{0{,}16}\ \text{mm} = 0{,}4\ \text{mm}.$$

Diametrul d_2 a înfășurării secundare va fi:

$$d_2^2 = \frac{4\ I_2}{j_2 \pi} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{6}{3{,}14} = 1{,}9;\quad d_2 = \sqrt{1{,}9}\ \text{mm} = 1{,}36\ \text{mm}.$$

Valoarea raportului de transformare va fi:

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2};$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{220\ V}{12\ V} = 18{,}3,\ \text{adică}\ \frac{N_1}{N_2} = \frac{1386\ \text{sp}}{75{,}6\ \text{sp}} = 18{,}3$$

Rezultatele calculelor obținute mai sus pot fi utilizate la construirea unui transformator cu mai multe ieșiri, ce se poate folosi la alimentarea diferitelor aparate sau montaje electrice.

Török István, Cluj

Generalizarea problemei 3797

Să arătăm că dacă $n \neq m \neq p$. întregi și pozitivi avem identitățile:

$$\left(\frac{C_{nm}^1 + C_{nm}^2 + \ldots + C_{mn}}{\frac{C'_{nm-1}}{nm-1} + \frac{C_{nm-1}^2}{nm-2} + \ldots + \frac{C_{nm-1}^p}{nm-p}}\right)^p =$$

$$= \frac{C_{nm}^1 \cdot C_{nm}^2 \cdots C_{nm}^p}{\frac{C'_{nm-1}}{nm-1} \cdot \frac{C_{nm-1}^2}{nm-2} \cdots \frac{C_{nm-1}^p}{nm-p}} = (nm)^p.$$

Soluție. Avem evident, identitatea:

$$\frac{nm(nm-1)\cdots(nm-p+1)}{p!} = \frac{nm}{nm-p} \cdot \frac{(nm-1)(nm-2\cdots(nm-p)}{p!},$$

care se mai scrie:

$$C_{nm}^p = \frac{nm}{nm-p} C_{nm-1}^p, \tag{1}$$

In relația (1), făcînd $p = 1, 2, \ldots, p$ avem:

$$C_{nm}^1 = \frac{nm}{nm-1} \cdot C_{nm-1}^1.$$

$$C_{nm}^2 = \frac{nm}{nm-2} C_{nm-1}^2. \tag{2}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$C_{nm}^p = \frac{nm}{nm-p} \cdot C_{nm-1}^p.$$

Adunînd parte cu parte relațiile (2) obținem:

$$C_{nm}^1 + C_{nm}^2 + \ldots + C_{nm}^p = nm\left(\frac{C_{nm-1}^1}{nm-1} + \frac{C_{nm-1}^2}{nm-2} + \ldots + \frac{C_{nm-1}^p}{nm-p}\right)$$

sau:

$$\left(\frac{C_{nm}^1 + C_{nm}^2 + \ldots + C_{nm}^p}{\frac{C_{nm-1}^1}{nm-1} + \frac{C_{nm-1}^2}{nm-2} + \ldots + \frac{C_{nm-1}^p}{nm-p}}\right)^p = (nm)^p. \tag{3}$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (2) găsim:

$$\frac{C_{nm}^1 \cdot C_{nm}^2 \cdot \ldots \cdot C_{nm}^p}{\frac{C_{nm-1}^1}{nm-1} \cdot \frac{C_{nm-1}^2}{nm-2} \cdot \ldots \cdot \frac{C_{nm-1}^p}{nm-p}} = (nm)^p. \qquad (4)$$

Din compararea relațiilor (3) și (4) rezultă relația din enunț.

Observație. Relația (1) este adevărată și pentru $p = m$, în care caz ea devine:

$$C_{nm}^m = \frac{n}{n-1} \cdot C_{nm-1}^m$$

relație în care făcînd pe $m = 1, 2, 3, \ldots, m$ putem scrie:

$$C_n^1 = \frac{n}{n-1} \cdot C_{n-1}^1$$

$$C_{2n}^2 = \frac{n}{n-1} C_{2n-1}^2 \qquad (a)$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$C_{mn}^m = \frac{n}{n-1} C_{mn-1}^m$$

care, adunate parte cu parte dau:

$$C_n^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{mn}^m = \frac{n}{n-1}(C_{n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \ldots + C_{mn-1}^m)$$

sau:

$$\left(\frac{C_n^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{mn}^m}{C_{n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \ldots + C_{mn-1}^m}\right)^m = \left(\frac{n}{n-1}\right)^m$$

relație în care n poate fi oricare număr întreg și $n \neq 1$ și care generalizează problema 3797.

Pentru $n = 2$ obținem:

$$\frac{C_2^1 \cdot C_4^2 \ldots C_{2m}^m}{C_1^1 \cdot C_3^2 \ldots C_{2m-1}^m} = \left(\frac{C_2^1 + C_4^2 + \ldots + C_{2m}^m}{C_1^3 + C_3^2 + \ldots + C_{2m-1}^m}\right)^m = 2^m$$

relația problemei 3797, după ce am înmulțit membru cu membru relațiile (a).

Tudor C. Căsăndroiu, student I. P. București